This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

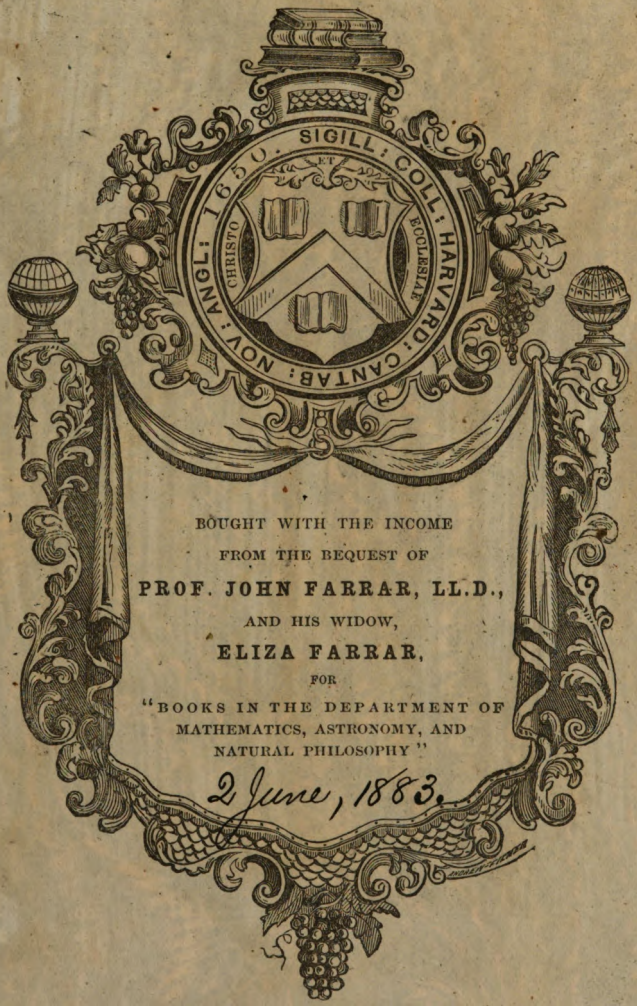
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

SCIENCE CENTER LIBRARY

Math 2058.78



BOUGHT WITH THE INCOME
FROM THE BEQUEST OF
PROF. JOHN FARRAR, LL.D.,
AND HIS WIDOW,
ELIZA FARRAR,
FOR
"BOOKS IN THE DEPARTMENT OF
MATHEMATICS, ASTRONOMY, AND
NATURAL PHILOSOPHY"

2 June, 1883.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Praktische Anleitung

zum

gründlichen Unterricht in der höhern Mathematik.

Ausführliche Auflösung

der in

Dr. Ed. Heis' Sammlung von Beispielen

enthaltenen Aufgaben.

Dritter Theil.

Kettenbrüche, Theilbruchreihen, Combinationen, binomischer und polynomischer Lehrsatz, figurirte Zahlen, Wahrscheinlichkeits-Rechnung, Gleichungen von höhern Graden und transcendente Gleichungen u. s. w.

In scientiis addiscendis magis exempla prosunt quam praecepta.
Newton.

Zum Selbstunterricht bestimmt

von

A. Ruland.

Mit 50 Holzschnitten.

Bonn.

Verlag von Max Cohen & Sohn (Fr. Cohen)

1880.

Digitized by Google

~~H, 3083~~
Math 2058.78

JUN 2 1883
Farrar fund.

Digitized by Google

Vorwort.

Mit diesem längst erwarteten dritten Bande hat die Bearbeitung der vortrefflichen Beispielsammlung von ꝛc. Heis ihren Abschluß gefunden und das jetzt in 3 Bänden vorliegende Werk, wovon Band I (Arithmetik und Algebra) bereits in vierter und Band II (Gleichungen und Progressionen) in fünfter Auflage erschienen sind, soll dem Selbstlernenden in den verschiedenen Zweigen der Arithmetik und Algebra ein sicherer und zuverlässiger Führer sein. Dieser Band ist in demselben Geiste abgefaßt, wie die frühern, und namentlich ist bei der Entwickelung der einzelnen schwierigeren Abschnitte auf diejenigen Rücksicht genommen worden, denen es nicht vergönnt war, besondere mathematische Studien zu machen. Der Verfasser wird sich für die große vorzugsweise auf diesen Band verwandte Mühe hinreichend belohnt finden, wenn es ihm gelungen ist, ein richtiges Verständniß der verschiedenen algebraischen Aufgaben und Gewandtheit in der Auflösung derselben herbeizuführen und zu befördern.

Der Verfasser.

Digitized by Google

Digitized by Google

Inhaltsverzeichniß.

B. Kettenbrüche und Theilbruchreihen.

1. Kettenbrüche.

(Heis §. 85.)

Seite
Auflösung der dahin gehörenden Aufgaben §. 437..... 1—12

2. Theilbruchreihen.

(Heis §. 86.)

Auflösung der dahin gehörenden Aufgaben §. 438.....13—22

Auflösung der Aufgaben als Anwendungen der Kettenbrüche und Theilbruchreihen.

(Heis §. 87.)

1. zur Auflösung der unbestimmten Gleichungen §. 439.....23—27
2. „ „ „ Congruenzen .....28—30
3. „ Auffindung der Quadrat- und Cubikwurzeln §. 440—447....30—44
4. „ „ „ Logarithmen .....45—50
5. Berechnung der Quadrat- und Cubikwurzeln durch Theilbruchreihen 50—65
6. „ „ Logarithmen durch Theilbruchreihen.....65—66

Sechster Abschnitt.

Permutationen, Combinationen, Variationen, binomischer und polynomischer Lehrsatz, figurirte Zahlen, Wahrscheinlichkeitsrechnung.

(Heis §. 88, 89, 90.)

1. Begriff der Permutationen, Combinationen und Variationen §. 448 67—68
2. Das Permutiren §. 449—453 .....68—72
3. Auflösung der dahin gehörenden Aufgaben §. 454.....73—81
4. Das Combiniren nebst Auflösung der dahin gehörenden Aufgaben §. 455.....81—97
5. Das Variiren nebst Auflösung der betreffenden Aufgaben §. 456 97—102
6. Combinationen und Variationen zu bestimmten Summen nebst Auflösung der dahin gehörenden Aufgaben §. 457.....103—107

Digitized by Google

Seite
7. Begriff und Anwendung der Determinanten §. 457.....108—110
8. Auflösung der Aufgaben als Anwendung der Permutations-, Combinations- und Variationsrechnung §. 458.....111—125

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

(Heis §. 91.)

1. Begriff der mathematischen Wahrscheinlichkeit §. 459.....126—127
2. Auflösung der dahin gehörenden Aufgaben §. 459.....127—141

Binomischer und polynomischer Lehrsatz, Eigenschaften der Binomial-Coefficienten und figurirte Zahlen.

(Heis §. 92 und 93.)

1. Entwickelung des binomischen Lehrsatzes für ganze positive Exponenten §. 460—462.....142—148
2. Formeln für einzelne Glieder der Potenz eines Binoms §. 463—465.....148—150
3. Entwickelung des binomischen Satzes für gebrochene negative und für ganze negative Exponenten §. 466—467.....151—155
4. Entwickelung des polynomischen Lehrsatzes §. 468—470.....155—160
5. Auflösung der dahin gehörenden Aufgaben §. 471.....160—186
6. Eigenschaften der Binomial-Coefficienten und Auflösung der dahin gehörenden Aufgaben §. 472.....186—193
7. Figurirte Zahlen §. 473—476.....193—197
8. Auflösung der dahin gehörenden Aufgaben §. 477.....197—203

Siebenter Abschnitt.

Gleichungen von höhern Graden und transcendente Gleichungen.

(Heis §. 94).

A. Eigenschaften der Gleichungen in Bezug auf ihre Wurzeln.

1. Begriff einer Funktion §. 478..... 204
2. Die binomischen Wurzelfaktoren einer Gleichung §. 479.....204—205
3. Bildung der Coefficienten einer Gl. aus ihren Wurzeln §. 480 205—206
4. Anzahl der Wurzeln einer Gleichung §. 481.....206—207
5. Die Werthe der Gl. in Bezug auf ihre Wurzeln §. 482—483 207—209
6. Fortschaffung des zweiten Gliedes aus einer Gl. §. 484—485 209—210

B. Direkte Auflösung der Gleichungen vom dritten Grade.

(Heis §. 95 a).

Besondere Fälle der Gleichungen des dritten Grades.

Auflösung der betreffenden Gleichungen §. 486.....210—215

Digitized by Google

Cardanische Formel und Formeln von Clausen und Hulbe.

(Heis §. 95 b.)

Seite
1. Entwickelung der Cardanischen Formel §. 487—489.....215—217
2. Bestimmung der Wurzeln einer cubischen Gleichung §. 490...217—218
3. Auflösung der cubischen Gleichungen:
   a) nach der Cardanischen Formel §. 491.....218—227
   b) nach der Methode von Clausen §. 491.....227—229
   c) nach der Methode von Hulbe §. 491.....229—230
4. Entwickelung der goniometrischen Formeln zur Auflösung der cubischen Gleichungen §. 492—495.....230—235
5. Auflösung der dahin gehörenden Aufgaben §. 496.....235—242

C. Gleichungen vom vierten Grade.

(Heis §. 97, 98 a, 98 b.)

1. Diese Gleichungen im Allgemeinen §. 497.....242—243
2. Entwickelung der Ampère'schen Formel §. 498.....243—245
3. Auflösung der dahin gehörenden Aufgaben §. 499.....245—250
4. Entwickelung der Euler'schen Formel §. 500.....250—251
5. Auflösung der dahin gehörenden Aufgaben §. 501.....251—258
6. Zerlegung der biquadratischen Gleichungen in zwei quadratische Faktoren nach der Methode von Cartesius §. 502.....258—260
7. Auflösung der biquadratischen Gleichungen:
   a) nach der Methode von Hulbe §. 503.....261—263
   b) „ „ „ „ Matthiessen §. 504.....263—267
   c) „ „ „ „ Job §. 505.....267—270

Bestimmung der rationalen Wurzeln einer Gleichung §. 506..270—271

Auflösung der numerischen Gleichungen von höhern Graden mit einer unbekannten Größe.

(Heis §. 99—§. 103.)

1) durch Zerlegung in Faktoren §. 507.....271—282
2) durch die Newton'sche Näherungsmethode §. 509.....282—293
3) durch Kettenbrüche §. 510.....293—306
4) durch Theilbruchreihen §. 511.....306—327
5) nach der Gräffe'schen Methode §. 512.....327—338

Auflösung der Gleichungen von höhern Graden mit mehreren Unbekannten (Heis §. 104) §. 513 ....338—354

Digitized by Google

Anwendungen der Gleichungen von höhern Graden.

(Heis §. 105.)

Seite

Auflösung dieser Aufgaben §. 513 ..... 354—374

Transcendente Gleichungen.

(Heis §. 106).

Auflösung dieser Gleichungen vermittelst der regula falsi §. 514 ... 375—408

Achter Abschnitt.

Anwendung der Algebra auf Aufgaben aus der Geometrie, Physik, Astronomie und Chemie.

(Heis §. 107, 108, 109.)

A. Auflösung der Aufgaben aus der Geometrie §. 515 ..... 409—461
B. „ „ „ „ „ Physik und Astronomie §. 516 461—511
C. „ „ „ „ „ Chemie §. 517 ..... 511—524.

Digitized by Google

B. Kettenbrüche und Theilbruchreihen.

Kettenbrüche.

(Heis Sammlung §. 85.)

§. 437. 1. Ein Kettenbruch ist ein aus mehreren Brüchen so zusammengesetzter Bruch, daß jeder folgende Bruch zu dem Nenner des vorhergehenden addirt ist. Ein Ausdruck von der Form

$$\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\ldots.}}}}$$

ist ein Kettenbruch oder kontinuirlicher Bruch, worin $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{d}$ u. s. w. die Glieder sind. Bricht die Reihe einmal ab, indem einmal ein Nenner erscheint, der aus einer bloßen ganzen Zahl besteht, so heißt der Bruch ein endlicher. Geht die Reihe aber beständig fort, ohne abzubrechen, so entsteht ein unendlicher. Wiederholen sich in einem unendlichen Kettenbruch die Glieder, so entsteht ein periodischer Kettenbruch.

2. $\alpha)$ $\cfrac{1}{2+\frac{4}{13}} = \cfrac{1}{\frac{30}{13}} = \frac{13}{30}$;

$\beta)$ $\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\frac{6}{31}}}} = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\frac{31}{130}}} = \cfrac{1}{2+\frac{130}{421}} = \frac{421}{972}$;

$\gamma)$ $\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{cd+1}}} = \cfrac{1}{a+\cfrac{cd+1}{bcd+b+d}} = \cfrac{bcd+b+d}{abcd+ad+cd+ab+1}$

Digitized by Google

Denn in den zwei letzten Gliedern unter α) nämlich in $\frac{1}{3+1/4}$ besteht der Nenner aus der ganzen Zahl 3 und dem Bruche $1/4$; nun ist $3 + 1/4 = 3\,1/4 = 13/4$; also ist $\frac{1}{3+1/4} = \frac{1}{13/4} = 4/13$. Wir haben also ferner $\frac{1}{2+4/13}$. Hierin ist der Nenner $2 + 4/13 = 2\,4/13 = 30/13$; also ist $\frac{1}{2+4/13} = \frac{1}{30/13} = 13/30$ u. s. w;

3. Soll nun ein gewöhnlicher Bruch in einen Kettenbruch verwandelt werden, so dividire man mit dem Zähler in den Nenner, mit dem sich etwa ergebenden Reste in den Divisor, mit diesem Reste in den vorhergehenden Divisor (wie beim Aufsuchen des größten gemeinschaftlichen Maßes) u. s. w. und setzt die Division so lange fort, bis kein Rest mehr bleibt. Wenden wir das Gesagte auf α) an, so ergibt sich folgendes: Dividiren wir den unter α) gegebenen Bruch in Zähler und Nenner durch 3, so erhalten wir einen neuen Bruch, dessen Zähler 1 und dessen Nenner $5 + 1/3$ ist; daher ist $\alpha = \frac{1}{5+1/3}$.

β) Dividiren wir hier Zähler und Nenner durch den Zähler 25, so erhalten wir $\frac{1}{2+6/25}$; theilen wir den Bruch $6/25$ im Zähler und Nenner durch 6, so ist $6/25 = \frac{1}{4+1/6}$; daher ist $\beta) = \frac{1}{2+6/25} = \frac{1}{2+\frac{1}{4+\frac{1}{6}}}$.

γ) Hier ist ein unechter Bruch; scheiden wir die Ganzen aus, so haben wir: $1 + 30/121 = 1 + \frac{1}{4+\frac{1}{30}}$.

δ) $\frac{1}{1+36/115} = \frac{1}{1+\frac{1}{3+7/36}} = \frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{5+1/7}}}$

ε) Siehe I. Theil dieses Werkes §. 208.

Digitized by Google

ζ) Sucht man nach §. 208 die Quotienten zu bestimmen, so erhält man: 1 Ganzes, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Nun bildet man den dem gegebenen Bruche gleichen Kettenbruch, indem man in den sämmtlichen Gliedern 1 zum Zähler und die erhaltenen Quotienten in der erhaltenen Ordnung zu Nennern macht; daher heißt hier der Kettenbruch:

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6+\frac{1}{7}}}}}}$$

η) Die Quotienten sind hier 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3; der Kettenbruch ist also:

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{3}}}}}}}}}$$

4. α) Dividire Zähler und Nenner durch $bc+1$, so hat man:

$$\frac{1}{a+\cfrac{c}{bc+1}}=\frac{1}{a+\cfrac{1}{b+\frac{1}{c}}}$$

β) $$\frac{1}{a+\cfrac{cd+1}{bcd+d+b}}=\frac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{d}{cd+1}}}=\frac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\frac{1}{d}}}}$$

5. α) $$\frac{1}{a+\cfrac{a^2+5a+7}{a^3+6a^2+13a+10}}=\frac{1}{a+\cfrac{1}{(a+1)+\cfrac{a+3}{a^2+5a+7}}}$$

Digitized by Google

$$= \cfrac{1}{a+\cfrac{1}{(a+1)+\cfrac{1}{(a+2)+\cfrac{1}{(a+3)}}}}$$

$\beta)$ $$\cfrac{1}{(n+1)+\cfrac{24n^2+58n+36}{48n^3+188n^2+252n+115}}$$

$$= \cfrac{1}{(n+1)+\cfrac{1}{(2n+3)+\cfrac{6n+7}{24n^2+58n+36}}}$$

$$= \cfrac{1}{(n+1)+\cfrac{1}{(2n+3)+\cfrac{1}{(4n+5)+\cfrac{1}{(6n+7)}}}}$$

6—12. Siehe I. Theil §. 209—214.

13. α) Der aus dem gegebenen Bruche entwickelte Kettenbruch heißt:

$$\cfrac{1}{13+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{11}}}}}$$

Demnach sind die Näherungswerthe: $^1/_{13}$, $^1/_{14}$, $\frac{5+1}{5.14+13} = {}^6/_{83}$, $\frac{7.6+1}{7.83+14} = {}^{43}/_{595}$.

$\beta)$ $$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6}}}}$$

Näherungswerthe: $^1/_2$, $^7/_{15}$, $^8/_{17}$.

$\gamma)$ $$\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{2}}}}}$$

Näherungswerthe: $^1/_5$, $^4/_{21}$, $^{13}/_{68}$, $^{121}/_{633}$.

Digitized by Google

δ) $8+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7+\frac{1}{6}}}}$ Näherungswerthe: 8, $8^1/_2$, $8^4/_9$, $8^{28}/_{65}$.

ε) $3+\cfrac{1}{5+\frac{1}{3}}$ Näherungswerthe: 3, $3^1/_5$.

ζ) $\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{3+\frac{1}{7}}}}}}$ Näherungswerthe: $^1/_3$, $^7/_{22}$, $^{22}/_{69}$, $^{161}/_{505}$, $^{505}/_{1584}$.

η) Verfährt man in dem Bruche $^{2718281828459}/_{1000000000000}$ wie beim Aufsuchen des gemeinschaftlichen Divisors, so entstehen die Quotienten: 2 Ganze, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 7, 1, 4, 2, 1, 1 u. s. w., woraus sich leicht der Kettenbruch herleiten läßt; die Näherungswerthe des gegebenen Bruches sind alsdann: $^2/_1$, $^3/_1$, $^8/_3$, $^{11}/_4$, $^{19}/_7$, $^{87}/_{32}$, $^{106}/_{39}$, $^{193}/_{71}$, $^{1264}/_{465}$, $^{1457}/_{536}$, $^{2721}/_{1001}$ u. s. w.

14. Die Näherungswerthe des zweiten Bruches sind $^1/_2$, $^3/_7$, $^{13}/_{30}$, $^{68}/_{157}$, wovon $^1/_2$ und $^{13}/_{30}$ zu groß und $^3/_7$ zu klein ist. Nun lassen sich zwischen $^3/_7$ und $^{13}/_{30}$ noch folgende 4 Nebennäherungswerthe einschalten, nämlich:

$$\frac{1.13+3}{1.30+7}=\,^{16}/_{37};\quad \frac{2.13+3}{2.30+7}=\,^{29}/_{67};\quad \frac{3.13+3}{3.30+7}=\,^{42}/_{97};$$
$$\frac{4.13+3}{4.30+7}=\,^{55}/_{127}.$$

Auch die Nebennäherungswerthe lassen sich nicht kürzen, weil die Differenz zweier zunächst aufeinander folgender Brüche nach §. 214 einem Bruche gleich ist, der die Einheit zum Zähler und das Produkt ihrer Nenner zum Nenner hat.

15. und 16. Unter der angegebenen Voraussetzung sind in 15 die beiden Brüche gleich und die Reihen der Zahlen sind reciprok. Das Beispiel in 16 liefert die reciproken Näherungswerthe:

Digitized by Google

$^3/_1,\ ^4/_1,\ ^7/_2,\ ^{18}/_5,\ ^{25}/_7.\ ^{43}/_{12},\ ^{154}/_{43}$
$^1/_3,\ ^1/_4,\ ^2/_7,\ ^5/_{18},\ ^7/_{25},\ ^{12}/_{43},\ ^{43}/_{154}.$

Nun ist nach §. 213:

$$p_n q_{n-1} = p_{n-1} q_n = (-1)^n$$

und weil $p_{n-1} = q_n$ ist, so muß auch

$$p_n q_{n-1} - q_n^2 = (-1)^n,$$

also eine ganze Zahl sein.

17. Da die Quotienten immer 1 sind, so hat man als Näherungswerthe:

α) $^0/_1;\ ^1/_1;\ \frac{1+0}{1+1} = ^1/_2;\ \frac{1+1}{2+1} = ^2/_3;\ \frac{2+1}{3+2} = ^3/_5;\ \frac{3+2}{5+3}$
$= ^5/_8;\ \frac{5+3}{8+5} = ^8/_{13};\ \frac{8+5}{13+8} = ^{13}/_{21};\ \frac{13+8}{21+13} = ^{21}/_{34};\ \frac{21+13}{34+21}$
$= ^{34}/_{55};\ \frac{34+21}{55+34} = ^{55}/_{89};\ \frac{55+34}{89+55} = ^{89}/_{144};\ \frac{89+55}{144+89} = ^{144}/_{233};$
$\frac{144+89}{233+144} = ^{233}/_{377}$ u. s. w.

β) $^1/_2;\ ^1/_3;\ \frac{1+1}{3+2} = ^2/_5;\ \frac{2+1}{5+3} = ^3/_8;\ \frac{3+2}{8+5} = ^5/_{13};\ \frac{5+3}{13+8}$
$= ^8/_{21};\ \frac{8+5}{21+13} = ^{13}/_{34};\ \frac{13+8}{34+21} = ^{21}/_{55};\ \frac{21+13}{55+34} = ^{34}/_{89};$
$\frac{34+21}{89+55} = ^{55}/_{144};\ \frac{55+34}{144+89} = ^{89}/_{233};\ \frac{89+55}{233+144} = ^{144}/_{377}$ u. s. w.

18. Geometrische Verhältnisse können immer durch Brüche dargestellt werden. Nach dem angegebenen Verhältnisse ist 1 Meter $= ^{443296}/_{139130}$ Fuß. Nun ist:

$$^{443296}/_{139130} = 3 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{12}}}}}}}}}}}$$

Digitized by Google

Also sind die Näherungswerthe: $^{3}/_{1}$, $^{16}/_{5}$, $^{35}/_{11}$, $^{51}/_{16}$, $^{137}/_{43}$, $^{462}/_{145}$, $^{2909}/_{913}$ u. s. w.; demnach ist das verlangte Verhältniß = 3 : 1; 16 : 5; 35 : 11; 51 : 16; 137 : 43; 462 : 145; 2909 : 913 u. s. w.

19. Wenn 1 Meter = 443,296 pariser Linien ist, so ist 1 Centimeter = 4,43296 par. Linien und 1 preuß. Zoll = $\frac{139,13}{12}$ par. L.; demnach ist das Verhältniß eines Zoll zu einem Centimeter = $\frac{139,13}{12}$: 4,43296 oder 139,13 : 53,19552 = $^{13913000}/_{5319552}$. Die Quotienten dieses Bruches sind 1, 1, 1, 1, 1, 1 u. s. w., demnach sind die Näherungswerthe $^{2}/_{1}$, $^{3}/_{1}$, $^{5}/_{2}$, $^{8}/_{3}$, $^{13}/_{5}$, $^{21}/_{8}$, $^{34}/_{13}$ u. s. w.; folglich ist das Verhältniß eines Zoll zu einem Centimeter = 2 : 1; 3 : 1; 5 : 2; 8 : 3; 13 : 5; 21 : 8; 34 : 13 u. s. w.

20. Da 1 preuß. Zoll = $\frac{139,13}{12}$ par. L., so sind $25^{1}/_{2}$ Zoll = $25^{1}/_{2} \times \frac{139,13}{12}$; daher ist das Verhältniß eines Meter zu einer preuß. Elle = 443,296 : $25^{1}/_{2} \times \frac{139,13}{12}$ oder $\frac{12.443,296}{25,5.139,13}$ = $^{5319552}/_{3547815}$ =

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{408 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{7}}}}}}}}$$

Die Näherungswerthe dieses Kettenbruches sind: $^{1}/_{1}$; $^{3}/_{2}$; $^{1225}/_{817}$; $^{8578}/_{5721}$ u. s. w. Das Verhältniß 1 Meter zu 1 preuß. Elle ist also = 1 : 1; 3 : 2; 1225 : 817; 8578 : 5721.

Digitized by Google

21. α) $^{120000}/_{116537} = 1 + \cfrac{1}{33 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \frac{1}{2}}}}}}}}}}$

Die Näherungswerthe dieses Kettenbruches sind: $^{1}/_{1}$; $^{34}/_{33}$; $^{35}/_{34}$; $^{69}/_{67}$; $^{104}/_{101}$; $^{693}/_{673}$; $^{797}/_{774}$ u. s. w., demnach ist das verlangte Verhältniß $= 1 : 1$; $34 : 33$; $69 : 67$; $104 : 101$; $693 : 673$; $797 : 774$ u. s. w.

21. β) Das verlangte Verhältniß ist $= 139{,}13 : 140{,}127$. Um dieses Verhältniß in kleineren Zahlen auszudrücken, verwandeln wir den Bruch $\frac{139{,}13}{140{,}127} = \frac{139130}{140127}$ in einen Kettenbruch. Nun ist:

$$^{139130}/_{140127} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{139 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}}}}}}}}}$$

Die Näherungswerthe hiervon sind: $^{1}/_{1}$; $^{139}/_{140}$; $^{140}/_{141}$; $^{279}/_{281}$; $^{1256}/_{1265}$; $^{1535}/_{1546}$; $^{2791}/_{2811}$ u. s. w. Daher ist das verlangte Verhältniß $= 1 : 1$; $139 : 140$; $140 : 141$; $279 : 281$; $1256 : 1265$; $1535 : 1546$; $2791 : 2811$ u. s. w.

21. γ) Das Verhältniß eines österreichischen Fußes zu einem

Digitized by Google

Meter = 140,127 : 443,296 soll in kleineren Zahlen ausgedrückt werden. Nun ist:

$$^{140127}/_{443296} = \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\frac{1}{2}}}}}}}}}}}$$

Die Näherungswerthe hiervon sind: $^1/_3$; $^6/_{19}$; $^{49}/_{155}$; $^{55}/_{174}$; $^{159}/_{503}$; $^{795}/_{2186}$ u. s. w. Demnach ist das verlangte Verhältniß = 1 : 3; 6 : 19; 49 : 155; 55 : 174; 159 : 503; 795 : 2186 u. s. w.

22. α) Eine Meile = 24000 × 139,13 par. Linien und ein Kilometer = 1000 × 443,296 par. L., also ist das Verhältniß einer preuß. Meile zu einem Kilometer = 24000 × 139,13 : 1000 × 443,296 = 24 × 139,13 : 443,296. Nun fanden wir in Beisp. 18 die Näherungswerthe für 443,296 : 139,13; also sind sie für 139,13 : 443,296 = $^1/_3$; $^5/_{16}$; $^{11}/_{35}$; $^{16}/_{51}$; $^{43}/_{137}$; $^{145}/_{462}$ u. s. w., demnach für 24 × 139,13 : 443,296 = $^{24}/_8$; $^{120}/_{16}$; $^{264}/_{35}$; $^{384}/_{51}$; $^{1032}/_{137}$; $^{3480}/_{462}$ u. s. w.

22. β) Da 1 Neumeile = $7^1/_2$ Kilometer = 7500 Meter, so ist das Verhältniß einer preuß. Meile zu einer Neumeile = 24000 × 139,13 : 7500 × 443,296 = $\frac{24000 \times 139{,}13}{7500 \times 443{,}296}$

$$= {}^{13913}/_{13853} = 1 + \cfrac{1}{230+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\frac{1}{3}}}}}$$

Die Näherungswerthe sind also: $^1/_1$; $^{231}/_{230}$; $^{232}/_{231}$; $^{1855}/_{1847}$; $^{2087}/_{2078}$ u. s. w.

23 α) Ein preuß. Quadratfuß verhält sich zu einem Quadrat-

Digitized by Google

meter wie $139{,}13^2 : 443{,}296^2 = 19357{,}1569 : 196511{,}343616$. Die Quotienten des Kettenbruches sind: 10, 6, 1, 1, 2, 5, 5 u. s. w. Daher sind die Näherungswerthe: $^1/_{10}$; $^6/_{61}$; $^7/_{71}$; $^{13}/_{132}$; $^{33}/_{335}$; $^{79}/_{802}$ u. s. w.

23. β) 1 preuß. Morgen $= 180\,\square^0 = 180 \times 144\,\square' = 180 \times 144 \times 139{,}13^2\,\square$ pariser Linien; 1 Ar $= 100\,\square^m$; also 1 Hektar oder 100 Ar $= 100^2$ Quadratar $= 100^2 \times 443{,}296^2$ Quadrat par. L.; daher ist das Verhältniß eines preuß. Morgen zu einem

Hektar $\begin{cases} = 180 \times 144 \times 139{,}13^2 : 100^2 \times 443{,}296^2 \\ = 180 \times 144 \times 19357{,}1569 : 10000 \times 196511{,}343616 \\ = 15679297089 : 61409794880. \end{cases}$

Die Quotienten des Kettenbruches sind: 3, 1, 10, 1, 137, 1, 2 u. s. w. Daher sind die Näherungswerthe: $^1/_3$; $^1/_4$; $^{11}/_{43}$; $^{12}/_{47}$; $^{1655}/_{6482}$; $^{1667}/_{6529}$ u. s. w.

23. γ) Wenn 1 Wiener Joch $= 1600 \times 36\,\square'$ österreichisch $= 1600 \times 36 \times 140{,}127^2\,\square$ par. Linien, so ist das Verhältniß eines preuß. Morgen zu einem Wiener Joche

$= 180 \times 144 \times 139{,}13^2 : 1600 \times 36 \times 140{,}127^2$ oder
$967857845 : 2181730681$.

Die Quotienten des Kettenbruches sind: 2, 3, 1, 14, 5, 2, 2 u. s. w. Daher sind die Näherungswerthe: $^1/_2$; $^3/_7$; $^4/_9$; $^{59}/_{133}$; $^{299}/_{674}$; $^{657}/_{1481}$ u. s. w.

24. α) Bestimmen wir durch einen Kettensatz die Größe eines preuß. Quart in Liter, so hat man:

1 Liter?	1 preuß. Quart
1 Quart	64 Cubikzoll
1728 Cubikzoll	$139{,}13^3$ Cub. par. Linien
$443{,}296^3$ par. Linien	1 Cubikmeter
1 Cubikmeter	1000000 Cub.-Centimeter
1000 Cub.-Centimeter	1 Liter
$1728 \times 443{,}296^3 \times 1000$ oder	$64 \times 139{,}13^3 \times 1000000$ oder
2352042699,649	2693161239,497; daher

1 preuß. Quart $= 1{,}145031$ Liter.

Die Quotienten des Kettenbruches aus dem Bruche 0,145031 sind: 6, 1, 8, 1, 1, 7, 1, 1, 1, 1 u. s. w. Daher sind die Näherungswerthe: $^1/_1$; $^7/_6$; $^8/_7$; $^{71}/_{62}$; $^{79}/_{69}$; $^{150}/_{131}$; $^{1129}/_{986}$; $^{1279}/_{1117}$; $^{2408}/_{2103}$ u. s. w.

Für das praktische Leben ist der dritte Näherungswerth $^8/_7$ am brauchbarsten; hiernach sind 7 Quart $= 8$ Liter.

24. Aus dem Verhältnisse einer Wiener Metze zu einem Hektoliter folgt, daß 1 Hektoliter $= 1{,}625897$ Wiener Metze. Die Quotienten des Kettenbruches aus dem Bruche 0,625897 sind: 1, 1, 1, 2, 17, 22, 1, 1 u. s. w. Daher sind die

Digitized by Google

Näherungswerthe für denselben: $^{1}/_{1}$; $^{2}/_{1}$; $^{5}/_{2}$; $^{5}/_{3}$; $^{13}/_{8}$; $^{226}/_{139}$; $^{4985}/_{3066}$ u. s. w.

24. γ) Aus dem angegebenen Verhältnisse folgt, daß

1 Liter = 0,70665 Wiener Maß ist.

Die Quotienten des Kettenbruches aus dem Bruche 0,70665 sind: 1, 2, 2, 2, 4, 10, 2, 3, 1, 2; folglich sind die Näherungswerthe: $^{1}/_{1}$; $^{2}/_{3}$; $^{5}/_{7}$; $^{12}/_{17}$; $^{53}/_{75}$; $^{542}/_{767}$; $^{1137}/_{1609}$; $^{3953}/_{5594}$; $^{5090}/_{7203}$; $^{14133}/_{20000}$.

25. Die Quotienten des Kettenbruches aus dem Bruche 0,1415926536 sind: 3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1 u. s. w.; folglich ist das Verhältniß des Durchmessers eines Kreises zu seiner Peripherie = 1 : 3; 7 : 22; 106 : 333; 113 : 355; 33102 : 103993; 33215 : 104348; 66317 : 208341; 99532 : 312689 u. s. w.

26. Der Durchmesser eines Kreises verhält sich zur Seite des fraglichen Quadrates wie 1 : 0,886226925. Nun sind die Quotienten des Kettenbruches aus dem Bruche 0,886226925 folgende: 7, 1, 3, 1, 2, 1, 57, 9, 1, 1, 5, 1, 1, 8, 2. Daher sind die annähernden Verhältnisse: 1 : 1; 8 : 7; 9 : 8; 35 : 31; 44 : 39; 123 : 109; 167 : 148; 9642 : 8545; 86945 : 77053; 96587 : 85598; 183532 : 162651; 1014247 : 898853; 1197779 : 1061504; 2212026 : 1960357; 18893987 : 16744360; 40000000 : 35449077.

27. α) Der Durchmesser ist

$$= {}^{1000000}/_{805996} = 1 + \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{6+\frac{1}{5}}}}}}}}$$

Daher sind die Näherungswerthe: $^{1}/_{1}$; $^{5}/_{4}$; $^{31}/_{25}$; $^{67}/_{54}$; $^{567}/_{457}$; $^{3469}/_{2796}$; $^{7505}/_{6049}$; $^{48499}/_{39090}$; $^{250000}/_{201499}$.

27. β) Aus dem Verhältnisse der Höhe des Cylinders zur Seite des Würfels folgt, daß die Höhe = $^{1000000}/_{922685}$. Die Quotienten des Kettenbruches sind: 11, 1, 12, 2, 6, 1, 24, 1, 2. Daher heißen die Näherungswerthe: $^{1}/_{1}$; $^{12}/_{11}$; $^{13}/_{12}$; $^{168}/_{155}$; $^{349}/_{322}$; $^{2262}/_{2087}$; $^{2611}/_{2409}$; $^{64926}/_{59903}$; $^{67537}/_{62312}$; $^{2000000}/_{184527}$.

28. Der synodische Monat enthält 29,530588 Tage und das tropische Jahr 365,24222 Tage. Soll nun das Verhältniß

Digitized by Google

des synodischen Monats zum Jahre in kleineren Zahlen ausgedrückt werden, so verwandle man den Bruch $^{29530588}/_{365242220}$ in einen Kettenbruch. Die Quotienten desselben sind: 12, 2, 1, 2, 1, 1, 17, 2, 38, 1, 2, 1, 3, 18. Entwickelt man hieraus die Näherungswerthe, so ist das fragliche Verhältniß = 1 : 12; 2 : 25; 3 : 37; 8 : 99; 11 : 136; 19 : 235; 334 : 4131; 687 : 8497; 26440 : 327017; 27127 : 335514; 80694 : 998045; 107821 : 1333559; 404157 : 4998722; 7382647 : 91310555.

29. Goethes Geburtstag war am 28. August 1749; bis dahin waren seit Christi Geburt 1748 Jahre und 239 Tage verflossen. Nun war 1870 am 11. August Vollmond, also 1869 Jahre und 222 Tage verflossen. Der Unterschied zwischen diesen beiden Zeitangaben beträgt 120 Jahre und 348 Tage. Da nun nach dem vorigen Beispiele nach 19 Jahren die Mondphasen nahezu auf die nämlichen Tage des Jahres fallen, so sind 120 Jahre gleich 6 Mondcirkeln und 6 Jahre. Diese 6 Jahre sind $= \frac{6 \cdot 235}{19} = 74$ synodische Monate + 6 Tage und die 348 Tage betragen 348 : 29,530588 = 12 synodische Monate weniger 6 Tage; daraus folgt, daß

$$120 \text{ Jahre u. } 348 \text{ Tage} = \left\{ \begin{array}{l} 6 \text{ Mondcirkel} + 74 \text{ synod. Mon.} + 6 \text{ Tage} \\ \qquad\qquad + 12 \quad " \quad\quad " \quad - 6 \quad " \\ \hline 6 \text{ Mondcirkel} + 86 \text{ synod. Mon. sind.} \end{array} \right.$$

Mithin war am 28. August 1749 Vollmond.

30. Die Zeit, welche die Erde gebraucht, um die Bahn um die Sonne zurückzulegen, beträgt genau 365 Tage, 5 Stunden, 48 Minuten, 47,4 Sekunden = 365,242215 Tage = 365 Tage + 0,242215 Tage. Dieser Bruch ist einem Kettenbruch gleich, dessen Glieder aus Brüchen bestehen, wovon die Zähler sind: 4, 7, 1, 3, 1, 1, 25, 13, 2. Die Näherungswerthe dieses Kettenbruches sind daher: $^1/_4$; $^7/_{29}$; $^8/_{33}$; $^{31}/_{128}$; $^{39}/_{161}$; $^{70}/_{289}$; $^{1789}/_{7386}$ u. s. w. Daraus folgt, daß man nach 4 Jahren 1 Tag, oder nach 29 Jahren 7 Tage, oder nach 33 Jahren 8 Tage, oder nach 128 Jahren 31 Tage, oder nach 161 Jahren 39 Tage, oder nach 289 Jahren 70 Tage einzuschalten hat.

31. Hier ist der Bruch $^{299152818}/_{298152818}$ in einen Kettenbruch zu verwandeln; die Quotienten desselben sind: 298, 6, 1, 1, 5, 4, 1, 1, 1, 1, 2, 111. Daher sind die Näherungswerthe: $^1/_1$; $^{299}/_{298}$; $^{1795}/_{1789}$; $^{2094}/_{2087}$; $^{8889}/_{8876}$; $^{21539}/_{21467}$; $^{90045}/_{89744}$; $^{111584}/_{111211}$; $^{201629}/_{200955}$; $^{313213}/_{312166}$; $^{514842}/_{513121}$; $^{1342897}/_{1338408}$; $^{149576409}/_{149076409}$.

Digitized by Google

Theilbruchreihen.

(Heis Sammlung §. 86.)

§. 438. 1. Unter Theilbruchreihen versteht man auf einander folgende Brüche, die zum Zähler 1 haben und von welchen jeder folgende ein aliquoter Theil des unmittelbar vorhergehenden ist. Eine Reihe solcher Brüche heißt eine Theilbruchreihe. Eine solche Reihe ist:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{xyz}+\frac{1}{xyzu}+\frac{1}{xyzuv}+\ldots..$$

oder, wenn man das erste Glied dieser Reihe mit A_1, das zweite mit A_2, das dritte mit A_3 u. s. w. bezeichnet, so hat die Theilbruchreihe die Form:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}A_1+\frac{1}{z}A_2+\frac{1}{u}A_3+\frac{1}{v}A_4+\frac{1}{w}A_5+\ldots.$$

Auch die Theilbrüche dienen dazu, für die in großen Zahlen ausgedrückten gewöhnlichen oder Decimalbrüche Näherungswerthe zu berechnen. Sollen nun die Näherungswerthe der obigen Reihe angegeben werden, so hat man als

ersten Näherungswerth $\frac{1}{x}$

zweiten „ $\frac{1}{x}+\frac{1}{xy}=\frac{y+1}{xy}$

dritten „ $\frac{x+1}{xy}+\frac{1}{xyz}=\frac{yz+z+1}{xyz}$

vierten „ $\frac{yz+z+1}{xyz}+\frac{1}{xyzu}=\frac{yzu+zu+u+1}{xyzu}$

fünften Nährungswerth

$\frac{yzu+zu+u+1}{xyzu}+\frac{1}{xyzuv}=\frac{yzuv+zuv+uv+v+1}{xyzuv}$ u. s. w.

2. Soll der Bruch $^{213}/_{749}$ in eine Theilbruchreihe verwandelt werden, so hat man:

$$^{213}/_{749}=\frac{1}{x}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{xyz}+\frac{1}{xyzu}+\frac{1}{xyzuv}+\ldots$$

Multipliciren wir diese Gl. mit 749x, so erhalten wir:

$$213x=749+\frac{749}{y}+\frac{749}{yz}+\frac{749}{yzu}+\frac{749}{yzuv};\text{ also}$$

$$213x-749=\frac{749}{y}+\frac{749}{yz}+\frac{749}{yzu}+\frac{749}{yzuv}.$$

Digitized by Google

Da $213x > 749$ sein soll, so nehme man x so, daß $x > {}^{749}/_{213}$ wird. Setzen wir daher $x = 4$, so wird:

$$103 = \frac{749}{y} + \frac{749}{yz} + \frac{749}{yzu} + \frac{749}{yzuv}.$$

Multiplicire diese Gl. mit y, so wird:

$$103y = 749 + \frac{749}{z} + \frac{749}{zu} + \frac{749}{zuv} \text{ oder}$$

$$103y - 749 = \frac{749}{z} + \frac{749}{zu} + \frac{749}{zuv}.$$

Wenn $103y > 749$ sein soll, so setze man $y = 8$; alsdann ist:

$$75 = \frac{749}{z} + \frac{749}{zu} + \frac{749}{zuv}.$$

Diese Gl. mit z multiplicirt, gibt:

$$75z = 749 + \frac{749}{u} \ldots \text{also}$$

$$75z - 749 = \frac{749}{u}.$$

Soll $75z > 749$ sein, so setze man $z = 10$; alsdann ist:

$$1 = \frac{749}{u}; \text{ folglich } u = 749.$$

Man kann die Werthe für x, y, z, u auch nach folgendem Schema berechnen:

$$\begin{array}{rl} 749 : 213 = & 4 = x \\ \underline{852} & \\ 749 : 103 \ldots = & 8 = y \\ \underline{824} & \\ 749 : 75 \ldots\ldots = & 10 = z \\ \underline{750} & \\ 749 : 1 \ldots\ldots\ldots = & 749 = u \end{array}$$

Daher ist: ${}^{213}/_{749} = {}^{1}/_{4} + {}^{1}/_{8}\,A_1 + {}^{1}/_{10}\,A_2 + {}^{1}/_{749}\,A_3$.

Die Näherungswerthe sind: ${}^{1}/_{4}$; ${}^{1}/_{4} + \frac{1}{4.8} = {}^{9}/_{32}$; ${}^{9}/_{32} + \frac{1}{32.10} = {}^{91}/_{320}$; ${}^{91}/_{320} + \frac{1}{320.749} = {}^{68160}/_{239680} = {}^{213}/_{749}$.

Verwandelt man den gegebenen Bruch in einen Kettenbruch, so heißen die Quotienten, woraus derselbe gebildet wird: 3, 1, 1, 14, 1, 2, 2. Die Näherungswerthe sind: ${}^{1}/_{3}$; ${}^{1}/_{4}$; ${}^{2}/_{7}$; ${}^{29}/_{102}$; ${}^{31}/_{109}$; ${}^{91}/_{320}$.

3. Berechnet man die Werthe für x, y, z, u, v, w, so haben wir:

Digitized by Google

$$
\begin{array}{rl}
209 : 81 = & 3 = x \\
243 & \\
\hline
209 : 34 \ . \ . = & 7 = y \\
238 & \\
\hline
209 : 29 \ . \ . \ . \ . = & 8 = z \\
232 & \\
\hline
209 : 23 \ . \ . \ . \ . \ . \ . = & 10 = u \\
230 & \\
\hline
209 : 21 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . = & 10 = v \\
210 & \\
\hline
209 : 1 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . = & 209 = w
\end{array}
$$

Daher ist: $^{81}/_{209} = {}^{1}/_{3} + {}^{1}/_{7}A_1 + {}^{1}/_{8}A_2 + {}^{1}/_{10}A_3 + {}^{1}/_{10}A_4 + {}^{1}/_{209}A_5$.

Die Näherungswerthe sind: $^{1}/_{3}$; $^{8}/_{21}$; $^{65}/_{168}$; $^{651}/_{1680}$.

Die Näherungswerthe des aus dem gegebenen Bruche entwickelten Kettenbruches sind: $^{1}/_{2}$; $^{1}/_{3}$; $^{2}/_{5}$; $^{5}/_{13}$; $^{7}/_{18}$; $^{12}/_{31}$; $^{19}/_{49}$; $^{31}/_{80}$.

Die Werthe für x, y, z u. s. w. für den Bruch $^{503398}/_{1000000}$ sind:

$$
\begin{array}{rl}
1000000 : 503398 = & 2 = x \\
1006796 & \\
\hline
1000000 : 6796 \ . \ . \ . \ . = & 148 = y \\
1005808 & \\
\hline
1000000 : 5808 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . = & 173 = z \\
1004784 & \\
\hline
1000000 : 4784 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . = & 210 = u \\
1004640 & \\
\hline
1000000 : 4640 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . = & 216 = v \\
1002240 & \\
\hline
2240 \text{ u. s. w.} &
\end{array}
$$

Demnach ist: $^{503398}/_{1000000} = {}^{1}/_{2} + {}^{1}/_{148}A_1 + {}^{1}/_{173}A_2 + {}^{1}/_{210}A_3 + {}^{1}/_{216}A_4 \ldots$.

Die Näherungswerthe sind: $^{1}/_{2}$; $^{149}/_{296}$; $^{12889}/_{25604}$ u. s. w.

Der aus dem gegebenen Bruche entwickelte Kettenbruch liefert die Näherungswerthe: $^{1}/_{1}$; $^{1}/_{2}$; $^{74}/_{147}$; $^{963}/_{1913}$; $^{1037}/_{2060}$; $^{4074}/_{8093}$; $^{33629}/_{66804}$ u. s. w.

4. α)

$$
\begin{array}{rl}
6628 : 479 = & 14 = x \\
6706 & \\
\hline
6628 : 78 \ . \ . = & 85 = y \\
6630 & \\
\hline
6628 : 2 \ . \ . \ . \ . \ . = & 3314 = z
\end{array}
$$

Daher ist: $^{479}/_{6628} = {}^{1}/_{14} + {}^{1}/_{85}A_1 + {}^{1}/_{3314}A_2$; also Näherungswerthe: $^{1}/_{14}$; $^{43}/_{595}$ u. s. w.

Digitized by Google

4. β)
$$117:55 = 3 = x$$
$$165$$
$$117:48 \ldots = 3 = y$$
$$144$$
$$117:27 \ldots\ldots = 5 = z$$
$$135$$
$$117:18 \ldots\ldots\ldots = 7 = u$$
$$126$$
$$117:9 \ldots\ldots\ldots\ldots = 13 = v$$

Also ist der Bruch $= 1/3 + 1/3 A_1 + 1/5 A_2 + 1/7 A_3 + 1/13 A_4$.
Näherungswerthe: $1/3$; $4/9$; $7/15$ u. s. w.

4. γ)
$$1313:251 = 6 = x$$
$$1506$$
$$1313:193 \ldots = 7 = y$$
$$1351$$
$$1313:38 \ldots\ldots = 35 = z$$
$$1330$$
$$1313:17 \ldots\ldots\ldots = 78 = u$$
$$1326$$
$$1313:13 \ldots\ldots\ldots\ldots = 101 = v$$

Also ist der Bruch $= 1/6 + 1/7 A_1 + 1/35 A_2 + 1/78 A_3 + 1/101 A_4$.
Näherungswerthe sind: $1/6$; $4/21$; $281/1470$ u. s. w.

4. δ) Der Bruch ist $= 8 + 178/399$. Nun ist: $399:178 = 3 = x$
$$534$$
$$399:135 \ldots = 3 = y$$
$$405$$
$$399:6 \ldots\ldots = 66 = z$$
$$396$$
$$399:(-3) \ldots\ldots = -133 = u$$

Es ist also: $8 + 178/399 = 8 + 1/3 + 1/3 A_1 + 1/66 A_2 - 1/133 A_3$.
Näherungswerthe: 8; $8\,1/3$; $8\,4/9$; $8\,265/594$; $8\,35244/79002 = 8\,178/399$.

4. ε) $51/16 = 3 + 3/16 = 3 + 1/5 - \frac{1}{5.16}$. Näherungswerthe: 3; $3\,1/5$; $3\,3/16$.

4. ζ) $3696/11593 = 1/4 + 1/4 A_1 + 1/10 A_2 + 1/100 A_3 + 1/109 A_4 + 1/166 A_5 + 1/430 A_6 + 1/682 A_7 + 1/11593 A_8$.
Näherungswerthe $1/4$; $5/16$; $51/160$: u. s. w.
Oder: $3696/11593 = 1/3 - 1/23 A_1 - 1/527 A_2 - 1/11593 A_3$.
Näherungswerthe $1/3$; $22/69$ u. s. w.
Oder: $3696/11593 = 1/3 - 1/22 A_1 + 1/24 A_2 - 1/11593 A_3$.
Näherungswerthe: $1/3$; $7/22$; $505/1584$ u. s. w.

Digitized by Google

$\eta) = 2 + {}^1/_2 + {}^1/_3 A_1 + {}^1/_4 A_2 + {}^1/_5 A_3 + {}^1/_6 A_4 + {}^1/_7 A_5 + {}^1/_8 A_6 +$ u. ſ. w.

Näherungswerthe: 2; $2^1/_2$; $2^2/_5$; $2^{17}/_{24}$; $2^{48}/_{60}$; $2^{181}/_{252}$; $2^{517}/_{720}$; $2^{28961}/_{40320}$ u. ſ. w.

5. $^{72}/_{100} = \frac{1}{x} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{xyz} + \frac{1}{xyzu} + \frac{1}{xyzuv} + \ldots$

$72x - 100 = \frac{100}{y} + \frac{100}{yz} + \frac{100}{yzu} + \ldots$ für $x = 2$ wird

$44y - 100 = \frac{100}{z} + \frac{100}{zu} + \frac{100}{zuv} + \ldots$ „ $y = 3$ „

$32z - 100 = \frac{100}{u} + \frac{100}{uv} + \frac{100}{uvw} + \ldots$ „ $z = 4$ „

$28u - 100 = \frac{100}{v} + \frac{100}{vw} + \frac{100}{vwr} + \ldots$ „ $u = 4$ „

$12v - 100 = \frac{100}{w} + \frac{100}{wr} + \ldots\ldots$ „ $v = 9$ „

$8w - 100 = \frac{100}{r} \ldots\ldots\ldots\ldots$ „ $w = 13$ „

$4r - 100 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots$ „ $r = 25$ „

Näherungswerthe: $^1/_2$; $^2/_5$; $^{17}/_{24}$; $^{23}/_{32}$ u. ſ. w.

Ferner iſt: $^{72}/_{100} = \frac{1}{x} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{xyz} + \frac{1}{xyzu}$;

$72x - 100 = \frac{100}{y} + \frac{100}{yz} + \frac{100}{yzu}$; für $x=2$, gibt

$44y - 100 = \frac{100}{z} + \frac{100}{zu}$; für $y = 2$, gibt:

$-12z - 100 = \frac{100}{u}$; ſetze $z = -8$, ſo iſt:

$-4 = \frac{100}{u}$; daher $u = -25$.

Alſo iſt auch: $^{72}/_{100} = {}^1/_2 + {}^1/_2 A_1 - {}^1/_8 A_2 + {}^1/_{25} A_3$.

Näherungswerthe: $^1/_2$; $^3/_4$; $^{23}/_{32}$ u. ſ. w.

Ferner: $^{72}/_{100} = \frac{1}{x} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{xyz} + \frac{1}{xyzu}$;

$72x - 100 = \frac{100}{y} + \frac{100}{yz} + \frac{100}{yzu}$; für $x = 2$

$44y - 100 = \frac{100}{z} + \frac{100}{zu}$; für $y = 3$

Digitized by Google

$$32z - 100 = \frac{100}{u} \quad \text{für } z = 3$$

$$-4u = 100; \text{ also } u = -25.$$

Also: $^{72}/_{100} = {}^1/_2 + {}^1/_8 A_1 + {}^1/_8 A_2 - {}^1/_{25} A_3$.

Näherungswerthe: $^1/_2$; $^2/_3$; $^{13}/_{18}$ u. s. w.

6. Bestimmt man nach dem Schema die Werthe für x, y, z u. s. w., so findet man

(1) $x=6; y=9; z=19; u=25; v=230$ und $w=2000$.

(2) $x=6; y=10; z=6; u=40; v=4; w=16$ u. $s=-625$.

Demnach ist (1) $3 + {}^{186199}/_{1000000} = 3 + {}^1/_6 + {}^1/_9 A_1 + {}^1/_{12} A_2 + {}^1/_{25} A_3 + {}^1/_{280} A_4 + {}^1/_{2000} A_5$.

(2) $3 + {}^{186199}/_{1000000} = 3 + {}^1/_6 + {}^1/_{10} A_1 + {}^1/_6 A_2 + {}^1/_{40} A_3 + {}^1/_4 A_4 + {}^1/_{16} A_5 - {}^1/_{625} A_6$.

Näherungswerthe aus (1): 3; $3^1/_6$; $3^5/_{27}$; $3^{191}/_{1026}$ u. s. w.

„ „ (2): 3; $3^1/_6$; $3^{11}/_{60}$; $3^{67}/_{360}$.

Ferner ist:

$$^{1000000}/_{3186199} = \frac{1}{x} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{xyz} + \frac{1}{xyzu} + \frac{1}{xyzuv} \text{ u. s. w.}$$

$$1000000x - 3186199 = \frac{3186199}{y} + \ldots \text{ für } x = 4$$

$$813801y - 3186199 = \frac{3186199}{z} + \ldots \text{ für } y = 4$$

$$69005z - 3186199 = \frac{3186199}{u} + \ldots \text{ für } z = 46$$

$$-11969u - 3186199 = \frac{3186199}{v} + \ldots \text{ für } u = -266$$

$$-2445v - 3186199 = \frac{3186199}{w} + \ldots \text{ für } v = -1303$$

$$-364w - 3186199 = \frac{3186199}{s} + \ldots \text{ für } w = -8753$$

$$-107s - 3186199 = \frac{3186199}{t} + \ldots \text{ für } s = -2977 \text{ u. s. w.}$$

Hiernach erhalten wir die Näherungswerthe: $^1/_4$; $^5/_{16}$; $^{231}/_{736}$; $^{61445}/_{195776}$ u. s. w.

Setzt man in den obigen Gleichungen für $x=3$, $y=-17$, $z=-153$, $u=-2358$, $v=-5889$, $w=-12744$ u. s. w., so erhält man die Näherungswerthe: $^1/_3$; $^{16}/_{51}$; $^{2449}/_{7808}$ u. s. w.

7. Sucht man wie im vorigen Beispiel oder nach dem Schema die Werthe für x, y, z u. s. w. zu bestimmen, so erhält man:

Digitized by Google

(1) $x = 2$, $y = 2$, $z = 3$, $u = 3$, $v = 3$, $w = 4$, $r = 4$, $s = 8$, $t = 22$ u. s. w.

(2) $x = 2$, $y = 2$, $z = 2$, $u = -76$, $v = 105$, $w = 438$, $r = 453$, $s = 1080$ u. s. w.

Daher ist nach:

(1): $^{100000}/_{114503} = {}^1/_2 + {}^1/_2 A_1 + {}^1/_3 A_2 + {}^1/_3 A_3 + {}^1/_3 A_4 + {}^1/_4 A_5 + {}^1/_4 A_6 + \ldots$

(2): „ $= {}^1/_2 + {}^1/_2 A_1 + {}^1/_2 A_2 - {}^1/_{76} A_3 - {}^1/_{105} A_4 - {}^1/_{438} A_5 - {}^1/_{453} A_6 - \ldots.$

Nach (1) sind die Näherungswerthe: ${}^1/_2$; ${}^3/_4$; ${}^5/_6$; ${}^{31}/_{36}$; ${}^{47}/_{54}$; ${}^{377}/_{432}$; ${}^{503}/_{576}$ u. s. w.

„ (2) „ „ Näherungsw.: ${}^1/_2$; ${}^3/_4$; ${}^7/_8$; ${}^{581}/_{608}$ u. s. w.

8. Die Werthe für x, y, z u. s. w. sind:

entweder (1) $x = 8$, $y = 8$, $z = 17$, $u = 19$, $v = 300$, $w = 1768$, $r = 379248$ u. s. w.

oder (2) $x = 7$, $y = -113$, $z = 4739$. $u = -16772$, $v = 18526$, $w = 20704$, $r = 50600$, $s = 55804$, $t = 130209$, $x_1 = 195313$, $x_2 = 390625$

oder (3) $x = 7$, $y = -100$, $z = -10$, $u = 7$, $v = 25$, $w = 1516$, $r = 1786$, $s = 6250$.

Demnach sind nach

(1) die Näherungswerthe: 3; ${}^{25}/_8$; ${}^{201}/_{64}$; ${}^{1709}/_{544}$; ${}^{64943}/_{20672}$; ${}^{19482901}/_{6201600}$ u. s. w.

(2) „ „ 3; ${}^{22}/_7$; ${}^{355}/_{113}$; ${}^{1682345}/_{535507}$ u. s. w.

(3) „ „ 3; ${}^{22}/_7$; ${}^{2199}/_{700}$; ${}^{21991}/_{7000}$; ${}^{76969}/_{24500}$ u. s. w.

$$^{10000000000}/_{31415926536} = \frac{1}{x} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{xyz} + \frac{1}{xyzu} + \frac{1}{xyzuv} + \ldots.$$

Nun ist (1) $x = 4$, $y = 4$, $z = 11$, $u = 50$, $v = 8$, $w = 63$, $r = 139$ u. s. w.

(2) $x = 3$, $y = -22$, $z = -118$, $u = -384$

(3) $x = 3$, $y = -25$, $z = 8$, $u = 70$, $v = -66$, $w = 222$ u. s. w.

Näherungswerthe aus (1) ${}^1/_4$; ${}^5/_{16}$; ${}^7/_{22}$; ${}^{2801}/_{8800}$; ${}^{20409}/_{70400}$ u. s. w.

„ „ (2) ${}^1/_3$; ${}^7/_{22}$; ${}^{2479}/_{7788}$; ${}^{951935}/_{2990592}$ u. s. w.

„ „ (3) ${}^1/_3$; ${}^8/_{25}$; ${}^{191}/_{600}$; ${}^{13369}/_{42000}$ u. s. w.

9. Es sind 5 Stunden 48 Minuten 47,4 Sekunden $= 0{,}24222$ Jahr. Nun ist:

$$^{24222}/_{100000} = \frac{1}{x} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{xyz} + \frac{1}{xyzu} + \ldots.$$

$$24222x - 100000 = \frac{100000}{y} + \ldots. \text{ für } x = 5$$

Digitized by Google

$$2111y - 10000 = \frac{10000}{z} + \ldots. \text{ für } y = 5$$

$$555z - 10000 = \frac{10000}{u} + \ldots. \text{ für } z = 18$$

$$-10u = 10000 \ldots\ldots\ldots \text{ also } u = -1000.$$

Daher sind die Näherungswerthe: $^1/_5$; $^6/_{25}$; $^{109}/_{450}$ u. s. w.

Oder: $^{24222}/_{100000} = \frac{1}{x} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{xyz} + \frac{1}{xyzu} + \ldots.$

$$24222x - 100000 = \frac{100000}{y} + \ldots \text{ für } x = 4$$

$$-3112y - 100000 = \frac{100000}{z} + \ldots. \text{ für } y = -25$$

$$-222z - 1000 = \frac{1000}{u} + \ldots \text{ für } z = -4$$

$$12v - 100 = \frac{100}{w} + \ldots. \text{ für } v = 8$$

$$-4w = 100 \ldots\ldots\ldots \text{ also } w = -25.$$

In diesem Falle sind die Näherungswerthe: $^1/_4$; $^6/_{25}$; $^{97}/_{400}$; $^{969}/_{4000}$; $^{7751}/_{32000}$.

10. Soll umgekehrt eine Theilbruchreihe in einen gewöhnlichen Bruch verwandelt werden, so bringe man sämmtliche Glieder der Reihe auf den gleichen Nenner und addire sie dann; daher ist:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{abc} + \frac{1}{abcd} + \frac{1}{abcde} = \frac{bcde + cde + de + e + 1}{abcde}.$$

11. α) Das Verfahren bei der Summirung periodischer Theilbruchreihen ist analog dem Verfahren bei der Summirung der Kettenreihen im §. 416. II. Theil.

$$^1/_3 + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{3.5.3} + \frac{1}{3.5.3.5} + \frac{1}{3.5.3.5.3} + \frac{1}{3.5.3.5.3.5} + \text{ɔc.} =$$

$$^1/_3 + \frac{1}{(3.5)} + \frac{1}{3.(3.5)} + \frac{1}{(3.5)^2} + \frac{1}{3.(3.5)^2} + \frac{1}{(3.5)^3} + \frac{1}{3.(3.5)^3} +$$

$$\frac{1}{(3.5)^4} + \ldots =$$

$$\left(^1/_3 + \frac{1}{3.5}\right)\left(1 + \frac{1}{(3.5)^1} + \frac{1}{(3.5)^2} + \frac{1}{(3.5)^3} + \frac{1}{(3.5)^4} + \frac{1}{(3.5)^5} + \ldots\right)$$

Diese Reihe ist eine unendlich abnehmende geometrische Reihe, in welcher das erste Glied $a = 1$, der Exponent

Digitized by Google

$e = \frac{1}{3.5}$ und $n = \infty$; daher ist nach §. 413 die Summe $s = \frac{a}{1-e} = \frac{1}{1-\frac{1}{3.5}} = \frac{15}{15-1} = {}^{15}/_{14}$; folglich ist die gegebene Theilbruchreihe $= \left({}^{1}/_{3} + \frac{1}{3.5}\right) . {}^{15}/_{14} = {}^{6}/_{15} . {}^{15}/_{14} = {}^{3}/_{7}$.

11. $\beta)$ ${}^{1}/_{3} + \frac{1}{3.7} + \frac{1}{3.7.11} + \frac{1}{3^2.7.11} + \frac{1}{3^2.7^2.11} + \frac{1}{(3.7.11)^2} + \frac{1}{3.(3.7.11)^2} + \frac{1}{3.7.(3.7.11)^2} + \frac{1}{(3.7.11)^3} + \ldots$.

oder (1) $\left({}^{1}/_{3} + \frac{1}{3.7} + \frac{1}{3.7.11}\right)\left[1 + \frac{1}{(3.7.11)} + \frac{1}{(3.7.11)^2} + \frac{1}{(3.7.11)^3} + \frac{1}{(3.7.11)^4} + \ldots\right]$

oder (2) ${}^{1}/_{3} + \frac{1}{3.7} + \frac{1}{3.7.11}\left(1 + {}^{1}/_{3} + \frac{1}{3.7} + \frac{1}{3.7.11} + \frac{1}{3^2.7.11} + \frac{1}{3^2.7^2.11} + \frac{1}{(3.7.11)^2} + \ldots\right)$.

Statt die unendliche Reihe in (1) nach §. 413 zu summiren, kann man dieselbe auch, nachdem man ihr zuvor die Form unter (2) gegeben, gleich x setzen; in diesem Falle erhalten wir:

${}^{1}/_{3} + \frac{1}{3.7} + \frac{1}{3.7.11}(1+x) = x$ oder $89 = 230x$; also $x = {}^{89}/_{230}$.

11. $\gamma)$ ${}^{1}/_{5} + \frac{1}{5.9} + \frac{1}{5.9.12} + \frac{1}{5.9.12.17} + \frac{1}{5^2.9.12.17} + \frac{1}{5^2.9^2.12.17} + \frac{1}{5^2.9^2.12^2.17} + \frac{1}{(5.9.12.17)^2} + \ldots$

$= \left({}^{1}/_{5} + \frac{1}{5.9} + \frac{1}{5.9.12} + \frac{1}{5.9.12.17}\right)\left[1 + \frac{1}{(5.9.12.17)} + \frac{1}{(5.9.12.17)^2} + \frac{1}{(5.9.12.17)^3} + \ldots\right] = \left({}^{1}/_{5} + \frac{1}{5.9} + \frac{1}{5.9.12} + \frac{1}{5.9.12.17}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{5.9.12.17}}\right) = \frac{9.12.17. + 12.17 + 17 + 1}{5.9.12.17} \times \frac{5.9.12.17}{5.9.12.17 - 1}$

$= \frac{9.12.17 + 12.17 + 17 + 1}{5.9.12.17 - 1} = {}^{2058}/_{9179}$.

Digitized by Google

11. δ) $\frac{1}{a}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{a^2b}+\frac{1}{(ab)^2}+\frac{1}{a(ab)^2}+\frac{1}{(ab)^3}+\ldots=$

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{ab}\right)\left(1+\frac{1}{ab}+\frac{1}{(ab)^2}+\frac{1}{(ab)^3}+\frac{1}{(ab)^4}+\ldots\right)=$$

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{ab}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{ab}}\right)=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{ab}\right)\cdot\left(\frac{ab}{ab-1}\right)=\frac{b+1}{ab}\times\frac{ab}{ab-1}=\frac{b+1}{ab-1}.$$

11. ε) In der hier gegebenen periodischen Theilbruchreihe ist die Periode der Nenner a, b, c, d, e; daher ist sie gleich:

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{abc}+\frac{1}{abcd}+\frac{1}{abcde}\right)\left(1+\frac{1}{(abcde)}+\frac{1}{(abcde)^2}+\right.$$

$$\left.\frac{1}{(abcde)^3}+\ldots\right)=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{abc}+\frac{1}{abcd}+\frac{1}{abcde}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{abcde}}\right)$$

$$=\frac{bcde+cde+de+e+1}{abcde}\times\frac{abcde}{abcde-1}=\frac{bcde+cde+de+e+1}{abcde-1}.$$

11. ζ) Hier beginnt die Periode erst mit dem dritten Gliede; die Summe der beiden ersten ist $\frac{1}{a}+\frac{1}{ab}=\frac{b+1}{ab}$. Nun ist die periodische Theilbruchreihe =

$$\frac{1}{abm}+\frac{1}{abmn}+\frac{1}{abmnp}+\frac{1}{abm^2np}+\frac{1}{abm^2n^2p}+\frac{1}{ab(mnp)^2}+\ldots\ldots \text{ oder}$$

$$\frac{1}{ab}\times\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{mn}+\frac{1}{mnp}+\frac{1}{m^2np}+\frac{1}{m^2n^2p}+\frac{1}{(mnp)^2}+\ldots\right)$$

Das erste Glied dieser Reihe ist $\frac{1}{m}+\frac{1}{mn}+\frac{1}{mnp}$, der Exponent $e=\frac{1}{mnp}$, $n=\infty$; also ist ihre Summe:

$$s=\frac{\frac{1}{m}+\frac{1}{mn}+\frac{1}{mnp}}{1-\frac{1}{mnp}}=\frac{np+p+1}{mnp-1}.$$

Daher ist die Summe der gegebenen Theilbruchreihe gleich:

$$\frac{b+1}{ab}+\frac{1}{ab}\cdot\frac{np+p+1}{mnp-1}=\frac{(b+1)(mnp-1)+np+p+1}{ab(mnp-1)}.$$

Digitized by Google

Anwendung der Kettenbrüche zur Auflösung der unbestimmten Gleichungen und der Congruenzen, zur Auffindung der Quadrat-Cubikwurzeln und Logarithmen. Berechnung der Quadrat-Cubikwurzeln u. s. w. und der Logarithmen durch Theilbruchreihen.

(Heis Sammlung §. 87.)

§. 439. 1. α) Man verwandle den Bruch $\frac{a}{b}$ in einen Kettenbruch und es seien die beiden letzten Näherungswerthe $\frac{p}{q}$ und $\frac{a}{b}$, so ist nach §. 213:

$$aq - bp = \pm 1$$

je nachdem der Bruch $\frac{a}{b}$ ein Näherungswerth von ungerader oder gerader Ordnung ist. Im ersten Falle ist $x = q$ und $y = p$; im anderen Falle ist $x = -q$ und $y = -p$.

β) Wäre aber die Gleichung $ax + by = 1$ gegeben, so ist $x = q$ und $y = -p$ oder $x = -q$ und $y = p$.

Hiemit ist eine Wurzel der Gl. gefunden; die andern sind, je nachdem die Ordnung des Näherungswerthes $\frac{a}{b}$ dies verlangt, in den beiden Formeln:

$$\left.\begin{matrix} x = q + bn \\ y = p + an \end{matrix}\right\} \text{ oder } \left\{\begin{matrix} x = -q + bn \\ y = -p + an \end{matrix}\right.$$

enthalten, wo n eine völlig willkürliche ganze Zahl bezeichnet; denn es ist immer:

$$a(\pm q + bn) - b(\pm p + an) = 1$$

wenn $\pm aq \mp bp = 1$ ist.

Für die unter β) gegebene Gl. wären sonach die übrigen Wurzeln:

$$\left.\begin{matrix} x = q - bn \\ y = -p + an \end{matrix}\right\} \text{ oder } \left\{\begin{matrix} x = -q + bn \\ y = p - an. \end{matrix}\right.$$

2. Nach den in dem vorhergehenden Beisp. für x und y gefundenen Werthen wird es nicht schwer halten, dieselben auch für die hier gegebene Gl. zu finden. Denn ist:

$$(1)\quad ax \mp by = 1,$$

so ist auch: $(2)\quad c(ax \mp by) = c$

Aus (1) erhalten wir:

Digitized by Google

$$aq \mp bp = 1,$$

daher aus (2) $a(cq) \mp b(cp) = c$;
daher sind die Wurzeln dieser Gl., wenn das obere Zeichen — gilt:

$$\left.\begin{matrix} x = cq + bn \\ y = cp + an \end{matrix}\right\} \text{ oder } \left\{\begin{matrix} x = -cq + bn \\ y = -cp + an \end{matrix}\right.$$

und wenn das untere Zeichen + gilt, so ist:

$$\left.\begin{matrix} x = cq - bn \\ y = -cp + an \end{matrix}\right\} \text{ oder } \left\{\begin{matrix} x = -cq + bn \\ y = cp - an, \end{matrix}\right.$$

je nachdem der Näherungswerth von ungerader oder gerader Ordnung ist. Alle Gleichungen von der Form $ax - by = c$ lassen eine unendliche Anzahl von Auflösungen zu; dagegen die von der Form $ax + by = c$ nur eine beschränkte Anzahl und manchmal sogar keine.

3. Verwandele $^7/_{11}$ in einen Kettenbruch, so ist:

$$^7/_{11} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{3}}}}$$

; daher die Näherungswerthe: $^1/_1$; $^1/_2$; $^2/_3$; $^7/_{11}$; es ist also hier $p = 2$, $q = 3$ und da $^7/_{11}$ von gerader Ordnung ist, so muß $7.3 - 11.2 = -1$ sein, daher $x = -3 + 11m$ und $y = -2 + 7m$, oder wenn wir $m = n + 1$ setzen: $x = 11(n+1) - 3 = 11n + 8$
$y = 7(n+1) - 2 = 7n + 5$.

Für $n = 0$ ist $x = 8$, $y = 5$; für $n = 1$ ist $x = 19$ und $y = 12$ u. s. w.

Die für x und y gefundenen Formeln lassen also eine unendliche Anzahl von Auflösungen zu, da n alle Werthe von 0 bis ∞ annehmen kann.

3. β) Verwandle $^{34}/_{21}$ in einen Kettenbruch, so ist:

$$^{34}/_{21} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}}}}$$

Die Näherungswerthe sind: $^1/_1$; $^2/_1$; $^3/_2$; $^5/_3$; $^8/_5$; $^{13}/_8$; $^{21}/_{13}$; $^{34}/_{21}$; demnach ist $p = 21$, $q = 13$ und es ist:

$$34.13 - 21.21 = 1.$$

Hieraus folgt: $x = 13$, $y = 21$ und die anderen Werthe für x und y sind enthalten in den Formeln $x = 13 + 21n$ und $y = 21 + 34n$.

Digitized by Google

3. $\gamma)\ {}^{34}/_{41} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\frac{1}{6}}}}$ Näherungswerthe: $^1/_1$; $^4/_5$; $^5/_6$; $^{34}/_{41}$; daher ist:
$34 \cdot 6 - 41 \cdot 5 = -1$;
folglich:

$$\left.\begin{aligned} x &= -6+4m = 34(n+1)-6 = 41n+35 \\ y &= -5+34m = 34(n+1)-5 = 34n+29 \end{aligned}\right\} \text{wenn } m = n+1.$$

3. $\delta)\ {}^{117}/_{121} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{29+\frac{1}{4}}}$ Näherungswerthe: $^1/_1$; $^{29}/_{30}$; $^{117}/_{121}$; daher $p = 29$, $q = 30$; folglich:
$117 \cdot 30 - 121 \cdot 29 = 1$;

daher $x = 30 - 121n$ und $y = -29 + 117n$.

Aus den beiden Werthen für x und y ergibt sich, daß n nur den einzig möglichen Werth 0 haben kann, wonach $x = 30$ und $y = -29$ ist. Es gibt sonach keine ganzen positiven Werthe für x und y, einer derselben wird also immer negativ sein.

3. $\varepsilon)\ {}^{41}/_{29} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\frac{1}{2}}}}}$ Näherungswerthe: $^1/_1$; $^2/_2$; $^7/_5$; $^{17}/_{12}$; $^{41}/_{29}$; daher $p = 17$; $q = 12$; also:
$41 \cdot 12 - 29 \cdot 17 = -1$,

mithin $x = -12 + 29n$ und $y = 17 - 41n$.

3. $\zeta)\ {}^{99}/_{70} = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\frac{1}{2}}}}}$ Näherungswerthe: $^1/_1$; $^2/_2$; $^7/_5$; $^{17}/_{12}$; $^{41}/_{29}$; $^{99}/_{70}$; also $p = 41$ und $q = 29$; daher
$99 \cdot 29 - 70 \cdot 41 = 1$.

Multipliciren wir diese Gl. mit 13, so hat man:

$$99 \cdot (13 \cdot 29) - 70 \cdot (13 \cdot 41) = 13;$$

daher $\left.\begin{aligned} x &= 13 \cdot 29 + 70m \\ y &= 13 \cdot 41 + 99m \end{aligned}\right\}$ oder $m = n - 5$ gesetzt, gibt:

$$x = 27 + 70n,\quad y = 38 + 99n.$$

2. Aufl. Setze $x = x_1 - 2$ und $y = y_1 - 3$; dann verwandelt sich die gegebene Gl. in folgende:

$99(x_1 - 2) - 70(y_1 - 3) = 13$; daher
$99x_1 - 70y_1 = 1$. Nun ist auch
$99 \cdot 29 - 70 \cdot 41 = 1$; also

Digitized by Google

$x_1 = 29$ und $y_1 = 41$; daher $x = 29 - 2 = 27$ und $y = 41 - 3 = 38$; also allgemein: $x = 27 + 70n$ und $y = 38 + 99n$.

3. η) $^{17}/_{19} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{2}}}$ Näherungswerthe: $^1/_1$; $^8/_9$; $^{17}/_{19}$; also $p = 8$, $q = 9$; daher:

$17.9 - 19.8 = 1$; also

$17.(23.9) - 19.(23.8) = 23$;

daher $\left.\begin{aligned} x &= 23.9 + 19m = 17 + 19n \\ y &= 23.9 + 17m = 14 + 17n \end{aligned}\right\}$ für $m = n - 10$ gesetzt.

2. Aufl. Setze $x = x_1 + 8$ und $y = y_1 + 6$ in die gegebene Gl., so hat man:

$$17(x_1 + 8) - 19(y_1 + 6) = 23; \text{ oder}$$
$$17x_1 - 19y_1 = 1. \text{ Nun ist auch}$$
$$17.9 - 19.8 = 1,$$

folglich $x_1 = 9$, $y_1 = 8$; also $x = 8 + 9 = 17$ und $y = 8 + 6 = 14$; daher

$$x = 17 + 19n \text{ und } y = 14 + 17n.$$

3. ϑ) $^{19}/_{11} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}$ Näherungswerthe: $^1/_1$; $^2/_1$; $^5/_3$; $^7/_4$; $^{19}/_{11}$; also $p = 7$, $q = 4$; daher:

$19.4 - 11.7 = -1$.

Multiplicire diese Gl. mit (-112), so wird:

$$19.(4.(-112)) - 11.(7.(-112)) = 112, \text{ daher}$$

$\left.\begin{aligned} x &= -4.112 + 11m = 14 + 11n \\ y &= -7.112 + 19m = 14 + 19n \end{aligned}\right\}$ für $m = n + 42$ gesetzt.

2. Aufl. Setze $x = x_1 + 7$ und $y = y_1 + 2$, so ist:

$$19.(x_1 + 7) - 11(y_1 + 2) = 112 \text{ oder}$$
$$19x_1 - 11y_1 = 1; \text{ nun ist auch}$$

$19.4 - 11.7 = -1$; diese Gl. mit (-1) multiplicirt, gibt:

$$19.(-4) - 11.(-7) = 1; \text{ folglich}$$

$x_1 = -4$, $y_1 = -7$; daher $x = -4 + 7 = 3$, $y = -7 + 2 = -5$; also allgemein $x = 3 + 11m$, $y = -5 + 19m$ oder $m = n + 1$ gesetzt, gibt:

$$x = 14 + 11n, \; y = 14 + 19n.$$

Digitized by Google

3. $\iota)$ $^{222}/_{383} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\frac{1}{2}}}}}}}}}$

Näherungswerthe: $^1/_1$; $^1/_2$; $^3/_5$; $^4/_7$; $^7/_{12}$; $^{11}/_{19}$; $^{40}/_{69}$; $^{91}/_{157}$;
also $p = 91$, $q = 157$; daher ist:

$$222.157 - 383.91 = 1.$$

Multipliciren wir diese Gl. mit 6533, so wird:

$$222.(157.6533) - 383.(91.6533) = 6533; \text{ daher}$$

$$x = 157.6533 + 383m = 1025681 + 383m$$

$$y = 91.6533 + 222m = 594503 + 222m$$

Setze hierin $m = n - 2677$, so wird:

$$x = 1025681 - 1025291 + 383n = 390 + 383n$$

$$y = 594503 - 594294 + 222n = 209 + 222n.$$

2. Aufl. $222x = 6660 + 444y - 61y - 127$

$$x = 30 + 2y - \frac{61y + 127}{222};$$

$$61y = 222p - 127 \text{ oder}$$

$$61y = 244p - 183 - 22p + 56$$

$$y = 4p - 3 - \frac{2(11p - 28)}{61};$$

$$11p = 61q + 28;$$

$$p = 5q + 2 + \frac{6(q+1)}{11}$$

$q = 11m - 1$ oder $m = n + 1$ gesetzt, gibt:

$q = 10 + 11n$; $p = 58 + 61n$; daher:

$y = 209 + 222n$, $x = 390 + 383n$.

3. Aufl. $222x \equiv 6533$ (Mod. 383)

$6.37x \equiv 6150$ (Mod. 383)

$37x \equiv 1025$ (Mod. 383)

$37x \equiv 1025 - 2.383$ (Mod. 383)

$x \equiv 7$ (Mod. 383)

$x \equiv 390$ (Mod. 383)

$383y \equiv -6533$ (Mod. 222)

$222y \equiv 0$ (Mod. 222)

$161y \equiv -6533$ (Mod. 222)

Digitized by Google

$$7.23y \equiv -6755 \text{ (Mod. 222)}$$
$$23y \equiv -965 + 3.222 \text{ (Mod. 222)}$$
$$y \equiv -13 \text{ (Mod. 222)}$$
$$y \equiv 209 \text{ (Mod. 222)}$$

4. Soll die Congruenz

$$ax \equiv b \text{ (Mod. m)}$$

für x in ganzen Zahlen aufgelöst werden, so hat man zunächst darauf zu achten, ob b positiv oder negativ, ob es größer oder kleiner als der Modulus m ist. Ist es negativ, so verwandle man nach §. 413 die Congruenz in eine solche, daß das zweite Glied positiv und kleiner als m wird. Wir betrachten demnach obige Congruenz als eine solche, worin b positiv und kleiner als m ist. Um dieselbe unter Anwendung der Kettenbrüche auflösen zu können, multiplicire man nach §. 408 die beiden Congruenzzahlen a und b mit mit k, so daß

$$akx \equiv bk \text{ (Mod. m)}$$

wird. Nun subtrahire man nach §. 413. II von der linken Seite der Congruenz ein Vielfaches des Modulus, nämlich k'mx, so erhalten wir:

$$(ak - mk')x \equiv bk \text{ (Mod. m)}.$$

Da k und k' jeden beliebigen Werth annehmen können, so kann man ihnen solche Werthe beilegen, daß der Coefficient von x

$$ak - mk' = 1$$

wird. Alsdann ist
$x \equiv bk$ (Mod. m); daher $x = bk + mn$, wo für n von 0 an jede beliebige Zahl gesetzt werden kann.

Um nun k und k' zu bestimmen, verwandle man $\frac{a}{m}$ in einen Kettenbruch und suche daraus die Näherungswerthe. Ist der letzte Näherungsw. $\frac{p}{q}$, so findet die Relation statt:

$$aq - mp = \pm 1$$

Vergleicht man diese Gl. mit der Bestimmungsgleichung

$$ak - mk' = 1,$$

so ergibt sich, daß

$$k = \pm q \text{ und } k' = \pm p$$

ist, so daß

$x \equiv \pm bq$ (Mod. m) und $x = \pm bq + mn$ wird.

1. Beisp. Gegeben sei die unbestimmte Gleichung

$$7x - 11y = 1,$$

woraus wir die beiden Congruenzen

(1) $7x \equiv 1$ (Mod. 11) und (2) $11y \equiv -1$ (Mod. 7)

Digitized by Google

erhalten. Multiplicire in (1) die beiden Congruenzzahlen mit k, so wird:

$$(3)\ 7kx \equiv 1.k \pmod{11}.$$

Subtrahire $11k'x$ von der linken Seite der Congruenz, so wird:

$$(7k-11k')x \equiv 1.k \pmod{11}.$$

Nun setze: $7k-11k' = 1$

und verwandle den Bruch $^7/_{11}$ in einen Kettenbruch, dessen Näherungswerthe sind: $^1/_1$, $^1/_2$, $^2/_3$, $^7/_{11}$; daher ist, da $^7/_{11}$ von gerader Ordnung ist, $p=-2$, $q=k=-3$; folglich ist:

$$x \equiv 1.(-3) \pmod{11} \text{ oder}$$
$$x \equiv -3+11 \pmod{11}; \text{ also}$$
$$x \equiv 8 \pmod{11}; \text{ daher } x = 8+11n.$$
$$(2)\ 11y \equiv -1 \pmod{7}$$
$$11y \equiv 6 \pmod{7}$$
$$(11k-7k')y \equiv 6.k \pmod{7}$$

Die Näherungswerthe des Bruches $^{11}/_7$ sind: $^1/_1$; $^2/_1$; $^3/_2$; $^{11}/_7$; also $p=3$, $q=k=2$; folglich:

$$y \equiv 6.2 \equiv 12 \pmod{7} \text{ oder}$$
$$y \equiv 5 \pmod{7}; \text{ also } y = 5+7n.$$

2. Beisp. Es sei die unbestimmte Gl. $17x-19y=23$ aufzulösen, so ist zunächst:

$$17x \equiv 23 \pmod{19} \text{ oder}$$
$$17x \equiv 4 \pmod{19}.$$

Die Näherungswerthe des Bruches $^{17}/_{19}$ sind: $^1/_1$; $^8/_9$; $^{17}/_{19}$; daher $k=q=9$; folglich:

$$x \equiv 4.9 \equiv 36 \pmod{19}$$
$$x \equiv 36-19 \equiv 17 \pmod{19}; \text{ also } x = 17+19n$$
$$19y \equiv -23 \pmod{17}$$
$$19y \equiv -6 \pmod{17}.$$

Die Näherungswerthe des Bruches $^{19}/_{17}$ sind: $^1/_1$; $^9/_8$; $^{19}/_{17}$; also $k=q=-8$; daher:

$$y \equiv (-6).(-8) \pmod{17}$$
$$y \equiv 48-2.17 \pmod{17}$$
$$y \equiv 14 \pmod{17}; \text{ also } y = 14+17n.$$

3. Beisp. $222x-383y=6533.$

Hieraus erhalten wir zunächst:

$$222x \equiv 6533 \pmod{383}$$
$$222x \equiv 6533-17.383 \equiv 22 \pmod{383}$$
$$111x \equiv 11 \pmod{383}$$

Die Näherungswerthe des Bruches $^{111}/_{383}$ sind: $^1/_3$; $^2/_7$; $^9/_{31}$; $^{11}/_{38}$; $^{20}/_{69}$; also $k=q=-69$; daher:

$$x \equiv 11.(-69) \equiv -759 \pmod{383} \text{ oder}$$
$$x \equiv -759+2.383 \equiv 7 \pmod{383} \text{ oder}$$
$$x \equiv 7+383 \equiv 390 \pmod{383}; \text{ also } x = 390+383n.$$

Digitized by Google

Ferner ist: $383y \equiv -6533 \pmod{222}$

$383y \equiv -6533 + 30.222 \pmod{222}$

$383y \equiv 127 \pmod{222}$.

Die Näherungswerthe des Bruches $^{383}/_{222}$ sind: $^{1}/_{1}$; $^{2}/_{1}$; $^{5}/_{3}$; $^{7}/_{4}$; $^{12}/_{7}$; $^{19}/_{11}$; $^{69}/_{40}$; $^{157}/_{91}$; also $k = q = -91$; daher ist:

$y \equiv 127.(-91) \pmod{222}$

$y \equiv -11557 + 52.222 \pmod{222}$

$y \equiv -13 \pmod{222}$

$y \equiv -13 + 222 \equiv 209 \pmod{222}$; also $y = 209 + 222n$.

Extraktion der Quadratwurzel aus irrationalen Zahlen.

§. 440. Wir haben bereits in den §§. 313 und 314 das Verfahren kennen gelernt, wie vermittelst der Kettenbrüche aus einer Irrationalzahl die Quadratwurzel gezogen wird. Ehe wir uns aber mit der Anwendung der Kettenbrüche auf die Größen von der Form $\frac{\sqrt{A}+B}{C}$, wobei A, B, C ganze Zahlen sind, beschäftigen, wollen wir, um den Gang der Operation besser einzusehen, nochmals das hierbei zu beobachtende Verfahren an einem besonderen Beispiele zeigen.

Es sei $A = 47$; alsdann ist, wenn wir $\sqrt{47}$ mit x bezeichnen, $x = \sqrt{47}$. Die größte in 47 enthaltene Wurzel ist 6 nebst einem Bruche, der mit $\frac{1}{x_1}$ bezeichnet werden soll, sodaß also

$$x = \sqrt{47} = 6 + \frac{1}{x_1}; \text{ daher}$$

$$\frac{1}{x_1} = \frac{\sqrt{47}-6}{1}; \text{ also } x_1 = \frac{1}{\sqrt{47}-6}.$$

Um den Nenner dieses Bruches rational zu machen, multiplicire man ihn im Zähler und Nenner mit $\sqrt{47}+6$; alsdann ist:

$$x_1 = \frac{\sqrt{47}+6}{11}.$$

Die größte in diesem Ausdrucke enthaltene Zahl ist 1; daher ist:

$$x_1 = 1 + \frac{\sqrt{47}-5}{11}.$$

Nun sei $\frac{\sqrt{47}-5}{11} = \frac{1}{x_2}$; dann ist $x_2 = \frac{11}{\sqrt{47}-5}$. Machen wir diesen Bruch im Nenner rational, so erhalten wir:

$$x_2 = \frac{11(\sqrt{47}+5)}{22} = \frac{\sqrt{47}+5}{2}.$$

Digitized by Google

Die größte in $\frac{\sqrt{47}+5}{2}$ enthaltene ganze Zahl ist 5; daher ist:

$$x_2 = 5 + \frac{\sqrt{47}-5}{2}.$$

Setzen wir $\frac{\sqrt{47}-5}{2} = \frac{1}{x_3}$; so ist $x_3 = \frac{2}{\sqrt{47}-5}$ oder

$$x_3 = \frac{2(\sqrt{47}+5)}{22} = \frac{\sqrt{47}+5}{11}.$$

Die größte in $\frac{\sqrt{47}+5}{11}$ enthaltene ganze Zahl ist 1; dann ist:

$$x_3 = 1 + \frac{\sqrt{47}-6}{11}.$$

Nun sei $\frac{\sqrt{47}-6}{11} = \frac{1}{x_4}$; so ist $x_4 = \frac{11}{\sqrt{47}-6}$ oder

$$x_4 = \frac{11(\sqrt{47}+6)}{11} = \frac{\sqrt{47}+6}{1}.$$

Die größte in $\frac{\sqrt{47}+6}{1}$ enthaltene ganze Zahl ist 12; daher ist:

$$x_4 = 12 + \frac{\sqrt{47}-6}{1}.$$

Setzen wir $\frac{\sqrt{47}-6}{1} = \frac{1}{x_5}$; so ist $x_5 = \frac{1}{\sqrt{47}-6}$.

Denselben Werth für x_5 haben wir oben für x_1 gefunden, so daß also $x_5 = x_1$ ist. Hieraus folgt, daß bei weiterer Operation dieselben Quotienten 1, 5, 1, 12 in derselben Ordnung periodisch wiederkehren und sich bis ins Unendliche wiederholen müssen. Mithin gibt die Entwickelung von $\sqrt{47}$ in einen Kettenbruch die Quotienten:

6 : 1, 5, 1, 12; 1, 5, 1, 12; 1, 5, 1, 12 u. s. w.

Der aus diesen Quotienten gebildete Kettenbruch ist daher ein periodischer; folglich:

$$\sqrt{47} = 6 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{12} + \ldots}}}}}}}$$

Digitized by Google

Die Näherungswerthe für $\sqrt{47}$ sind daher; 6; 7; $6^5/_6$; $6^6/_7$; $6^{77}/_{90}$; $6^{83}/_{97}$; $6^{492}/_{575} = 6{,}85565 \ldots$ und weil $\sqrt{47} = 6{,}8556546 \ldots$, so ist der siebente Näherungswerth in den 5 ersten Stellen ganz genau.

§. 441. A sei eine beliebige ganze Zahl, a^2 das größte in A enthaltene Quadrat und b der Rest, so daß $A = a^2 + b$. Verwandeln wir nun $\sqrt{A}$ in einen Kettenbruch, so hat man zunächst:

$$x = \sqrt{A} = a + \left(\frac{\sqrt{A} - a}{1} = \frac{1}{x_1}\right); \text{ also}$$

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{A} - a} = \frac{\sqrt{A} + a}{b}.$$

Nun sei die größte in $\frac{\sqrt{A} + a}{b}$ enthaltene ganze Zahl $= \alpha$ so ist:

$$x_1 = \alpha + \left(\frac{\sqrt{A} + a - \alpha b}{b} = \frac{1}{x_2}\right); \text{ alsdann ist:}$$

$x_2 = \frac{b}{\sqrt{A} + a - \alpha b}$. Setze hierin $a - \alpha b = -c$, so wird:

$$x_2 = \frac{b}{\sqrt{A} - c} = \frac{b(\sqrt{A} + c)}{A - c^2} = \frac{b(\sqrt{A} + c)}{A - (a - \alpha b)^2}$$

$$= \frac{b(\sqrt{A} + c)}{A - a^2 + 2a\alpha b - \alpha^2 b^2} = \frac{b(\sqrt{A} + c)}{b + 2a\alpha b - \alpha^2 b^2},$$

weil $A - a^2 = b$; daher ist auch, wenn wir im Zähler und Nenner durch b theilen:

$$x_2 = \frac{\sqrt{A} + c}{1 + 2a\alpha - \alpha^2 b}.$$

Setzen wir hierin $1 + 2\alpha a - \alpha^2 b = d$, so wird:

$$x_2 = \frac{\sqrt{A} + c}{d} \text{ u. s. w.}$$

Nehmen wir nun an, daß, wenn diese Operation bis ins Unendliche fortgesetzt wird, man zu dem vollständigen Quotienten x_n oder $y = \frac{\sqrt{A} + M}{N}$ gelange, und es sei μ die in y enthaltene größte ganze Zahl, so ist der Rest $\frac{\sqrt{A} + M - \mu N}{N}$. Nennt man diesen Rest $\frac{1}{y_1}$, so hat man:

$$y_1 = \frac{N}{\sqrt{A} + M - \mu N}.$$

Digitized by Google

Vergleicht man diesen Rest der Analogie wegen mit der allgemeinen Form

$$y_1 = \frac{\sqrt{A} + M_1}{N_1},$$

so haben wir zur Bestimmung von M_1 und N_1 die Gleichung:

$$\frac{N}{\sqrt{A} + M - \mu N} = \frac{\sqrt{A} + M_1}{N_1} \text{ oder}$$

$$NN_1 = A + MM_1 - \mu M_1 N + (M + M_1 - \mu N)\sqrt{A}.$$

Setzt man in dieser Gl. die rationalen Theile den rationalen und die irrationalen den irrationalen gleich, um M_1 und N_1 zu bestimmen, so hat man:

$$(M + M_1 - \mu N)\sqrt{A} = 0; \text{ also}$$
$$M + M_1 - \mu N = 0; \text{ daher}$$
$$(1)\ M_1 = \mu N - M.$$

Ferner ist: $NN_1 = A + MM_1 - \mu M_1 N$; also

$$(2)\ N_1 = \frac{A - (\mu N - M)M_1}{N}.$$

Setzen wir hierin den unter (1) gefundenen Werth für $\mu N - M = M_1$, so wird:

$$N_1 = \frac{A - M_1 M_1}{N}.$$

§. 442. Es muß jetzt nachgewiesen werden, daß M und M_1 sowie N und N_1 ganze positive Zahlen seien. Angenommen $\frac{\alpha}{\beta}$ und $\frac{\gamma}{\delta}$ seien zwei aufeinander folgende gegen $\sqrt{A}$ convergirende Brüche; ferner sei $\frac{\sqrt{A} + M}{N}$ der vollständige Quotient, welcher dem Bruche $\frac{\gamma}{\delta}$ entspricht; alsdann ist nach §. 210:

$$\sqrt{A} = \frac{\gamma\left(\frac{\sqrt{A} + M}{N}\right) + \alpha}{\delta\left(\frac{\sqrt{A} + M}{N}\right) + \beta} = \frac{\gamma\sqrt{A} + \gamma M + \alpha N}{\delta\sqrt{A} + \delta M + \beta N}.$$

Hieraus erhält man die Gleichung:

$$\delta A + \delta M\sqrt{A} + \beta N\sqrt{A} = \gamma\sqrt{A} + \gamma M + \alpha N.$$

Setzt man die rationalen Ausdrücke dieser Gl. den rationalen und die irrationalen den irrationalen gleich, so erhält man:

$$(1)\ \gamma M + \alpha N = \delta A; \text{ also } M = \frac{\delta A - \alpha N}{\gamma}$$

$$(2)\ \delta M + \beta N = \gamma; \text{ also } N = \frac{\gamma - \delta M}{\beta}.$$

Digitized by Google

Setze aus (2) den Werth für N in (1), so wird:

$$\gamma M + \alpha\frac{\gamma - \delta M}{\beta} = \delta A \text{ oder}$$

$$(3)\ (\beta\gamma - \alpha\delta)M = \beta\delta A - \alpha\gamma.$$

Setze aus (1) den Werth für M in (2), so ist:

$$\delta\frac{\delta A - \alpha N}{\gamma} + \beta N = \gamma \text{ oder}$$

$$(4)\ (\beta\gamma - \alpha\delta)N = \gamma\gamma - \delta\delta A.$$

Nach §. 213 ist nun: $\beta\gamma - \alpha\delta = +1$, wenn der Näherungswerth $\frac{\gamma}{\delta} > \sqrt{A}$, und $\beta\gamma - \alpha\delta = -1$, wenn $\frac{\gamma}{\delta} < \sqrt{A}$. In jenem Falle ist auch $\frac{\gamma\gamma}{\delta\delta} > A$, also auch $\gamma\gamma > \delta\delta A$ und daher $\gamma\gamma - \delta\delta A$ eine positive Größe. Ist aber $\frac{\gamma}{\delta} < \sqrt{A}$, so ist auch $\frac{\gamma\gamma}{\delta\delta} < A$, also auch $\gamma\gamma < \delta\delta A$; daher $-(\gamma\gamma - \delta\delta A)$ wieder positiv. Mag also $\beta\gamma - \alpha\delta = +1$ oder $= -1$ sein, so ist N immer eine positive Größe. Auch ergibt sich aus diesen Werthen, daß M und N ganze Zahlen sind. Ueberdies ist auch M immer positiv. Denn einerseits folgt aus der Gl.

$$\delta M + \beta N = \gamma, \text{ daß}$$

$$\frac{\beta}{\delta} = \left(\frac{\gamma}{\delta} - M\right) : N$$

und weil $\beta < \delta$, muß $N > \frac{\gamma}{\delta} - M$ oder $N > \sqrt{A} - M$ sein; andererseits ist $\frac{\sqrt{A} + M}{N} > \mu$, also $N < \sqrt{A} + M$. Nun wären diese beiden Bedingungen unvereinbar, wenn M negativ wäre; mithin sind sowohl N als auch M beide positive Größen.

§. 443. Nach diesen Voraussetzungen kann es nun nicht schwer fallen, die Grenzen zu bestimmen, welche die Größen M und N nicht überschreiten können.

Nach §. 441 ist:

$$A - MM = NN_1.$$

Da nun N und N_1 beide positiv sind, so muß:

$$MM < A \text{ oder } M < \sqrt{A} \text{ sein,}$$

also kann M die in $\sqrt{A}$ enthaltene ganze Zahl a nicht überschreiten, muß vielmehr $=$ oder $<$ a sein. Nach §. 441 ist ferner:

$$M_1 = \mu N - M; \text{ also } M + M_1 = \mu N.$$

Da nun der größte Werth von $M = a$ ist, so ist der größte Werth von $M + M_1 = 2a$. Setzen wir diesen Werth für $M + M_1$

Digitized by Google

in $M + M_1 = \mu N$ ein, so haben wir: $\mu N = 2a$. Ist nun $N = 2a$, so ist $\mu = 1$; ist aber $N = 1$, so ist $\mu = 2a$. Hieraus folgt, daß die Grenze von N und dem Quotienten μ zu gleicher Zeit 2a ist. Weil aber der Kettenbruch, welcher den Werth einer irrationalen Größe ausdrückt, unendlich sein muß und es nur eine bestimmte Anzahl von verschiedenen Werthen sowohl für M als für N geben kann, so muß derselbe Werth für M mit demselben Werth für N unendliche Male wiederkehren. Sobald also für $\frac{\sqrt{A+M}}{N}$ ein schon gefundener Werth wieder erscheint, so ist es klar, daß die folgenden Quotienten der Kettenreihe dieselben sein und in derselben Ordnung wiederkehren müssen, wie diejenigen, die man bereits erhalten hat. Mithin besteht der Kettenbruch für $\sqrt{A}$ wenigstens nach einigen Ausdrücken aus einer konstanten Periode, die sich unendliche Male wiederholt, wie wir es bereits an dem besonderen Beispiele in §. 440 gesehen haben.

§. 444. Um nun den Punkt zu bestimmen, wo die Periode beginnt, bezeichnen wir letztere mit $\mu, \mu_1, \mu_2 \ldots \omega$ und fügen die Quotienten nebst den ihnen entsprechenden Näherungswerthen bis zum Anfange der zweiten Periode hinzu, so erhalten wir:

Quotienten	a	α	β, γ	λ	μ	$\mu_1, \mu_2 \ldots$
Näherungsw.	$\frac{1}{0}$	$\frac{a}{1}$	..	$\frac{k}{l}$	$\frac{m}{n}$	....
Vollst. Quot.	$\frac{\sqrt{A}}{1}$	$\frac{\sqrt{A}+a}{b}$	..	$\frac{\sqrt{A}+M_0}{N_0}$	$\frac{\sqrt{A}+M}{N}$	....

Quotienten	ω	μ	$\mu_1, \mu_2 \ldots$	$\omega \ldots$
Näherungsw.	$\frac{k_1}{l_1}$	$\frac{m_1}{n_1}$	.....	$\frac{m''}{n''} \ldots$
Vollst. Quot.	$\frac{\sqrt{A}+M_0'}{N_0'}$	$\frac{\sqrt{A}+M}{N}$	.....	$\frac{\sqrt{A}+M_0''}{N_0''} \ldots$

Wie bereits in §. 441 gezeigt worden, ist:

$$A - MM = NN_0 \text{ und}$$
$$A - MM = NN_0^1$$

Aus diesen beiden Gl. folgt:

$$NN_0 = NN_0^1 \text{ oder } N_0 = N_0^1$$

Nach demselben §. ist auch:

$$M = \lambda N_0 - M_0 \text{ und}$$
$$M = \omega N_0^1 - M_0^1, \text{ woraus folgt, daß}$$
$$\lambda N_0 - M_0 = \omega N_0^1 - M_0^1; \text{ daher}$$
$$\frac{M_0 - M_0^1}{N_0} = \lambda - \omega.$$

Digitized by Google

Nun ist ferner: $nM + lN = m$; also

$$M = \frac{m}{n} - \frac{lN}{n},$$

und weil $\frac{m}{n}$ ein Näherungswerth für $\sqrt{A}$ ist, so muß

$\frac{m}{n} = a +$ einem Bruche $\frac{r}{n}$ sein, woraus resultirt:

$$a - M = \frac{lN - r}{n}.$$

Weil nun $l < n$, ist auch $a - M < N$. Ebenso ist:
$a - M_0 < N_0$, $a - M_0^1 < N_0^1$, um so mehr also muß
$M_0 - M_0^1 < N_0$ sein.
Aber wir haben oben gefunden, daß
$\frac{M_0 - M_0^1}{N_0} =$ der ganzen Zahl $\lambda - \omega$; folglich muß
$\lambda - \omega = 0$ sein und hieraus ergibt sich $M_0 = M_0^1$ und $\lambda = \omega$.

Auf dieselbe Weise läßt sich zeigen, daß der λ vorhergehende Quotient gleich dem Quotienten ist, welcher ω vorhergeht und so nach der Reihe bis zum Quotienten α, so daß der Quotient α derjenige ist, der zuerst wiederkehrt und die Periode beginnen muß.

§. 445. Verwandelt man einen ächten Bruch in einen Kettenbruch und sucht für eine begränzte Anzahl von Gliedern desselben den Näherungswerth, als $\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+..}}} = \frac{p}{q}$, schreibt alsdann wie gewöhnlich die Quotienten und Näherungswerthe unter einander, also:

Quotienten	α,	β,	γ	$\varkappa$,	λ,	μ
Näherungsw.	$\frac{0}{1}$,	$\frac{1}{\alpha}$,	$\frac{\beta}{\alpha\beta+1}$ . . .	$\frac{h}{g}$,	$\frac{k}{l}$,	$\frac{m}{n}$, $\frac{p}{q}$

so ist nach §. 210: $q = \mu n + l$; folglich $\frac{n}{q} = \frac{1}{\mu} + \frac{l}{n}$

$n = \lambda l + g$; folglich $\frac{l}{n} = \frac{1}{\lambda} + \frac{g}{l}$

$l = \varkappa g + g_0$; folglich $\frac{g}{l} = \frac{1}{\varkappa} + \frac{g_0}{g}$

. . . . . .
. . . . . .

Digitized by Google

Daher ist: $$\frac{n}{q}=\cfrac{1}{\mu+\cfrac{1}{\lambda+\cfrac{1}{\varkappa+\cdot\,\cdot\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\alpha}}}}}$$

Die Verwandlung des Bruches $\frac{n}{q}$ in einen Kettenbruch gibt also die Quotienten μ, λ, $\varkappa \ldots \gamma$, β, α, welche nichts anders sind, als die Quotienten des gegebenen Kettenbruches, aber in umgekehrter Ordnung. Wenn also diese Quotienten eine symmetrische Reihe bilden, nämlich α, β, $\gamma \ldots . \gamma$, β, α, deren äußerste Glieder, sowie zwei gleich weit von diesen entfernten gleich sind, so muß $\frac{n}{q}=\frac{p}{q}$ oder $n=p$ sein. Umgekehrt kann man schließen, daß wenn $n=p$ ist, die Reihe der Quotienten eine symmetrische ist. Siehe §. 447. Nro. 13. ζ.

§. 446. Es bleibt schließlich noch nachzuweisen, daß die Quotienten eine symmetrische Reihe von der Form α, β, $\gamma \ldots \gamma$, β, α bilden, worin die äußersten Glieder und je zwei von diesen gleich weit entfernten Glieder gleich sind. Stellt man die Reihe der Quotienten und die ihnen entsprechenden Näherungswerthe, die sich aus der Entwickelung von $\sqrt{A}$ ergeben, unter einander, so hat man;

Quotienten $\quad a;\ \alpha, \beta \ldots . \lambda, \mu;\ \alpha, \beta \ldots . \lambda, \mu;\ \alpha, \beta : . . \lambda, \mu \ldots$

Näherungsw. $\quad \frac{1}{0'}\ \frac{a}{1} \cdots \frac{h}{g'}\ \frac{k}{l'}\ \frac{m}{n} \cdots . \frac{h_1}{g_1'}\ \frac{h_1}{l_1'}\ \frac{m_1}{n_1} \cdots . .$

Bei dieser Anordnung ist $\frac{k}{l}$ der Näherungsw., welcher dem letzten Quotienten μ der ersten Periode $\alpha, \beta \ldots \gamma$, μ entspricht; nehmen wir nun an, z sei der entsprechende vollständige Quotient, so ist:

$$z-\mu=\sqrt{A}-a \text{ oder}$$
$$z=\mu-a+\sqrt{A}.$$

Nun ist: $$\sqrt{A}=\frac{kz+h}{lz+g}=\frac{k(\mu-a+\sqrt{A})+h}{l(\mu-a+\sqrt{A})+g} \text{ oder}$$

$$\sqrt{A}=\frac{k\sqrt{A}+k(\mu-a)+h}{l\sqrt{A}+l(\mu-a)+g}.$$

Multipliciren wir diese Gl. mit $l\sqrt{A}+l(\mu-a)+g$, so wird: $\quad lA+[l(\mu-a)+g]\sqrt{A}=k\sqrt{A}+k(\mu-a)+h.$

Digitized by Google

Setzen wir hierin die rationalen Glieder den rationalen und die irrationalen den irrationalen gleich, so resultirt:

$$(1)\quad k(\mu - a) + h = lA.$$
$$(2)\quad l(\mu - a) + g = k.$$

Aus (2) folgt: $\mu - a + \frac{g}{l} = \frac{k}{l}$

Da nun in der Reihe der Näherungsw. $\frac{h}{g}$ dem Bruche $\frac{k}{l}$ vorangeht, so ist $l > g$, daher $\frac{g}{l}$ ein ächter Bruch; mithin bezeichnet $\mu - a$ die größte in $\frac{k}{l}$ enthaltene ganze Zahl, welche $= a$ ist; daraus folgt

$$\mu - a = a; \text{ also } \mu = 2a.$$

Setzt man den Werth für $\mu - a$ in die Gl. (2), so wird

$$al + g = k; \text{ also } g = k - al; \text{ daher}$$

$$\frac{g}{l} = \frac{k}{l} - a.$$

Nun ist $\frac{k}{l} - a$ ein Näherungswerth von $\sqrt{A} - a$, woraus folgt, daß die Reihe der Quotienten $\alpha, \beta \ldots \gamma$, welche μ vorangehen nach dem vorigen §. symmetrisch ist. Nun ist

$$\frac{k}{l} - a = \text{dem Kettenbruch } \frac{1}{\alpha + \frac{1}{\beta + \frac{1}{\gamma + \ldots}}}$$

und dem Näherungswerthe $\frac{k}{l} - a$ geht der Näherungsw. $\frac{h}{g} - a$ voran, und weil $g = k - al$ ist, so muß die Periode $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$ identisch sein mit der umgekehrten $\lambda \ldots \gamma, \beta, \alpha$. Hieraus folgt, daß die aus der Entwickelung von $\sqrt{A}$ resultirenden Quotienten auf folgende Weise fortschreiten müssen:

a; $\alpha, \beta, \gamma \ldots \gamma, \beta, \alpha, 2a$; $\alpha, \beta, \gamma \ldots \gamma, \beta, \alpha, 2a$ u. s. w.

Das Gesetz der Fortschreitung würde noch regelmäßiger werden, wenn der erste Quotient $2a$ oder Null wäre, d. h. wenn $\sqrt{A} \pm a$ in einen Kettenbruch verwandelt werden soll.

§. 447. Auflösung der ferneren Beispiele in Heis Sammlung §. 87.

7. α) Die Zahl 2 ist von der Form $n^2 + 1$, daher $2 = 1^2 + 1$. Nach §. 313 I. Theil S. 372 ist daher

Digitized by Google

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ldots}}}$$ Die Näherungswerthe sind:

$1,\ {}^{3}/_{2},\ {}^{7}/_{5},\ {}^{17}/_{12},\ {}^{41}/_{29},\ {}^{99}/_{70},\ {}^{239}/_{169},\ {}^{577}/_{408},\ {}^{1393}/_{985},\ {}^{3363}/_{2378},\ {}^{8119}/_{5741}=1{,}4142135\ldots.$

7. β) Siehe §. 314 I. Theil S. 373.

7. γ) $\sqrt{41}=6+\frac{1}{x}$; also $\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{41}-6}{1}$; daher $x=\frac{1}{\sqrt{41}-6}$

$$=\frac{\sqrt{41}+6}{5}=2+\frac{\sqrt{41}-4}{5};$$

$\frac{1}{x_1}=\frac{\sqrt{41}-4}{5}$; also $x_1=\frac{5}{\sqrt{41}-4}=\frac{\sqrt{41}+4}{5}=2+\frac{\sqrt{41}-6}{5}$;

$\frac{1}{x_2}=\frac{\sqrt{41}-6}{5}$; „ $x_2=\frac{5}{\sqrt{41}-6}=\frac{\sqrt{41}+6}{1}=12+\frac{\sqrt{41}-6}{1}$;

$\frac{1}{x_3}=\frac{\sqrt{41}-6}{1}$; „ $x_3=\frac{1}{\sqrt{41}-6}=\frac{\sqrt{41}+6}{5}=2+\frac{\sqrt{41}-4}{5}$.

Hieraus folgt, daß, da wir oben für x denselben Werth wie für x_3 gefunden haben, $x=x_3$ und die Periode besteht also aus den 3 Gliedern 2, 2, 12 weshalb

$$\sqrt{41}=6+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{12+\ldots}}}$$

Die Näherungswerthe sind also; $6,\ {}^{13}/_{2},\ {}^{32}/_{5},\ {}^{397}/_{62},\ {}^{826}/_{129}\ {}^{2049}/_{320},\ {}^{25414}/_{3969}=6{,}4031242$ stimmt in den ersten 7 Decimalstellen ganz genau.

7. δ) $\sqrt{7}=2+\frac{1}{x}$; also $\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{7}-2}{1}$; $x=\frac{1}{\sqrt{7}-2}=\frac{\sqrt{7}+2}{3}$

$$=1+\frac{\sqrt{7}-1}{3};$$

$\frac{1}{x_1}=\frac{\sqrt{7}-1}{3}$; also $x_1=\frac{3}{\sqrt{7}-1}=\frac{\sqrt{7}+1}{2}=1+\frac{\sqrt{7}-1}{2}$;

$\frac{1}{x_2}=\frac{\sqrt{7}-1}{2}$; also $x_2=\frac{2}{\sqrt{7}-1}=\frac{\sqrt{7}+1}{3}=1+\frac{\sqrt{7}-2}{3}$;

$\frac{1}{x_3}=\frac{\sqrt{7}-2}{3}$; also $x_3=\frac{3}{\sqrt{7}-2}=\frac{\sqrt{7}+2}{1}=4+\frac{\sqrt{7}-2}{1}$;

$\frac{1}{x_4}=\frac{\sqrt{7}-2}{1}$; „ $x_4=\frac{1}{\sqrt{7}-2}=\frac{\sqrt{7}+2}{3}=1+\frac{\sqrt{7}-1}{3}$.

Digitized by Google

Denselben Werth, den wir für x_4 gefunden, haben wir auch für x gefunden, weshalb $x = x_4$ und mit x_4 die Periode von Neuem beginnt; weshalb

$$\sqrt{7} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \ldots}}}}$$

Näherungsw. 2, 3, $^5/_2$, $^8/_3$, $^{37}/_{14}$, $^{45}/_{17}$, $^{82}/_{31}$, $^{127}/_{148}$, $^{590}/_{223}$ $= 2{,}6457$.

7. ε) Die Periode der Quotienten ist: 5; 1, 1, 3, 5, 3, 1, 1, 10; daher sind die Näherungsw. für $\sqrt{31} = {}^5/_1$, $^{11}/_2$, $^{39}/_7$, $^{206}/_{37}$, $^{658}/_{118}$, $^{863}/_{155}$, $^{1520}/_{273}$, $^{16063}/_{2885} = 5{,}567764\ldots$ Siehe I. Theil §. 314.

8. $\sqrt{n^2+1} = n + \frac{1}{x}$ also $\frac{1}{x} = \frac{\sqrt{n^2+1} - n}{1}$; $x = \frac{1}{\sqrt{n^2+1} - n}$

$$= \frac{\sqrt{n^2+1} + n}{1} = 2n + \frac{\sqrt{n^2+1} - n}{1};$$

$$\frac{1}{x_1} = \frac{\sqrt{n^2+1} - n}{1};\ x_1 = \frac{1}{\sqrt{n^2+1} - n} = \frac{\sqrt{n^2+1} + n}{1}$$

$$= 2n + \frac{\sqrt{n^2+1} - n}{1};$$

also $x_1 = x$; daher die Periode 2n; mithin ist:

$$\sqrt{n^2+1} = 2 + \cfrac{1}{2n + \cfrac{1}{2n + \cfrac{1}{2n + \ldots}}}$$ Siehe I. Theil §. 313. S. 371.

9. So wie sich die Wurzel aus einer Irrationalzahl in einen Kettenbruch verwandeln läßt, so läßt sich auch umgekehrt jeder periodische Kettenbruch in einen Quadratwurzelausdruck verwandeln. Der Bruch sei

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \ddots + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{n + x}}}}$$

Mit n schließt die Periode; mit x werde nun auch alles

Digitized by Google

Uebrige bezeichnet. Es wurde auch der ganze Kettenbruch mit x bezeichnet, die erste Periode also bei dieser Bezeichnung nicht beachtet und zwar ist dies auch nicht nöthig, da der Bruch unendlich ist. Bezeichnet man die Näherungswerthe der Reihe nach mit a, $\frac{ab+1}{b}$ ..... $\frac{K}{L}, \frac{M}{N}, \frac{P}{Q}$;

dann ist nach §. 210 des I. Theiles:

$$x = \frac{(n+x)M+K}{(n+x)N+L}.$$

Entwickeln wir diese Gl., so erhalten wir:

$x^2N+(nN+L-M)x = nM+K$, oder

weil $nN+L = Q$

$nM+K = P$, so ist auch

$Nx^2+(Q-M)x = P$; also

$$x^2+\frac{Q-M}{N}x = \frac{P}{N}; \text{ daher}$$

$$x = -\frac{Q-M}{2N} \pm \sqrt{\left(\frac{Q-M}{2N}\right)^2+\frac{P}{N}} \text{ oder}$$

$$x = \frac{M-Q}{2N} \pm \sqrt{\left(\frac{Q-M}{2N}\right)^2+\frac{P}{N}}.$$

Jeder periodische Kettenbruch kann also durch die Auflösung einer quadratischen Gleichung berechnet werden, in welcher eine irrationale Quadratwurzel enthalten sein muß; denn wäre dieselbe rational, so würde man für x einen bestimmten reellen Werth erhalten; ein reeller Werth gibt aber stets einen endlichen Kettenbruch.

9. α) Näherungsw. $^1/_3$, $^3/_{10}$, $^{10}/_{33}$ u. s. w. daher

$$\frac{M}{N} = {}^1/_3, \quad \frac{P}{Q} = {}^3/_{10}; \text{ also}$$

$$x = \frac{1-10}{2.3} + \sqrt{\left(\frac{10-1}{2.3}\right)^2+{}^3/_3} = -{}^3/_2 + \sqrt{{}^{13}/_4} = {}^1/_2(\sqrt{13}-3).$$

2. Aufl. Bezeichnen wir den Kettenbruch mit x, so ist, da derselbe unendlich ist und die Periode nur aus einem Gliede besteht:

$$x = \frac{1}{3+x}; \text{ daher } x^2+3x = 1 \text{ oder } (x+{}^3/_2)^2 = {}^{13}/_4;$$

also: $x = {}^1/_2(\sqrt{13}-3)$.

9. β) Näherungswerthe $^1/_1$, $^1/_2$; daher $\frac{M}{N} = {}^1/_1$, $\frac{P}{Q} = {}^1/_2$; also ist:

Digitized by Google

$$x = \frac{1-2}{2.1} + \sqrt{\left(\frac{2-1}{2.1}\right)^2 + {}^1/_1} = -{}^1/_2 + \sqrt{{}^5/_4} = {}^1/_2(\sqrt{5}-1).$$

2. Aufl. Da hier die Periode 1 ist, so haben wir:

$$x = \frac{1}{1+x} \text{ oder } x^2+x=1; \text{ daher } (x+{}^1/_2)^2 = {}^5/_4;$$

$$\text{also } x = {}^1/_2(\sqrt{5}-1).$$

9. γ) Da hier die Periode erst mit dem zweiten Gliede beginnt, so berechne man nach dem vorhergehenden Beispiele den periodischen Kettenbruch; da derselbe ${}^1/_2(\sqrt{5}-1)$ ist, so ist der gegebene gemischt periodische Kettenbruch:

$$x = \frac{1}{2+{}^1/_2(\sqrt{5}-1)} = {}^1/_2(3-\sqrt{5}).$$

9. δ) Läßt man die 3 Ganzen vorläufig unberücksichtigt und bildet von dem Kettenbruch die Näherungswerthe, so hat man:

$$\frac{K}{L} = {}^1/_5, \quad \frac{M}{N} = {}^7/_{36}, \quad \frac{P}{Q} = {}^{22}/_{113}; \text{ es ist daher:}$$

$$x = \frac{7-113}{2.36} + \sqrt{\left(\frac{113-7}{2.36}\right)^2 + {}^{22}/_{36}} = -{}^{53}/_{36} + \sqrt{\frac{2809+792}{36^2}}$$

$$= {}^1/_{36}(\sqrt{3601}-53).$$

Addirt man zu diesem Ausdrucke die 3 Ganzen, so hat man:

$$x = {}^1/_{36}(\sqrt{3601}-53)+3 = {}^1/_{36}(\sqrt{3601}+55).$$

9. ε) Die Näherungswerthe sind: ${}^1/_3 = \frac{K}{L}$, ${}^5/_{16} = \frac{M}{N}$, ${}^{36}/_{115} = \frac{P}{Q}$;

$$x = \frac{5-115}{32} + \sqrt{\left(\frac{115-5}{2.16}\right)^2 + {}^{36}/_{16}} = -{}^{55}/_{16} + \sqrt{\frac{3601}{16^2}}$$

$$= {}^1/_{16}(\sqrt{3601}-55).$$

9. ζ) Die Näherungswerthe sind: ${}^1/_1$, ${}^3/_4$, ${}^{16}/_{21}$, ${}^{115}/_{151}$, ${}^{1051}/_{1380}$ u. s. w. Hier ist also

$\frac{K}{L} = {}^{16}/_{21}$, $\frac{M}{N} = {}^{115}/_{151}$, $\frac{P}{Q} = {}^{1051}/_{1380}$ und $n=9$; daher ist:

$$x = \frac{(9+x)115+16}{(9+x).151+21} = \frac{115x+1051}{151x+1380}; \text{ daher}$$

$$x = \frac{115-1380}{2.151} + \sqrt{\left(\frac{1380-115}{2.151}\right)^2 + {}^{1051}/_{151}} = -{}^{1265}/_{302}$$

$$+{}^1/_{302}\sqrt{1600225+634804} = {}^1/_{302}(\sqrt{2235029}-1265).$$

9. η) Die Näherungswerthe sind:

$$\frac{1}{a} = \frac{K}{L}, \quad \frac{b}{ab+1} = \frac{M}{N}, \quad \frac{bc+1}{abc+a+c} = \frac{P}{Q} \text{ und } n=c;$$

Digitized by Google

der vollständige Werth des gegebenen Kettenbruches ist daher:

$$x = \frac{(c+x)b+1}{(c+x)(ab+1)+a} = \frac{bx+bc+1}{(ab+1)x+abc+a+c};\ \text{folglich}$$

$$x = \frac{b-(abc+a+c)}{2(ab+1)} + \sqrt{\left(\frac{abc+a-b+c}{2(ab+1)}\right)^2 + \frac{bc+1}{ab+1}}$$

$$= \frac{-(abc+a-b+c)+\sqrt{a^2(bc+1)^2-2a(bc+1)(b-c)+(b-c)^2+4(ab+1)(bc+1)}}{2(ab+1)}$$

$$= \frac{-(abc+a-b+c)+\sqrt{a^2(bc+1)^2+2a(bc+1)(b+c)+(b+c)^2+4}}{2(ab+1)}$$

$$= \frac{-(abc+a-b+c)+\sqrt{(abc+a+b+c)^2+4}}{2(ab+1)}.$$

10. Soll die gegebene Gl. durch einen Kettenbruch aufgelöst werden, so hat man zunächst:
$x^2 = ax+b$; diese Gl., durch x dividirt gibt:
$x = a+\frac{b}{x}$. Setzt man hierin für x wieder $a+\frac{b}{x}$, so ist:

$$x = a+\frac{b}{a+\frac{b}{x}} = a+\frac{b}{a+\frac{b}{a+\frac{b}{a+\frac{b}{x}}}}.$$

Setzt man hierin $\frac{b}{a} = \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{1}{c}$, so daß $c = \frac{a}{b}$ ist, dann wird aus dem folgenden $\frac{b}{a}$ aber $\frac{1}{a}$. Denn es muß sein:

$$\frac{1}{\frac{a}{b}+\frac{1}{x}} = \frac{b}{a+\frac{b}{a}} \text{ oder } \frac{bx}{ax+b} = \frac{ab}{a^2+b};\ \text{daher}$$

$a^2bx+b^2x = a^2bx+ab^2$; folglich $x = a$.
Demgemäß haben wir also:

$$x_1 = a+\frac{b}{a+\frac{b}{a}} = a+\frac{1}{c+\frac{1}{a}}$$

Wir müssen jetzt das folgende Glied suchen. Nun ist $a = a$, $\frac{b}{a} = \frac{1}{c}$; daher:

$$c+\frac{1}{a} = a+\frac{b}{a}.$$

Digitized by Google

Es fragt sich nun, welcher Nenner der 1 für den folgenden Bruch wird gegeben werden müssen, damit $a + \frac{1}{x} = a + \frac{b}{a}$ werde. Dies ergibt sich eben aus der Gleichung:

$$a + \frac{1}{x} = a + \frac{b}{a};$$

hieraus folgt: $\frac{1}{x} = \frac{b}{a}$; daher $x = \frac{a}{b} = c$;

also wird das dritte Glied der Reihe wieder $\frac{1}{c}$; das folgende wieder $\frac{1}{a}$, wie bereits oben gefunden wurde.

Heißen die beiden Wurzeln dieser Gl. x_1 und x_2, so ist ihr Produkt $x_1 x_2$ und dies beträgt nach §. 393 ... $(-b)$; daher ist:

$$x_1 x_2 = -b; \text{ also } x_2 = -\frac{b}{x_1} = -\frac{b}{a + \frac{b}{a + \frac{b}{a + ..}}} = -\frac{1}{c + \frac{1}{a + \frac{1}{c + \frac{1}{a + ...}}}}$$

Ist nun $a = 24$, $b = 3$ und $c = \frac{a}{b} = {}^{24}/_{3} = 8$, so ist:

$$x_1 = 24 + \frac{1}{8 + \frac{1}{24 + \frac{1}{8 + \frac{1}{24}}}}$$

folglich: $x_1 = \begin{cases} {}^{24}/_{1}, {}^{193}/_{8}, {}^{4656}/_{193}, {}^{37441}/_{1552}, {}^{903240}/_{37441} \text{ u. s. w. oder} \\ 24, 24\,{}^{1}/_{8}, 24\,{}^{24}/_{193}, 24\,{}^{193}/_{1552}, 24\,{}^{4656}/_{37441} \text{ u. s. w.} \end{cases}$

$$x_2 = -\frac{1}{8 + \frac{1}{24 + \frac{1}{8 + \frac{1}{24}}}}$$

$x_2 = -{}^{1}/_{8}, -{}^{24}/_{193}, -{}^{193}/_{1552}, {}^{4656}/_{37441}, {}^{37441}/_{301080}$ u. s. w.

Löst man die Gleichung direkt auf, so ist x_1 und $x_2 = 12 \pm 12{,}1243556$. Nun ist $24\,{}^{24}/_{193} = 24{,}1243523$ und $24\,{}^{193}/_{1552} = 24{,}1243556$; mithin ist letzterer Näherungswerth ganz genau, da er in den 7 ersten Decimalstellen übereinstimmt.

Digitized by Google

11. Den Logarithmus von 195 vermittelst der Kettenbrüche zu berechnen. Bezeichnen wir denselben mit x, so soll sein

$$x = \alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{\delta + \cfrac{1}{\varepsilon + \ldots}}}}$$

Es sei nun $195 = 10^{\alpha + \frac{1}{\beta}}$; oder

$$195 = 10^{\alpha} \cdot 10^{\frac{1}{\beta}};$$ also

$$195 : 10^{\alpha} = 10^{\frac{1}{\beta}};$$ für $\alpha = 2$ erhalten wir:

$1{,}95 = 10^{\frac{1}{\beta}}$. Für α wurde die größte ganze Zahl genommen, so daß $10^{\alpha} < 195$ und $10^{\alpha+1} > 195$ wird. Potenzirt man die letzte Gleichung mit β, so ist: $1{,}95^{\beta} = 10$. Nimmt man nun β so, daß $1{,}95^{\beta} < 10$ und $1{,}95^{\beta+1} > 10$ wird, so kann β nur $= 3$ sein, also $1{,}95^{3} < 10$, also auch $1{,}95 < 10^{\frac{1}{3}}$. Soll aber $1{,}95 = 10^{\frac{1}{3}}$ werden, so muß zu dem Werthe von $\beta = 3$ noch etwas addirt werden, und es sei:

$$1{,}95^{3 + \frac{1}{\gamma}} = 10 \text{ oder } 1{,}95^{3} \cdot 1{,}95^{\frac{1}{\gamma}} = 10;$$ daher

$$1{,}95^{\frac{1}{\gamma}} = 10 : 1{,}95^{3} = 1{,}34864;$$ daher

$$1{,}95 = 1{,}34864^{\gamma}.$$

Nun muß γ so genommen werden, daß $1{,}34864^{\gamma} < 1{,}95$ und $1{,}34864^{\gamma+1} > 1{,}95$ wird; unter dieser Voraussetzung kann γ nur $= 2$ sein; denn $1{,}34864^{2} = 1{,}81883$. Da $\gamma = 2$ zu klein ist, so setze man $\gamma = 2 + \frac{1}{\delta}$, so hat man:

$$1{,}95 = 1{,}34864^{2 + \frac{1}{\delta}} \text{ oder}$$

$$1{,}95 = 1{,}34864^{2} \cdot 1{,}34864^{\frac{1}{\delta}};$$ daher

$1{,}34864 = 1{,}95 : 1{,}34864^{2} = 1{,}95 : 1{,}81883 = 1{,}07211$;

also $1{,}34864 = 1{,}07211^{\delta}$.

Da ein Kettenbruch entstehen soll, die genaue Bestimmung also zur Erleichterung umgangen werden soll, so muß δ kleiner genommen werden, als es die Gleichung erfordert und zwar so, daß $1{,}07211^{\delta} < 1{,}34864$ und $1{,}07211^{\delta+1} > 1{,}34864$ wird. In diesem Falle ist $\delta = 4$; wir haben daher:

Digitized by Google

$$x = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\varepsilon}}}}$$

Der Werth für δ ist zu klein und es sei $\delta = 4 + \frac{1}{\varepsilon}$;

dann ist: $1{,}07211^4 . 1{,}07211^{\frac{1}{\varepsilon}} = 1{,}34864$; also

$1{,}07211^{\frac{1}{\varepsilon}} = 1{,}34864 : 1{,}07211^4 = 1{,}02077$; daher

$1{,}07211 = 1{,}02077^{\varepsilon}$.

Es müßte nun für ε ein solcher Werth angenommen werden, daß diese Gleichung richtig wäre. Da wir aber für ε, abgesehen von dem oben Gesagten, nur eine ganze Zahl nehmen können, so nehmen wir die größte, die $1{,}02077^{\varepsilon} < 1{,}07211$, also $1{,}02077^{\varepsilon+1} > 1{,}07211$ macht; ε ist dann $= 3$; wir haben daher: $x = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\zeta}}}}}$

Demnach ist: $1{,}02077^{3 + \frac{1}{\zeta}} = 1{,}07211$; also

$1{,}02077^{\frac{1}{\zeta}} = 1{,}07211 : 1{,}02077^3 = 1{,}00799$.

Nun ist ζ so zu bestimmen, daß $1{,}00799^{\zeta} < 1{,}02077$ und $1{,}00799^{\zeta+1} > 1{,}02077$ wird. Setzen wir daher $\zeta = 2 + \frac{1}{\eta}$, so ist:

$1{,}00799^{2 + \frac{1}{\eta}} = 1{,}02077$; daher

$1{,}00799^{\frac{1}{\eta}} = 1{,}02077 : 1{,}00799^2 = 1{,}00465$; also

$1{,}00799 = 1{,}00465^{\eta}$. Setze $\eta = 1 + \frac{1}{\vartheta}$, so ist:

$1{,}00465^{\frac{1}{\vartheta}} = 1{,}00799 : 1{,}00465 = 1{,}00331$;

$1{,}00465 = 1{,}00331^{\vartheta}$. Setze $\vartheta = 1 + \frac{1}{\iota}$, so ist:

Digitized by Google

$1{,}00331^{\frac{1}{\iota}} = 1{,}00465 : 1{,}00331 = 1{,}00134$

$1{,}00331 = 1{,}00134^{\iota}$. Setze $\iota = 1 + \frac{1}{x}$ u. s. w.

Hiernach ist: $x = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}}}}}$

Die Näherungswerthe für x sind daher: 2; $^{7}/_{3}$; $^{16}/_{7}$; $^{71}/_{31}$; $^{229}/_{100}$; $^{529}/_{231}$; $^{758}/_{331}$; $^{1287}/_{562}$; $^{2045}/_{893} = 2{,}29003$.

Dieser Logarithmus stimmt mit den Tafeln in den fünf ersten Decimalstellen überein, so daß also

$$10^{2{,}29003} = 195.$$

12. Der gesuchte Logarithmus sei x. Nun ist:

$10^{\alpha + \frac{1}{\beta}} = 54321$; für $\alpha = 4$, gibt

$10^{\frac{1}{\beta}} = 54321 : 10^{4} = 5{,}4321$; es ist also

$5{,}4321^{\beta} = 10$. Setze $\beta = 1 + \frac{1}{\gamma}$, so ist:

$5{,}4321^{\frac{1}{\gamma}} = 10 : 5{,}4321 = 1{,}84091$; daher

$1{,}84091^{\gamma} = 5{,}4321$. Setze $\gamma = 2 + \frac{1}{\delta}$

$1{,}84091^{2 + \frac{1}{\delta}} = 5{,}4321$; so ist:

$1{,}84091^{\frac{1}{\delta}} = 5{,}4321 : 1{,}84091^{2} = 1{,}60291$

$1{,}60291^{\delta} = 1{,}84091$. Setze $\delta = 1 + \frac{1}{\varepsilon}$

$1{,}60291^{1 + \frac{1}{\varepsilon}} = 1{,}84091$, so ist:

$1{,}60291^{\frac{1}{\varepsilon}} = 1{,}84091 : 1{,}60291 = 1{,}14849$

$1{,}14849^{\varepsilon} = 1{,}60291$. Setze $\varepsilon = 3 + \frac{1}{\zeta}$

$1{,}14849^{3 + \frac{1}{\zeta}} = 1{,}60291$, so ist:

Digitized by Google

$1{,}14849^{\frac{1}{\zeta}} = 1{,}60291 : 1{,}14849^{3} = 1{,}05807$

$1{,}05807^{\zeta} = 1{,}14849;\ \zeta = 2 + \frac{1}{\eta}$

$1{,}05807^{2+\frac{1}{\eta}} = 1{,}14849;$

$1{,}05807^{\frac{1}{\eta}} = 1{,}14849 : 1{,}05807^{2} = 1{,}02588$

$1{,}02588^{\eta} = 1{,}05807;\ \eta = 2 + \frac{1}{\vartheta}$

$1{,}02588^{2+\frac{1}{\vartheta}} = 1{,}05807;$

$1{,}02588^{\frac{1}{\vartheta}} = 1{,}05807 : 1{,}02588^{2} = 1{,}00536$

$1{,}00536^{\vartheta} = 1{,}02588;\ \vartheta = 4 + \frac{1}{\iota}$

$1{,}00536^{4+\frac{1}{\iota}} = 1{,}02588;$

$1{,}00536^{\frac{1}{\iota}} = 1{,}02588 : 1{,}00536^{4} = 1{,}00417;$

$1{,}00417^{\iota} = 1{,}00536;\ \iota = 1 + \frac{1}{\varkappa}$

$1{,}00417^{1+\frac{1}{\varkappa}} = 1{,}00536;$

$1{,}00417^{\frac{1}{\varkappa}} = 1{,}00536 : 1{,}00417 = 1{,}00118$

$1{,}00118^{\varkappa} = 1{,}00417;\ \varkappa = 3 + \frac{1}{\lambda}$

$1{,}00118^{3+\frac{1}{\lambda}} = 1{,}00417;$

$1{,}00118^{\frac{1}{\lambda}} = 1{,}00417 : 1{,}00118^{3} = 1{,}00062$

$1{,}00062^{\lambda} = 1{,}00118;\ \lambda = 1 + \frac{1}{\mu}$ und $\mu = 1$ u. ſ. w.

Es iſt daher

Digitized by Google

$$x = 4 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+}}}}}}}}}}}$$ u.s.w.

Näherungswerthe für x sind: $^4/_1$; $^5/_1$; $^{14}/_3$; $^{19}/_4$; $^{71}/_{15}$; $^{161}/_{34}$; $^{393}/_{83}$; $^{1733}/_{366}$; $^{2126}/_{449}$; $^{8111}/_{1713}$; $^{10237}/_{2162}$; $^{18348}/_{3875}$ = 4,734967. Dieser Näherungswerth stimmt in den 6 ersten Decimalstellen mit den Tafeln überein.

13. Der Logarithmus sei $x = \alpha + \cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\gamma+}}$ ... alsdann ist:

$10^{\alpha+\frac{1}{\beta}} = 3{,}1415926$; setze $\alpha = 0$, so ist:

$10^{\frac{1}{\beta}} = 3{,}1415926$; also

$3{,}1415926^{\beta} = 10$; setze $\beta = 2 + \frac{1}{\gamma}$; so ist:

$3{,}1415926^{2+\frac{1}{\gamma}} = 10$; also, da $3{,}1415926^2 = 9{,}8696040$,

$3{,}1415926^{\frac{1}{\gamma}} = 10 : 9{,}8696040 = 1{,}0132118$;

$1{,}0132118^{\gamma} = 3{,}1415926$; setze $\gamma = 87 + \frac{1}{\delta}$, so ist:

$$1{,}0132118^{\frac{1}{\delta}} = \frac{3{,}1415926}{1{,}0132118^{87}} = \frac{3{,}1415926}{3{,}1326962} = 1{,}0028398;$$

$1{,}0028398^{\delta} = 1{,}0132118$; für $\delta = 4 + \frac{1}{\varepsilon}$ ist:

$$1{,}0028398^{\frac{1}{\varepsilon}} = \frac{1{,}0132118}{1{,}0028398^4} = \frac{1{,}0132118}{1{,}0114078} = 1{,}0017836;$$

$1{,}0017836^{\varepsilon} = 1{,}0028398$; für $\varepsilon = 1 + \frac{1}{\zeta}$ ist:

$1{,}0017836^{\frac{1}{\zeta}} = 1{,}0028398 : 1{,}0017836 = 1{,}0010543$;

Digitized by Google

$1{,}0010543^{\zeta} = 1{,}0017836$; für $\zeta = 1 + \frac{1}{\eta}$

$1{,}0010543^{\frac{1}{\eta}} = 1{,}0017836 : 1{,}0010543 = 1{,}0007285$

$1{,}0007285^{\eta} = 1{,}0010543$; für $\eta = 1 + \frac{1}{\vartheta}$

$1{,}0007285^{\frac{1}{\vartheta}} = 1{,}0010543 : 1{,}0007285 = 1{,}0003255$;

$1{,}0003255^{\vartheta} = 1{,}0007285$; für $\vartheta = 2 + \frac{1}{\iota}$;

$1{,}0003255^{\frac{1}{\iota}} = \frac{1{,}0007285}{1{,}0003255^2} = \frac{1{,}0007285}{1{,}0006511} = 1{,}0000773$

$1{,}0000773^{\iota} = 1{,}0003255$; für $\iota = 4 + \frac{1}{\varkappa}$ u. s. w.

Demnach ist $x = 0 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{87+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\frac{1}{4}+\ldots}}}}}}}$

Die Näherungswerthe sind: $^1/_2$; $^{87}/_{175}$; $^{349}/_{702}$; $^{436}/_{877}$; $^{785}/_{1579}$; $^{1221}/_{2456}$; $^{3227}/_{6491}$; $^{14129}/_{28420} = 0{,}4971499$. Dieser Logarithmus stimmt in den 7 ersten Stellen mit den Tafeln überein. Siehe I. Theil S. 464. §. 367.

15. α) $\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{xyz} + \frac{1}{xyzu} + \frac{1}{xyzuv} +$ ꝛc. oder

$\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{x}\left(1 + \frac{1}{y} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{yzu} + \frac{1}{yzuv} +\right.$ ꝛc.$\left.\right)$ ins Quadrat erhoben:

$5 = 4 + \frac{4}{x}\left(1 + \frac{1}{y} + \frac{1}{yz} + ..\right) + \frac{1}{x^2}\left(1 + \frac{1}{y} + \frac{1}{yz} + ..\right)^2$ oder

$1 = \frac{4}{x}\left(1 + \frac{1}{y} + \frac{1}{yz} + ..\right) + \frac{1}{x^2}\left(1 + \frac{1}{y} + \frac{1}{yz} + ..\right)^2$ mit x multipl.

$x = 4 + 4\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{yz} + ..\right) + \frac{1}{x}\left(1 + \frac{1}{y} + \frac{1}{yz} + ..\right)^2$; für $x = 5$

$1 = 4\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{yz} + ..\right) + \frac{1}{5}\left(1 + \frac{1}{y} + \frac{1}{yz} + ..\right)^2$ mit 5 multipl.

Digitized by Google

$$5 = 20\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{yz}+..\right)+1+2\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{yz}+..\right)+\frac{1}{y}\left(+\frac{1}{yz}+..\right)^2 \text{ oder}$$

$$4 = 22\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{yz}+..\right)+\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{yz}+..\right)^2 \text{ oder}$$

$$4 = \frac{22}{y}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{zu}+..\right)+\frac{1}{y^2}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{zu}+..\right)^2 \text{ mit y multipl.}$$

$$4y = 22\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{zu}+..\right)+\frac{1}{y}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{zu}+..\right)^2 \text{ oder}$$

$$4y-22 = 22\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{zu}\right)+\frac{1}{y}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{zu}+..\right)^2; \text{ für } y = 6,$$

$$24-22 = 22\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{zu}+..\right)+{}^1/_6\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{zu}+..\right)^2 \text{ oder}$$

$$2 = 22\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{zu}+..\right)+{}^1/_6\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{zu}+..\right)^2 \text{ mit 6 multipl.}$$

$$12 = 132\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{zu}+..\right)+1+2\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{zu}+..\right)+\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{zu}+..\right)^2 \text{ oder}$$

$$11 = 134\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{zu}+..\right)+\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{zu}+..\right)^2$$

$$11 = \frac{134}{z}\left(1+\frac{1}{u}+\frac{1}{uv}+..\right)+\frac{1}{z^2}\left(1+\frac{1}{u}+\frac{1}{uv}+..\right)^2 \text{ mit z multipl.}$$

$$11z = 134\left(1+\frac{1}{u}+\frac{1}{uv}+..\right)+\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{u}+\frac{1}{uv}+..\right)^2 \text{ oder}$$

$$11z-134 = 134\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{uv}+..\right)+\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{u}+\frac{1}{uv}+..\right)^2; \text{ für } z = 13,$$

$$143-134 = 134\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{uv}+..\right)+{}^1/_{13}\left(1+\frac{1}{u}+\frac{1}{uv}+..\right)^2$$

$$9 = 134\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{uv}+..\right)+{}^1/_{13}\left(1+\frac{1}{u}+\frac{1}{uv}+..\right)^2 \text{ mit 13 multipl.}$$

$$117 = 1742\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{uv}+..\right)+1+2\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{uv}+..\right)+\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{uv}+..\right)^2 \text{ oder}$$

$$116 = 1744\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{uv}+..\right)+\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{uv}+..\right)^2$$

$$116 = \frac{1744}{u}\left(1+\frac{1}{v}+\frac{1}{vs}+..\right)+\frac{1}{u^2}\left(1+\frac{1}{v}+\frac{1}{vs}+..^2\right) \text{ mit u multipl.}$$

$$116u-1744 = 1744\left(\frac{1}{v}+\frac{1}{vs}+..\right)+\frac{1}{u}\left(1+\frac{1}{v}+\frac{1}{vs}+..\right)^2; \text{ für } u = 16,$$

$$1856-1744 = 1744\left(\frac{1}{v}+\frac{1}{vs}+..\right)+{}^1/_{16}\left(1+\frac{1}{v}+\frac{1}{vs}+..\right)^2$$

Digitized by Google

$$112 = 1744\left(\frac{1}{v}+\frac{1}{vs}+..\right)+{}^1/_{16}\left(1+\frac{1}{v}+\frac{1}{vs}+..\right)^2 \text{ mit 16 multipl.}$$

$$1792 = 27904\left(\frac{1}{v}+\frac{1}{vs}+..\right)+1+2\left(\frac{1}{v}+\frac{1}{vs}+..\right)+\left(\frac{1}{v}+\frac{1}{vs}+..\right)^2$$

$$1791 = 27906\left(\frac{1}{v}+\frac{1}{vs}+..\right)+\left(\frac{1}{v}+\frac{1}{vs}+..\right)^2$$

$$1791 = \frac{27906}{v}\left(1+\frac{1}{s}+\frac{1}{st}+..\right)+\frac{1}{v^2}\left(1+\frac{1}{s}+\frac{1}{st}+..\right)^2$$

$$1791v-27906 = 27906\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{st}+..\right)+\frac{1}{v}\left(1+\frac{1}{s}+\frac{1}{st}+..\right)^2;\ v=16,$$

$$750 = 27906\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{st}+..\right)+{}^1/_{16}\left(1+\frac{1}{s}+\frac{1}{st}+..\right)^2 \text{ mit 16 multipl.}$$

$$12000 = 446496\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{st}\right)+1+2\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{st}\right)+\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{st}\right)^2$$

$$11999 = 446498\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{st}+..\right)+\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{st}+..\right)^2$$

$$11999 = \frac{446498}{s}\left(1+\frac{1}{t}+\frac{1}{tr}+..\right)+\frac{1}{s^2}\left(1+\frac{1}{t}+\frac{1}{tr}+..\right)^2$$

$$11999s-446498 = 446498\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{tr}+..\right)+\frac{1}{s}\left(1+\frac{1}{t}+\frac{1}{tr}+..\right)^2;\ \text{für}$$

$s = 38$ u. s. w.

Daher ist:

$$\sqrt{5} = 2+{}^1/_5+\frac{1}{5.6} = \frac{1}{5.6.13}+\frac{1}{5.6.13.16}+\frac{1}{5.6.13.16.16}$$

$$+\frac{1}{5.6.13.16.16.38} = 2^{8956\,28}/_{8798\,920} = 2{,}23606797.$$

Siehe I. Theil S. 371 §. 312.

Schema zur abgekürzten Berechnung.

Divisor.	Dividend.	Quotient.	Negativer Rest.
1)		$2=a$	$5-2^2=1=r_1$
2) $r_1=1$	$2a=4$	$5=x$	$x-4=1=r_2$
3) $xr_2-1=4$	$4x+2=22$	$6=y$	$4y-22=2=r_3$
4) $yr_3-1=11$	$22y+2=134$	$13=z$	$11z-134=9=r_4$
5) $zr_4-1=116$	$134z+2=1744$	$16=u$	$116u-1744=112=r_5$
6) $ur_5-1=1791$	$1744u+2=27906$	$16=v$	$1791v-27906=750=r_6$
7) $vr_6-1=11999$	$27906v+2=446498$	$38=s$	$11999s-446498$ u. s. w.

Digitized by Google

15. $\beta)\ \sqrt{31} = 5 + \frac{1}{x}\left(1 + \frac{1}{y} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{yzu} + \frac{1}{yzuv} + ..\right)$

$$31 = 25 + \frac{10}{x}\left(1 + \frac{1}{y} + \frac{1}{yz} + ..\right) + \frac{1}{x^2}\left(1 + \frac{1}{y} + \frac{1}{yz} + ..\right)^2$$

$$6x = 10\left(1 + \frac{1}{y} + \frac{1}{yz} + ..\right) + \frac{1}{x}\left(1 + \frac{1}{y} + \frac{1}{yz} + ..\right)^2;\ x = 2$$

$$12 - 10 = 10\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{yz} + ..\right) + {}^1/_2\left(1 + \frac{1}{y} + \frac{1}{yz} + ..\right)^2$$

$$4 = 20\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{yz} + ..\right) + 1 + 2\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{yz} + ..\right) + \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{yz} + ..\right)^2$$

$$3 = 22\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{yz} + ..\right) + \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{yz} + ..\right)^2$$

$$3 = \frac{22}{y}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{zu} + ..\right) + \frac{1}{y^2}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{zu} + ..\right)^2$$

$$3y - 22 = 22\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{zu} + ..\right) + \frac{1}{y}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{zu} + ..\right)^2;\ y = 8$$

$$2 = 22\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{zu} + ..\right) + {}^1/_8\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{zu} + ..\right)^2$$

$$16 = 176\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{zu} + ..\right) + 1 + 2\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{zu} + ..\right) + \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{zu} + ..\right)^2$$

$$15 = 178\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{zu} + ..\right) + \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{zu} + ..\right)^2$$

$$15 = \frac{178}{z}\left(1 + \frac{1}{u} + \frac{1}{uv} + ..\right) + \frac{1}{z^2}\left(1 + \frac{1}{u} + \frac{1}{uv} + ..\right)^2$$

$$15z - 178 = 178\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{uv} + ..\right) + \frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{u} + \frac{1}{uv} + ..\right)^2;\ z = 12$$

$$2 = 178\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{uv} + ..\right) + {}^1/_{12}\left(1 + \frac{1}{u} + \frac{1}{uv} + ..\right)^2$$

$$24 = 2136\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{uv} + ..\right) + 1 + 2\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{uv} + ..\right) + \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{uv}\right)^2$$

$$23 = 2138\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{uv} + ..\right) + \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{uv} + ..\right)^2$$

$$23 = \frac{2138}{u}\left(1 + \frac{1}{v} + \frac{1}{vr} + ..\right) + \frac{1}{u^2}\left(1 + \frac{1}{v} + \frac{1}{vr} + ..\right)^2$$

$$23u - 2138 = 2138\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{vr} + ..\right) + \frac{1}{u}\left(1 + \frac{1}{v} + \frac{1}{vr} + ..\right)^2;\ u = 93$$

Digitized by Google

$$1 = 2138\left(\frac{1}{v}+\frac{1}{vr}+..\right)+{}^1/_{93}\left(1+\frac{1}{v}+\frac{1}{vr}+..\right)^2$$

$$93 = 198834\left(\frac{1}{v}+\frac{1}{vr}+..\right)+1+2\left(\frac{1}{v}+\frac{1}{vr}+..\right)+\left(\frac{1}{v}+\frac{1}{vr}+..\right)^2$$

$$92 = 198836\left(\frac{1}{v}+\frac{1}{vr}+..\right)+\left(\frac{1}{v}+\frac{1}{vr}+..\right)^2$$

$$92 = \frac{198836}{v}\left(1+\frac{1}{r}+\frac{1}{rs}+..\right)+\frac{1}{v^2}\left(1+\frac{1}{r}+\frac{1}{rs}+..\right)^2$$

$$92v-198836 = 198836\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{rs}+..\right)+\frac{1}{v}\left(1+\frac{1}{r}+\frac{1}{rs}+..\right)^2;\ v = 2162$$

$$68 = 198836\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{rs}+..\right)+{}^1/_{2162}\left(1+\frac{1}{r}+\frac{1}{rs}+..\right)^2$$

$$147016 = 429883432\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{rs}+..\right)+1+2\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{rs}+..\right)+\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{rs}+..\right)^2$$

$$147015 = 429883434\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{rs}+..\right)+\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{rs}+..\right)^2$$

$$147015 = \frac{429883434}{r}\left(1+\frac{1}{s}+\frac{1}{st}+..\right)+\frac{1}{r^2}\left(1+\frac{1}{s}+\frac{1}{st}+..\right)^2$$

$$147015r-429883434 = 429883434\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{st}+..\right)+.....\ r = 2925$$

Daher ist:

$$\sqrt{31} = 5+{}^1/_2+{}^1/_8A_1+{}^1/_{12}A_2+{}^1/_{93}A_3+{}^1/_{2162}A_4 = 5^{21918857}/_{38604672}$$
$$= 5{,}567764362.$$

Dieser Werth für $\sqrt{31}$ stimmt in den ersten 9 Stellen überein.

Schema zur abgekürzten Berechnung.

Divisor.	Dividend.	Quotient.	Negativer Rest.
1)		$5=a$	$31-5^2=6=r_1$
2) $r_1=6$	$2a=10$	$2=x$	$6x-10=2=r_2$
3) $xr_2-1=3$	$10x+2=22$	$8=y$	$3y-22=2=r_3$
4) $yr_3-1=15$	$22y+2=178$	$12=z$	$15z-178=2=r_4$
5) $zr_4-1=23$	$178z+2=2138$	$93=u$	$23u-2138=1=r_5$
6) $ur_5-1=92$	$2138u+2=198836$	$2162=v$	$92v-198836=68=r_6$
7) $vr_6-1=147015$	$198836v+2=429883434$	$2925=r$	u. s. w.

16. α) $$\sqrt{2} = 1+\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{y}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{yzu}+\frac{1}{yzuv}+..\right)$$

$$2 = 1+\frac{2}{x}\left(1+\frac{1}{y}+\frac{1}{yz}+..\right)+\frac{1}{x^2}\left(1+\frac{1}{y}+\frac{1}{yz}+..\right)^2$$

Digitized by Google

$$x-2=2\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{yz}+..\right)+\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{y}+\frac{1}{yz}+..\right)^2;\ x=3$$

$$1=2\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{yz}+..\right)+\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{y}+\frac{1}{yz}+..\right)^2$$

$$3=6\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{yz}+..\right)+1+2\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{yz}+..\right)+\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{yz}+..\right)^2$$

$$2=8\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{yz}+..\right)+\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{yz}+..\right)^2$$

$$2=\frac{8}{y}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{zu}+..\right)+\frac{1}{y^2}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{zu}+..\right)^2$$

$$2y-8=8\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{zu}+..\right)+\frac{1}{y}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{zu}+..\right)^2;\ y=4$$

$$0=32\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{zu}+..\right)+1+2\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{zu}+..\right)+\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{zu}+..\right)^2$$

$$-1=34\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{zu}+..\right)+\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{zu}+..\right)^2$$

$$-1=\frac{34}{z}\left(1+\frac{1}{u}+\frac{1}{uv}\right)+\frac{1}{z^2}\left(1+\frac{1}{u}+\frac{1}{uv}+..\right)^2$$

$$-z=34+34\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{uv}+..\right)+\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{u}+\frac{1}{uv}+..\right)^2;\ z=-34$$

$$0=34\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{uv}+..\right)+\frac{1}{-34}\left(1+\frac{1}{u}+\frac{1}{uv}+..\right)^2$$

$$0=-1156\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{uv}+..\right)+1+2\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{uv}+..\right)+\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{uv}\right)^2$$

$$-1=-1154\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{uv}+..\right)+\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{uv}+..\right)^2$$

$$-1=-\frac{1154}{u}\left(1+\frac{1}{v}+\frac{1}{vs}+..\right)+\frac{1}{u^2}\left(1+\frac{1}{v}+\frac{1}{vs}+..\right)^2$$

$$-u+1154=-1154\left(\frac{1}{v}+\frac{1}{vs}\right)+\frac{1}{u}\left(1+\frac{1}{v}+\frac{1}{vs}+..\right)^2;\ u=1100$$

$$54=-1154\left(\frac{1}{v}+\frac{1}{vs}+..\right)+\frac{1}{1100}\left(1+\frac{1}{v}+\frac{1}{vs}+..\right)^2$$

$$59400=-1269400\left(\frac{1}{v}+\frac{1}{vs}+..\right)+1+2\left(\frac{1}{v}+\frac{1}{vs}+..\right)+\left(\frac{1}{v}+\frac{1}{vs}+..\right)^2$$

$$59399=-1269398\left(\frac{1}{v}+\frac{1}{vs}+..\right)+\left(\frac{1}{v}+\frac{1}{vs}+..\right)^2$$

$$59399=\frac{1269398}{v}\left(1+\frac{1}{s}+\frac{1}{st}+..\right)+\frac{1}{v^2}\left(1+\frac{1}{s}+\frac{1}{st}+..\right)^2$$

Digitized by Google

$$59399v+1269398=-1269398\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{st}+..\right)+\frac{1}{v}\left(1+\frac{1}{s}+\frac{1}{st}+..\right)^2;\ v=-20$$

$$81418=-1269398\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{st}+..\right)+\frac{1}{-20}\left(1+\frac{1}{s}+\frac{1}{st}+..\right)^2$$

$$-1628360=25387960\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{st}+..\right)+1+2\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{st}+..\right)+\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{st}+..\right)^2$$

$$-1628361=25387962\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{st}+..\right)+\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{st}+..\right)^2$$

$$-1628361=\frac{25387962}{s}\left(1+\frac{1}{t}+\frac{1}{tw}+..\right)+\frac{1}{s^2}\left(1+\frac{1}{t}+\frac{1}{tw}+..\right)^2$$

$$-1628361s-25387962=25387962\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{tw}+..\right)+\frac{1}{s}\left(1+\frac{1}{t}+\frac{1}{tw}+..\right)^2;\ s=-16$$

$$665814=25387962\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{tw}+..\right)+\frac{1}{-16}\left(1+\frac{1}{t}+\frac{1}{tw}+..\right)^2$$

$$-10653024=-406207392\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{tw}+..\right)+1+2\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{tw}+..\right)+\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{tw}+..\right)^2$$

$$-10653025=-406207390\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{tw}+..\right)+\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{tw}+..\right)^2$$

$$-10653025=-\frac{406207390}{t}\left(1+\frac{1}{w}+\frac{1}{wp}+..\right)+\frac{1}{t^2}\left(1+\frac{1}{w}+\frac{1}{wp}+..\right)^2$$

$$-10653025t=-406207390\left(1+\frac{1}{w}+\frac{1}{wp}+..\right)+\frac{1}{t}\left(1+\frac{1}{w}+\frac{1}{wp}+..\right)^2;\ t=39$$ u. s. w. Daher ist:

$$\sqrt{2}=1+{}^1/_3+{}^1/_4A_1-{}^1/_{34}A_2-{}^1/_{1100}A_3-{}^1/_{20}A_4-{}^1/_{16}A_5-{}^1/_{39}A_6\ldots.$$
$$=1\ {}^{11897539}/_{28728200}=1{,}41421356$$ stimmt ganz genau.

Siehe I. Theil S. 368 §. 311, wo wir denselben Werth für $\sqrt{2}$ auf anderem Wege gefunden haben.

Digitized by Google

Schema zur abgekürzten Berechnung.

Divisor.	Dividend.	Quotient.	Rest.
1)		$1=a$	$2-1^2=1=r_1$
2) $r_1=1$	$2a=2$	$3=x$	$x-2=1=r_2$
3) $xr_2-1=2$	$2x+2=8$	$4=y$	$2y-8=0=r_3$
4) $yr_3-1=-1$	$8y+2=34$	$-34=z$	$(-1)(-z)-34=0=r_4$
5) $zr_4-1=-1$	$34z+2=-1154$	$1100=u$	$(-u)-(-1154)=54=r_5$
6) $ur_5-1=59399$	$-1154u+2=-1269398$	$-20=y$	$59399.(-v)-(-1269398)=+81418=r_6$
7) $vr_6-1=-1628361$	$-1269398v+2=25387962$	$-16=s$	$665814=r_7$
8) $sr_7-1=-10653025$	$25387962s+2=-406207390$	$39=t$	u. s. w.

16. $\beta)$ $\sqrt{3}=1+\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{y}+\frac{1}{yz}+\ldots.\right)$

$3=1+\frac{2}{x}\left(1+\frac{1}{y}+\frac{1}{yz}+..\right)+\frac{1}{x^2}\left(1+\frac{1}{y}+\frac{1}{yz}+..\right)^2$

$2x=2+2\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{yz}+..\right)+\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{y}+\frac{1}{yz}+..\right)^2;\ x=2$

$4=2+2\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{yz}+..\right)+{}^1/_2\left(1+\frac{1}{y}+\frac{1}{yz}+..\right)^2$

$8=4+4\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{yz}+..\right)+1+2\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{yz}+..\right)+\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{yz}+..\right)^2$

$3=6\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{yz}+..\right)+\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{yz}+..\right)^2$

$3=\frac{6}{y}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{zu}+..\right)+\frac{1}{y^2}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{zu}+..\right)^2$

$3y=6+6\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{zu}+..\right)+\frac{1}{y}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{zu}+..\right)^2;\ y=2$

$6=6+6\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{zu}+..\right)+{}^1/_2\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{zu}+..\right)^2$

$0=12\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{zu}+..\right)+1+2\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{zu}+..\right)+\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{zu}+..\right)^2$

$-1=14\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{zu}+..\right)+\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{zu}+..\right)^2$

$-1=\frac{14}{z}\left(1+\frac{1}{u}+\frac{1}{uv}+..\right)+\frac{1}{z^2}\left(1+\frac{1}{u}+\frac{1}{uv}+..\right)^2$

$-z=14+14\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{uv}+..\right)+\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{u}+\frac{1}{uv}+..\right)^2;\ z=-14$

Digitized by Google

$$0=14\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{uv}+..\right)+\frac{1}{-14}\left(1+\frac{1}{u}+\frac{1}{uv}+..\right)^2$$

$$0=-196\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{uv}+..\right)+1+2\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{uv}+..\right)+\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{uv}+..\right)^2$$

$$-1=-194\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{uv}+..\right)+\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{uv}+..\right)^2$$

$$-1=-\frac{194}{u}\left(1+\frac{1}{v}+\frac{1}{vw}+..\right)+\frac{1}{u^2}\left(1+\frac{1}{v}+\frac{1}{vw}+..\right)^2$$

$$-u=-194-194\left(\frac{1}{v}+\frac{1}{vw}+..\right)+\frac{1}{u}\left(1+\frac{1}{v}+\frac{1}{vw}+..\right)^2;\ u=200$$

$$-6=-194\left(\frac{1}{v}+\frac{1}{vw}+..\right)+{}^1/_{200}\left(1+\frac{1}{v}+\frac{1}{vw}+..\right)^2$$

$$-1200=-38800\left(\frac{1}{v}+\frac{1}{vw}+..\right)+1+2\left(\frac{1}{v}+\frac{1}{vw}+..\right)+\left(\frac{1}{v}+\frac{1}{vw}+..\right)^2$$

$$-1201=-38798\left(\frac{1}{v}+\frac{1}{vw}+..\right)+\left(\frac{1}{v}+\frac{1}{vw}+..\right)^2$$

$$-1201=-\frac{38798}{v}\left(1+\frac{1}{w}+\frac{1}{wr}+..\right)+\frac{1}{v^2}\left(1+\frac{1}{w}+\frac{1}{wr}+..\right)^2$$

$$-1201v=-38798-38798\left(\frac{1}{w}+\frac{1}{wr}+..\right)+\frac{1}{v}\left(1+\frac{1}{w}+\frac{1}{wr}+..\right)^2;\ v=30$$

$$2768=-38798\left(\frac{1}{w}+\frac{1}{wr}+..\right)+{}^1/_{30}\left(1+\frac{1}{w}+\frac{1}{wr}+..\right)^2$$

$$83039=-1163938\left(\frac{1}{w}+\frac{1}{wr}+..\right)+\left(\frac{1}{w}+\frac{1}{wr}+..\right)^2$$

$$83039=-\frac{1163938}{w}\left(1+\frac{1}{r}+\frac{1}{rs}+..\right)+\frac{1}{w^2}\left(1+\frac{1}{r}+\frac{1}{rs}+..\right)^2$$

$$83039w=-1163938\left(1+\frac{1}{r}+\frac{1}{rs}+..\right)+\frac{1}{w}\left(1+\frac{1}{r}+\frac{1}{rs}+..\right)^2;\ w=-20.$$

$$-496842=-1163938\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{rs}+..\right)+\frac{1}{-20}\left(1+\frac{1}{r}+\frac{1}{rs}+..\right)^2$$

$$9936839=\frac{23278762}{r}\left(1+\frac{1}{s}+\frac{1}{st}+..\right)+\frac{1}{r^2}\left(1+\frac{1}{s}+\frac{1}{st}+..\right)^2$$

Digitized by Google

$$9936839r = 23278762\left(1+\frac{1}{s}+\frac{1}{st}+..\right)+\frac{1}{r}\left(1+\frac{1}{s}+..\right)^2;\ r=3$$

$$6531755 = 23278762\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{st}+..\right)+{}^1/_8\left(1+\frac{1}{s}+\frac{1}{st}+..\right)^2$$

$$19595264 = 69836288\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{st}+..\right)+\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{st}+..\right)^2$$

$$19595264 = \frac{69836288}{s}\left(1+\frac{1}{t}+\frac{1}{tp}+..\right)+\frac{1}{s^2}\left(1+\frac{1}{t}+\frac{1}{tp}+..\right)^2;$$

Daher ist, wenn $s=-4$ ist:

$$\sqrt{3} = 1+{}^1/_2+{}^1/_2A_1-{}^1/_{14}A_2-{}^1/_{200}A_3-{}^1/_{30}A_4+{}^1/_{20}A_5+{}^1/_3A_6-{}^1/_4A_7.. = 1^{59032575}/_{80640000} = 1^{262367}/_{358400} = 1{,}7320508.$$

Siehe I. Theil S. 371 §. 312.

Schema zur abgekürzten Berechnung.

Divisor.	Dividend.	Quotient.	Rest.
1)		$a=1$	$3-1^2=2=r_1$
2) $r_1=2$	$2a=2$	$x=2$	$2x-2=2=r_2$
3) $xr_2-1=3$	$2x+2=6$	$y=2$	$3y-6=0=r_3$
4) $yr_3-1=-1$	$6y+2=14$	$z=-14$	$(-1).z-14=0=r_4$
5) $zr_4-1=-1$	$14z+2=-194$	$u=200$	$(-1).u-(-194)=-6=r_5$
6) $ur_5-1=-1201$	$-194u+2=-38798$	$v=30$	$-1201v-(-38798)$ $=2768=r_6$
7) $vr_6-1=83039$	$-38798v+2=-1163938$	$w=-20$	$83039w-(-1163938)=$ $-496842=r_7$
8) $wr_7-1=9936839$	$-1163938w+2=$ 23278762	$s=3$	$9936839s-23278762=$ $6531755=r_8$
9) $sr_8-1=19595264$	$23278762s+2=$ 69836288	$t=-4$	u. s. w.

17. $\sqrt[3]{388} = a+\frac{1}{x}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{xyz}+\frac{1}{xyzu}+\ldots$

Man betrachte diese Reihe als eine zweitheilige Größe $a+b$, worin $\frac{1}{x}+\frac{1}{xy}+\ldots=b$ gedacht wird. Erhebt man dieselbe in den Cubus, so hat man:

$$388 = a^3+3a^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{xy}+..\right)+3a\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{xy}+..\right)^2+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{xy}+..\right)^3;\ \text{also}$$

$$388-a^3 = 3a^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{xy}+..\right)+3a\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{xy}+..\right)^2+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{xy}+..\right)^3.$$

Für $a=7$ ist:

$$45 = \frac{3a^2}{x}\left(1+\frac{1}{y}+..\right)+\frac{3a}{x^2}\left(1+\frac{1}{y}+..\right)^2+\frac{1}{x^3}\left(1+\frac{1}{y}+..\right)^3$$

Digitized by Google

$$45x = 3a^2 + 3a^2\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{yz}+..\right)+\frac{3a}{x}\left(1+\frac{1}{y}+..\right)^2+\frac{1}{x^2}\left(1+\frac{1}{y}+..\right)^3$$

$$45x - 3a^2 = 3a^2\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{yz}+..\right)+\frac{3a}{x}\left(1+\frac{1}{y}+..\right)^2+\frac{1}{x^2}\left(1+\frac{1}{y}+..\right)^3.$$

$$33x^2 = 3a^2x^2\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{yz}+..\right)+3ax\left[1+2\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{yz}+..\right)+\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{yz}+..\right)^2\right]+1+3\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{yz}+..\right)+3\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{yz}+..\right)^2+\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{yz}+..\right)^3$$

$$33x^2 - 3ax - 1 = (3a^2x^2+2.3.ax+3)\left(\frac{1}{y}+..\right)+(3ax+3)\times\left(\frac{1}{y}+..\right)^2+\left(\frac{1}{y}+..\right)^3;$$ für $x=4$, $a=7$ wird:

$$443 = 2523\left(\frac{1}{y}+..\right)+87\left(\frac{1}{y}+..\right)^2+\left(\frac{1}{y}+..\right)^3$$

$$443y = 2523+2523\left(\frac{1}{z}+..\right)+\frac{87}{y}\left(1+\frac{1}{z}\right)^2+\frac{1}{y^2}\left(1+\frac{1}{z}+..\right)^3$$

$$443y - 2523 = 2523\left(\frac{1}{z}+..\right)+\frac{87}{y}\left(1+\frac{1}{z}+..\right)^2+\frac{1}{y^2}\left(1+\frac{1}{z}+..\right)^3.$$

Für $y=6$.

$$135y^2 = 2523y^2\left(\frac{1}{z}+..\right)+87y\left[1+2\left(\frac{1}{z}+..\right)+\left(\frac{1}{z}+..\right)^2\right]+1+3\left(\frac{1}{z}+..\right)+3\left(\frac{1}{z}+..\right)^2+\left(\frac{1}{z}+..\right)^3$$

$$135y^2 - 87y - 1 = (2523y^2+2.87.y+3)\left(\frac{1}{z}+..\right)+(87y+3)\times\left(\frac{1}{z}+..\right)^2+\left(\frac{1}{z}+..\right)^3$$

$$4337 = 91875\left(\frac{1}{z}+..\right)+525\left(\frac{1}{z}+..\right)^2+\left(\frac{1}{z}+..\right)^3$$

$$4337z - 91875 = 91875\left(\frac{1}{u}+..\right)+\frac{525}{z}\left[1+2\left(\frac{1}{u}+..\right)+\left(\frac{1}{u}+..\right)^2\right]+\frac{1}{z^2}\left[1+3\left(\frac{1}{u}+..\right)+3\left(\frac{1}{u}+..\right)^2+\left(\frac{1}{u}+..\right)^3\right].\quad z=22$$

$$3539z^2 - 525z - 1 = (91875z^2+2.525.z+3)\left(\frac{1}{u}+..\right)+(525z+3)\left(\frac{1}{u}+..\right)^2+\left(\frac{1}{u}+..\right)^3$$

Digitized by Google

$$1701325 = 44490603\left(\frac{1}{u}+..\right)+11553\left(\frac{1}{u}+..\right)^2+\left(\frac{1}{u}+..\right)^3$$

$$1701325u-44490603 = 44490603\left(\frac{1}{v}+..\right)+\frac{11553}{u}\left[1+2\times\left(\frac{1}{v}+..\right)+\left(\frac{1}{v}+..\right)^2\right]+\frac{1}{u^2}\left[1+3\left(\frac{1}{v}+..\right)+3\left(\frac{1}{v}+..\right)^2+\left(\frac{1}{v}+..\right)^3\right].$$

Für $u = 27$

$$1445172u^2-11553u-1 = (44490603u^2+2.11553u+3)\left(\frac{1}{v}+..\right)+(11553u+3)\left(\frac{1}{v}+..\right)^2+\left(\frac{1}{v}+..\right)^3$$

$$1053218456 = 32434273452\left(\frac{1}{v}+..\right)+311934\left(\frac{1}{v}+..\right)^2+\left(\frac{1}{v}+..\right)^3$$

$$1053218456v-32434273452 = 32434273452\left(\frac{1}{w}+..\right)+\frac{311934}{v}\left[1+2\left(\frac{1}{w}+..\right)+\left(\frac{1}{w}+..\right)^2\right]+\frac{1}{v^2}\left[1+3\left(\frac{1}{w}+..\right)+3\left(\frac{1}{w}+..\right)^2+\left(\frac{1}{w}+..\right)^3\right]$$

$$215498684v^2-311934v-1 = (32434273452v^2+2.311934v+3)\left(\frac{1}{w}+..\right)+(311934v+3)\left(\frac{1}{w}+..\right)^2+\left(\frac{1}{w}+..\right)^3$$

$$207084565369 = 31169356127283\left(\frac{1}{w}+..\right)+9669954\left(\frac{1}{w}+..\right)^2+\left(\frac{1}{w}+..\right)^3.$$

Hier hat w den Werth von 151.

Hiernach ist:

$$\sqrt[3]{388} = 7+{}^1/_4+{}^1/_6A_1+{}^1/_{22}A_2+{}^1/_{27}A_3+{}^1/_{31}A_4+{}^1/_{151}A_5+\ldots = 7+\frac{6.22.27.31.151+22.27.31.151+27.31.151+31.151+151+1}{4.6.22.27.31.151}$$

$$= 7^{19594818}/_{6673236} = 7^{362867}/_{1235784} = 7{,}29363302.$$

Auf direktem Wege vermittelst der Log. findet man $\sqrt[3]{388} = 7{,}293634615395$.

Digitized by Google

Schema zur schnellen Berechnung der Cubikwurzel aus 388.

	Divisor.	Dividend.	Quotient.	Rest.	Coefficient der 2. Potenz.
1)			a = 7	45	
2)	45	147	x = 4	33	21
3)	443	2523	y = 6	135	87
4)	4337	91875	z = 22	3539	525
5)	1701325	44490603	u = 27	1445172	11553
6)	1053218456	32434273452	v = 31	215498684	311934
7)	207084565369	31169356127283	w = 151		9669954

Erklärung: 1) Rest $388 - a^3 = 388 - 7^3 = 45 = r_1$.

2) Divisor: $r_1 = 45$; Dividend: $3a^2 = 3.7^2 = 147$; Rest: $r_1 x - 3a^2 = 180 - 147 = 33 = r_2$; Coefficient der 2. Potenz: $3a = 3.7 = 21$.

3) Divisor: $r_2x^2 - 3ax - 1 = 33.4^2 - 3.7.4 - 1 = 443$.
Divid.: $3a^2x^2 + 3.2.ax + 3 = 3.7^2.4^2 + 3.2.7.4 + 3 = 2523$.
Rest: $443y - 2523 = 443.6 - 2523 = 135 = r_3$.
Coeff.: $3ax + 3 = 3.7.4 + 3 = 87$.

4) Divisor: $r_3y^2 - 87y - 1 = 135.6^2 - 87.6 - 1 = 4337$.
Div.: $2523y^2 + 2.87y + 3 = 2523.6^2 - 2.87.6 + 3 = 91875$.
Rest: $4337z - 91875 = 4337.22 - 91875 = 3539 = r_4$.
Coeff.: $87y + 3 = 87.6 + 3 = 525$.

5) Divis.: $r_4z^2 - 525z - 1 = 3539.22^2 - 525.22 - 1 = 1701325$.
Divid.: $91875z^2 + 2.525z + 3 = 91875.22^2 + 2.525.22 + 3 = 44490603$.
Rest: $1701325u - 44490603 = 1445172 = r_5$.
Coeff.: $525z + 3 = 525.22 + 3 = 11553$.

6) Divis.: $r_5u^2 - 11553u - 1 = 1445172.27^2 - 11553.27 - 1 = 1053218456$.
Dividend: $44490603u^2 + 2.11553u + 3 = 32434273452$.
Rest: $1053218456v - 32434273452 = 215498684 = r_6$.
Coeff.: $11553u + 3 = 11553.27 + 3 = 311934$.

7) Div.: $r_6v^2 - 311934v - 1 = 215498684.31^2 - 311934.31 - 1 = 207084565369$.
Dividend: $32434273452v^2 + 2.311934v + 3 = 31169356127283$.
Coeff.: $311934v + 3 = 311934.31 + 3 = 9669954$ u. s. w.

Digitized by Google

18. α) Schema zur abgekürzten Berechnung von $\sqrt[3]{43}$.

	Divisor.	Dividend.	Quotient.	Rest.	Coefficient.
1)			a = 3	16	
2)	16	27	x = 2	5	9
3)	1	147	y = 148	1	21
4)	18795	3226107	z = 172	6633	3111
5)	195695579	95442219675	u = 488		

Erläuterungen: 1) Rest $43 - a^3 = 43 - 27 = 16 = r_1$.
2) Divisor: $r_1 = 16$; Dividend: $3a^2 = 3.3^2 = 27$; Rest: $r_1 x - 3a^2 = 5 = r_2$; Coeff.: $3a = 9$.
3) Divisor: $r_2 x^2 - 3ax - 1 = 1$; Dividend: $3a^2x^2 + 3.2.ax + 3 = 147$; Rest: $y - 147 = 1 = r_3$; Coeff.: $3ax + 3 = 21$.
4) Divisor: $r_3 y^2 - 21y - 1 = 18795$; Dividend: $147y^2 + 2.21y + 3 = 3226107$; Rest: $18795z - 3226107 = 6633 = r_4$; Coeff.: $21y + 3 = 3111$.
5) Divisor: $r_4 z^2 - 3111z - 1 = 195695579$; Dividend: $3226107z^2 + 2.3111z + 3 = 95442219675$ u. s. w.

Hiernach ist:

$$\sqrt[3]{43} = 3 + {}^1/_2 + {}^1/_{148}A_1 + {}^1/_{172}A_2 + {}^1/_{488}A_3 \ldots$$
$$= 3 + \frac{12422528 + 83936 + 488 + 1}{24845056}$$
$$= 3^{12506953}/_{24845056} = 3{,}5033980603$$

stimmt in den ersten 9 Stellen ganz genau überein.

18. β) Schema zur abgekürzten Berechnung von $\sqrt[3]{2}$.

	Divisor.	Dividend.	Quotient.	Rest.	Coefficient.
1)			a = 1	1	
2)	1	3	x = 4	1	3
3)	3	75	y = 26	3	15
4)	1637	51483	z = 32	901	393
5)	910047	52743747	u = 58	38979	12579
6)	130395773	177431424075	v = 1361		

Erläuterungen: 1) Rest $2 - a^3 = 2 - 1^3 = 1 = r_1$.
2) Divisor: $r_1 = 1$; Dividend: $3a^2 = 3$; Rest: $r_1 x - 3a^2 = 1 = r_2$; Coeff.: $3a = 3$.
3) Divis.: $r_2 x^2 - 3ax - 1 = 3$; Divid.: $3a^2x^2 + 3.2.ax + 3 = 75$; Rest: $3y - 75 = 3 = r_3$; Coeff.: $3ax + 3 = 15$.
4) Divis.: $r_3 y^2 - 15y - 1 = 1637$; Divid.: $75y^2 + 2.15y + 3$

Digitized by Google

$= 51483$; Rest: $1637z - 51483 = 901 = r_4$; Coeff.: $15y + 3 = 393$.

5) Divisor: $r_4z^2 - 393z - 1 = 910047$; Dividend: $51483z^2 + 2.393z + 3 = 52743747$; Rest: $910047u - 52743747 = 38979 = r_5$; Coeff.: $393z + 3 = 12579$.

6) Divisor: $r_5u^2 - 12579u - 1 = 130395773$; Dividend: $52743747u^2 + 2.12579u + 3 = 177431424075$ u. s. w.

Hiernach ist:

$$\sqrt[3]{2} = 1 + 1/4 + 1/26A_1 + 1/82A_2 + 1/58A_3 + 1/1861A_4 + \ldots$$
$$= 1 + \frac{65676416 + 2526016 + 78938 + 1361 + 1}{262705664}$$
$$= 1^{68282732}/_{262705664} = 1^{17070683}/_{65676416} = 1{,}25992104.$$

Siehe I. Theil S. 397 §. 325.

18. γ) Schema zur schnellen Berechnung von $\sqrt[3]{13}$.

	Divisor.	Dividend.	Quotient.	Rest.	Coefficient.
1)			a = 2	5	
2)	5	12	x = 3	3	6
3)	8	147	y = 19	5	21
4)	1405	53868	z = 39	927	402
5)	1394288	81964587	u = 59	298405	15681
6)	1037822625	285320577708	v = 275		

Erläuterungen: 1) Rest $13 - a^3 = 13 - 2^3 = 5 = r_1$.

2) Divisor: $r_1 = 5$; Dividend: $3a^2 = 12$; Rest: $r_1x - 3a^2 = 3 = r_2$; Coeff.: $3a = 6$.

3) Divisor: $r_2x^2 - 6x - 1 = 8$; Divid.: $3a^2x^2 + 3.2ax + 3 = 147$; Rest: $8y - 147 = 5 = r_3$; Coeff.: $3ax + 3 = 21$.

4) Divisor: $r_3y^2 - 21y - 1 = 1405$; Dividend: $147y^2 + 2.21y + 3 = 53868$; Rest: $1405z - 53868 = 927 = r_4$; Coeff.: $21y + 3 = 402$.

5) Divisor: $r_4z^2 - 402z - 1 = 1394288$; Divid.: $53868z^2 + 2.402z + 3 = 81964587$; Rest: $1394288z - 81964587 = 298405 = r_5$; Coeff.: $402z + 3 = 15681$.

6) Divisor: $r_5u^2 - 15681u - 1 = 1037822625$; Dividend: $81964587u^2 + 2.15681u + 3 = 285320577708$ u. s. w.

Hiernach ist:

$$\sqrt[3]{13} = 2 + 1/3 + 1/19A_1 + 1/39A_2 + 1/59A_3 + 1/275A_4 + \ldots$$
$$= 2 + \frac{12022725 + 632775 + 16225 + 275 + 1}{36068175}$$
$$= 2^{12672001}/_{36068175} = 2{,}35133468$$

stimmt in den 8 ersten Stellen überein.

Digitized by Google

18. δ) Schema zur abgekürzten Berechnung von $\sqrt[3]{36}$.

Divisor.	Dividend.	Quotient.	Rest.	Coefficient.
1)		a = 3	9	
2) 9	27	x = 4	9	9
3) 107	507	y = 5	28	39
4) 504	13068	z = 26	36	198
5) 19187	8844267	u = 461	940	91278

Erläuterungen: 1) Rest $36 - a^3 = 36 - 27 = 9 = r_1$.

2) Divisor: $r_1 = 9$; Dividend: $3a^2 = 27$; Rest: $r_1 x - 3a^2 = 9 = r_2$; Coeff: $3a = 9$.

3) Divisor: $r_2 x^2 - 3.3x - 1 = 107$. Dividend: $3a^2x^2 + 3.2.ax + 3 = 507$; Rest: $107y - 507 = 28 = r_3$; Coeff.: $3ax + 3 = 39$.

4) Divisor: $r_3 y^2 - 39y - 1 = 504$; Dividend: $507y^2 + 2.39y + 3 = 13068$; Rest: $504z - 13068 = 36 = r_4$; Coeff.: $39y + 3 = 198$.

5) Divisor: $r_4 z^2 - 198z - 1 = 19187$; Dividend: $13068z^2 + 2.198z + 3 = 8844267$; Rest: $19187u - 8844267 = 940 = r_5$; Coeff.: $198z + 3 = 91278$ u. s. w.

Demnach ist:

$$\sqrt[3]{36} = 3 + {}^1/_4 + {}^1/_5 A_1 + {}^1/_{26} A_2 + {}^1/_{461} A_3 + \ldots$$
$$= 3 + \frac{59930 + 11986 + 461 + 1}{239720}$$
$$= 3^{72378}/_{239720} = 3{,}30192724$$

stimmt in den 8 ersten Decimalstellen mit den Tafeln überein.

19. Hier soll die Mantisse des Logarithmus von 195 vermittelst der Theilbruchreihen gesucht werden, und weil die Kennziffer 2 ist, so sei:

$195 = 10^{2 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha\beta\gamma} + \frac{1}{\alpha\beta\gamma\delta} + \cdots}$ oder

$195 = 10^2 \times 10^{\frac{1}{\alpha}} \times 10^{\frac{1}{\alpha\beta}} \times 10^{\frac{1}{\alpha\beta\gamma}} \times \ldots$. Dividirt durch 10^2 gibt

$1{,}95 = 10^{\frac{1}{\alpha}} \times 10^{\frac{1}{\alpha\beta}} \times 10^{\frac{1}{\alpha\beta\gamma}} \times \ldots$. auf die Potenz α erhoben:

$1{,}95^\alpha = \left(10^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha \times \left(10^{\frac{1}{\alpha\beta}}\right)^\alpha \times \left(10^{\frac{1}{\alpha\beta\gamma}}\right)^\alpha \times \ldots$ oder

$1{,}95^\alpha = 10^1 \times 10^{\frac{1}{\beta}} \times 10^{\frac{1}{\beta\gamma}} \times 10^{\frac{1}{\beta\gamma\delta}} \times \ldots$

Nun muß α eine ganze Zahl sein. Nehmen wir $\alpha = 3$, so würde $1{,}95^\alpha$ noch nicht 10 betragen; die rechte Seite beträgt aber mehr als 10, da jede Potenz größer ist als 1, weil der

Digitized by Google

Exponent ein ächter Bruch ist und also $10 \times 1 \times \ldots > 10$ Da nun α eine ganze Zahl ist, so muß α wenigstens $3+1=4$ genommen werden. Es ist daher:

$1{,}95^4 = 10 \times 10^{\frac{1}{\beta}} \times 10^{\frac{1}{\beta\gamma}} \times 10^{\frac{1}{\beta\gamma\delta}} \times \ldots$

$14{,}45900625 = 10 \times 10^{\frac{1}{\beta}} \times 10^{\frac{1}{\beta\gamma}} \times \ldots$ durch 10 dividirt, gibt:

$1{,}445900625 = 10^{\frac{1}{\beta}} \times 10^{\frac{1}{\beta\gamma}} \times 10^{\frac{1}{\beta\gamma\delta}} \times \ldots$ auf die Potenz β erhoben:

$1{,}445900625^{\beta} = 10 \times 10^{\frac{1}{\gamma}} \times 10^{\frac{1}{\gamma\delta}} \times \ldots$ Für $\beta = 7$ resultirt:

$13{,}2120079 = 10 \times 10^{\frac{1}{\gamma}} \times 10^{\frac{1}{\gamma\delta}}$; durch 10 dividirt:

$1{,}32120079 = 10^{\frac{1}{\gamma}} \times 10^{\frac{1}{\gamma\delta}} \times 10^{\frac{1}{\gamma\delta\varepsilon}} \times \ldots$

$1{,}32120079^{\gamma} = 10 \times 10^{\frac{1}{\delta}} \times 10^{\frac{1}{\delta\varepsilon}} \times \ldots$ Setze $\gamma = 9$, so ist:

$12{,}26645862 = 10 \times 10^{\frac{1}{\delta}} \times 10^{\frac{1}{\delta\varepsilon}} \times \ldots$ durch 10 dividirt.

$1{,}226645862 = 10^{\frac{1}{\delta}} \times 10^{\frac{1}{\delta\varepsilon}} \times 10^{\frac{1}{\delta\varepsilon\zeta}} \times \ldots$

$1{,}226645862^{\delta} = 10 \times 10^{\frac{1}{\varepsilon}} \times 10^{\frac{1}{\varepsilon\zeta}} \times \ldots$ $\delta = 12$

$11{,}60460717 = 10 \times 10^{\frac{1}{\varepsilon}} \times 10^{\frac{1}{\varepsilon\zeta}} \times \ldots$ durch 10 div.

$1{,}160460717^{\varepsilon} = 10 \times 10^{\frac{1}{\zeta}} \times 10^{\frac{1}{\zeta\eta}} \times \ldots$ Setze $\varepsilon = 16$

$10{,}81649153 = 10 \times 10^{\frac{1}{\zeta}} \times 10^{\frac{1}{\zeta\eta}} \times \ldots$ durch 10 div.

$1{,}081649153^{\zeta} = 10 \times 10^{\frac{1}{\eta}} \times 10^{\frac{1}{\eta\vartheta}} \times \ldots$ Setze $\zeta = 29$ u. s. w.

Hiernach ist:

$$\log 195 = 2 + {}^1/_4 + {}^1/_7 A_1 + {}^1/_9 A_2 + {}^1/_{12} A_3 + {}^1/_{16} A_4 + {}^1/_{29} A_5 + \ldots$$

$$= 2 + \frac{350784 + 50112 + 5568 + 464 + 29 + 1}{1403136}$$

$$= 2^{406958}/_{1403136} = 2{,}2900346.$$

Dieser Logarithmus stimmt in den 7 ersten Stellen mit den Tafeln überein.

Digitized by Google

Sechster Abschnitt.

Permutationen, Combinationen, Variationen, binomischer und polynomischer Lehrsatz, figurirte Zahlen, Wahrscheinlichkeitsrechnung.

(Heis Sammlung §. 88.)

§. 448. Die Combinationslehre oder Syntaktik befaßt sich mit der gesetzmäßigen Bildung aller möglichen Zusammenstellungen und Verbindungen gegebener Dinge. Die Dinge selbst, welche mit einander verbunden werden sollen, heißen Elemente; sie werden durch Buchstaben oder Ziffern bezeichnet. Da es sich nun blos um die Art und Weise der Verbindungen der Elemente handelt, so wird von allen ihnen sonst etwa zukommenden Eigenschaften abstrahirt und es können daher auch die Buchstaben und Ziffern Elemente genannt werden.

Die aus den Elementen gebildeten Zusammenstellungen oder Verbindungen heißen Complexionen, Gruppen oder Formen.

Die Aufstellung der Elemente in alphabetischer Ordnung, wenn es Buchstaben, und in natürlicher Ordnung, wenn es Ziffern sind, nennt man Index oder Zeiger.

Ein Element ist von einem höhern Range, als ein anderes, wenn es im Index eine spätere Stelle einnimmt, als dieses; es ist ein niedrigeres, wenn es eine frühere Stelle daselbst einnimmt. So ist für den Index (a, b, c, d) das Element c ein höheres als a, und b ist ein niedrigeres als d. Für den Index (1, 2, 3, 4, 5) ist 4 ein höheres Element als 2, und 3 ein niedrigeres als 5. Die Complexion, in welcher kein niedrigeres Element auf ein höheres folgt, ist eine gut geordnete.

Man unterscheidet ebenfalls höhere und niedrigere Complexionen. Folgen in zwei Complexionen von der Linken zur Rechten dieselben Elemente in derselben Ordnung und es folgt dann in der einen derselben ein Element höheren Ranges, als in der andern, so ist jene von einem höhern Range als diese. So ist abced von höherem Range als abcde; es ist adbec eine höhere Form als abdec; ebenso ist bac höher als abc, 4123 höher als 1234 u. s. w.

Digitized by Google

Folgen die Complexionen so auf einander, daß nie eine höhere einer niedrigeren vorangeht, so sagt man, sie seien gut geordnet.

Die Verbindung oder Zusammenstellung der gegebenen Elemente geschieht entweder so, daß jede Complexion alle Elemente enthält, wo denn die einzelnen Complexionen sich dadurch von einander unterscheiden, daß in jeder eine andere Aufeinanderfolge der Elemente stattfindet, oder es kommen in den einzelnen Complexionen nur einige der gegebenen Elemente mit einander verbunden vor. Complexionen der ersten Art heißen Permutationen und die Complexionen der letzteren Art sind Variationen, wenn jede Complexion mit allen ihren Permutationen vorkommt; ist letzteres nicht der Fall, so heißen sie Combinationen. So sind z. B. von den Elementen 1, 2, 3, 4 die Complexionen

1234, 1243, 1324 u. s. w. Permutationen
123, 132, 213 u. s. w. Variationen
123, 124, 134, 234 u. s. w. Combinationen.

Daher gibt es also drei Arten von Complexionen und die 3 combinatorischen Grundoperationen sind demnach: Das Permutiren, Combiniren und Variiren.

Das Permutiren.

§. 449. Die gegebenen Elemente so oft als möglich in einer andern Ordnung zusammenstellen, so daß in jeder Complexion alle Elemente des Index zugleich vorkommen, heißt Permutiren oder Versetzen.

Jede dieser Complexionen wird Permutationsform oder einfach Permutation genannt. Die Forderung, die Permutationen gegebener Elemente zu bilden, wird bezeichnet durch das Symbol:

Perm (a b c d . . .).

Für die beiden Elemente a und b finden nur zwei Versetzungen statt, nämlich: ab, ba.

Tritt noch ein drittes Element c hinzu, also Perm (a b c), so kann dies sowohl bei ab als auch bei ba entweder an die erste Stelle rechts oder zwischen a und b oder an die erste Stelle links zu stehen kommen, woraus 6 neue Verbindungen hervorgehen, nämlich:

abc bac cab
acb bca cba

Bei drei verschiedenen Elementen finden also $3 \times 2 = 6$ Versetzungen statt. Kömmt zu abc noch ein viertes Element d hinzu, so kann dies, wie man leicht sieht, in Bezug auf abc eine vierfach verschiedene Stellung erhalten, nämlich: abcd, abdc, adbc, dabc.

Digitized by Google

Da dies nun für jede der vorigen 6 Versetzungen gilt, so gibt es im Ganzen $4 \times 6 = 4 \times 3 \times 2 = 24$ Permutationen aus 4 Elementen; nämlich:

$$\text{Perm (abcd)} = \left\{ \begin{array}{cccc} abcd & bacd & cabd & dabc \\ abdc & badc & cadb & dacb \\ acbd & bcad & cbad & dbac \\ acdb & bcda & cbda & dbca \\ adbc & bdac & cdab & dcab \\ adcb & bdca & cdba & dcba \end{array} \right.$$

Werden die 4 Elemente abcd noch um ein fünftes e vermehrt, so kann dies in jeder der vorigen 24 Versetzungen von abcd eine fünffach verschiedene Stelle erhalten, da z. B. aus abcd folgende 5 Permutationen dadurch entstehen, nämlich

abcde, abced, abecd, aebcd, eabcd

Demnach resultiren aus den 24 Permutationen durch Hinzufügung eines fünften Elementes $5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 120$ Permutationen, die so geordnet werden müssen, daß immer jede folgende Complexion höher ist, als die zunächst vorhergehende. Daher ist:

$$\text{Perm (abcde)} = \left| \begin{array}{ccccc} abcde & bacde & cabde & dabce & eabcd \\ abced & baced & cabed & dabec & eabdc \\ abdce & badce & cadbe & dacbe & eacbd \\ abdec & badec & cadeb & daceb & eacdb \\ abecd & baecd & caebd & daebc & eadbc \\ abedc & baedc & caedb & daecb & eadcb \\ acbde & bcade & cbade & dbace & ebacd \\ acbed & bcaed & cbaed & dbaec & ebadc \\ acdbe & bcdae & cbdae & dbcae & ebcad \\ acdeb & bcdea & cbdea & dbcea & ebcda \\ acebd & bcead & cbead & dbeac & ebdac \\ acedb & bceda & cbeda & dbeca & ebdca \\ adbce & bdace & cdabe & dcabe & ecabd \\ adbec & bdaec & cdaeb & dcaeb & ecadb \\ adcbe & bdcae & cdbae & dcbae & ecbad \\ adceb & bdcea & cdbea & dcbea & ecbda \\ adebc & bdeac & cdeab & dceab & ecdab \\ adecb & bdeca & cdeba & dceba & ecdba \\ aebcd & beacd & ceabd & deabc & edabc \\ aebdc & beadc & ceadb & deacb & edacb \\ aecbd & becad & cebad & debac & edbac \\ aecdb & becda & cebda & debca & edbca \\ aedbc & bedac & cedab & decab & edcab \\ aedcb & bedca & cedba & decba & edcba \end{array} \right|$$

§. 450. Um also aus gegebenen Elementen alle möglichen Permutationen herzuleiten, bilde man die erste Form, indem man

Digitized by Google

die Elemente in der Ordnung des Index aufstellt, so daß kein höheres Element einem niedrigeren vorangeht. Aus dieser Form bilde man die zweite, aus der zweiten die dritte und jede folgende aus der vorhergehenden, indem man, von der Rechten zur Linken fortschreitend, das erste niedere Element aufsucht, welches einem höheren vorangeht, dieses niedere dann dadurch so wenig als möglich erhöht, daß man von den ihm nach rechts folgenden das nächst höhere nimmt, an seine Stelle setzt und das niedrigere selbst mit den noch übrigen nach rechts stehenden in alphabetischer oder natürlicher Ordnung folgen läßt; dies setze man so lange fort, bis kein niedrigeres Element mehr vorhanden ist, das einem höhern vorangeht, und die Elemente also in der umgekehrten Ordnung des Index aufeinander folgen. Bei dieser Operation kann keine Form übersprungen werden, weil jede so wenig als möglich erhöht werden muß. Auch kann bei diesem Verfahren eine und dieselbe Form nicht mehreremale vorkommen, weil jede folgende höher ist, als die vorhergehende. Eine niedrigere als die erste und eine höhere, als die letzte Complexion kann es nicht geben.

§. 451. Wie wir in §. 449 gesehen, geben 2 Elemente $1.2 = 2$; drei Elemente $1.2.3 = 6$; vier Elemente $1.2.3.4 = 24$; fünf Elemente $1.2.3.4.5 = 120$; sechs Elemente also $1.2.3.4.5.6 = 720$ Permutationen u. s. w.; daraus folgt allgemein, daß die Anzahl aller Permutationen aus n verschiedenen Elementen der nfachen Anzahl der Permutationen aus $n-1$ verschiedenen Elementen gleich ist. Wird die Anzahl aller Permutationen aus n Elementen mit $P(n)$ bezeichnet, so ist also

$$P(n) = nP(n-1)$$

Denn man kann die Permutationen aus n Elementen dadurch aus den Complexionen von $n-1$ Elementen ableiten, daß man das n^{te} Element in jeder derselben nach einander alle Stellen einnehmen läßt, wie aus den besondern Beispielen in §. 449 ersichtlich ist. Ein n^{tes} Element kann aber in Complexionen aus $n-1$ Elementen n verschiedene Stellen einnehmen. Da man also aus jeder der $P(n-1)$ Formen n neue zu n Elementen erhält, so beträgt die Anzahl aller neuen Complexionen $nP(n-1)$, weshalb also $P(n) = nP(n-1)$. Da nun

$$P(1) = 1$$

so ist:

$$P(2) = 2.P(1) = 2.1$$
$$P(3) = 3.P(2) = 3.2.1$$
$$P(4) = 4.P(3) = 4.3.2.1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$P(n-1) = (n-1)P(n-2) = (n-1)(n-2)\ldots 3.2.1$$
$$P(n) = nP(n-1) = n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1$$
$$P(n+1) = (n+1)P(n) = (n+1).n(n-1)\ldots 3.2.1.$$

Das Produkt der natürlichen Zahlen $1.2.3.4\ldots.(n-1)n$

Digitized by Google

wird sehr bequem durch das von Kramp angenommene Zeichen n! (gelesen: „Faktorielle n") bezeichnet; daher kann man auch setzen:

$$P(n) = n!$$

Demnach ist: $P(8) = 8! = 1.2.3.4.5.6.7.8 = 40320$

$$P(9) = 9P(8) = 9.40320 = 362880$$

$$P(10) = 10P(9) = 10.362880 = 3628800$$

$$P(11) = 11P(10) = 11.3628800 = 39916800$$

$$P(12) = 12P(11) = 12.39916800 = 479001600.$$

§. 452. In dem bisherigen galt die Voraussetzung, daß alle Elemente von einander verschieden waren. Indessen können auch unter den Elementen mehrere gleiche einer Art sein und es erübrigt daher noch zu untersuchen, wie groß in diesem Falle die Anzahl der Permutationen ist. Zwei gleiche Elemente a und a gestatten nur die eine Versetzung aa. Wären die Elemente verschieden, so entständen 2! Permutationen, da sie aber gleich sind, so entsteht nur die Hälfte derselben, nämlich 2!:2! = 1. Tritt zu den beiden gleichen Elementen aa noch b hinzu, so kann dasselbe in Bezug auf aa eine dreifache Stellung erhalten, so daß also die 3 Formen: aab, aba, baa entstehen. Nun geben 3 verschiedene Elemente 3! Permutationen; folglich 2 gleiche und 1 ungleiches nur 3!:2! = 3 Permutationen. Fügt man diesen dreien noch ein viertes c hinzu, so kann c in jeder der 3 Formen eine vierfache Stellung erhalten, also dadurch aus jeder der 3 Permutationen 4 neue gebildet werden, welche heißen:

aabc, aacb, abac, abca, acab, acba
baac, baca, bcaa, caab, caba, cbaa

Vier verschiedene Elemente geben 4! Permutationen; mithin geben 4 Elemente worunter zwei gleiche einer Art sind 4!:2! = 3.4 = 12 Permutationen. Es seien ferner die Elemente aabbb gegeben, wobei außer 2 gleichen einer Art noch 3 gleiche einer andern Art vorkommen. Dieselbe liefern folgende Permutationen:

aabbb, ababb baabb bbaab
abbab babab bbaba
abbba babba bbbaa

Nun geben 5 verschiedene Elemente 5! Permutationen. Sind darunter 2 gleiche, so entstehen nur 5!:2! Sind außerdem noch 3 gleiche andrer Art vorhanden, so entsteht, wo aus 3 verschiedenen Elementen 3! Permutationen gebildet werden können, jetzt nur eine; folglich muß, um die richtige Anzahl der Permutationen zu erhalten, 5!:2! noch durch 3! dividirt werden, weshalb

$$\text{Perm (aabbb)} = 5!:(2!\ 3!) = 10.$$

Allgemein: Alle Permutationen aus n Elementen, unter denen sich p gleiche befinden, seien gebildet. Ihre Anzahl, die mit x bezeichnet werde, beträgt weniger, als die Anzahl der Complexionen aus n verschiedenen Elementen. Läßt man nun die p gleichen

Digitized by Google

Elemente verschieden werden, so werden sich aus jeder dieser x Formen noch neue Formen bilden lassen. Bei p gleichen Elementen erhält man aus einer Form P(p) Formen, aus den x Formen also x.P(p) Formen. Dies wären aber dann alle Permutationen für n verschiedene Elemente und wir hätten:

$$x.P(p) = P(n);\ \text{folglich}\ x = \frac{P(n)}{P(p)}.$$

Befinden sich unter den n Elementen auch noch q gleiche einer andern Art, und lassen wir diese auch verschieden werden, so erhalten wir aus jeder der x.P(p) Formen wieder P(q) neue, aus allen also x.P(p).P(q) Formen. Ebenso erhalten wir für r gleiche Elemente einer dritten Art aus den x.P(p).P(q) Formen x.P(p).P(q).P(r) neue Formen. Da dieses dann alle Permutationen für n verschiedene Elemente sind, so haben wir:

$$x.P(p).P(q).P(r) = P(n);\ \text{folglich}$$

$$x = \frac{P(n)}{P(p).P(q).P(r)} = \frac{1.2.3.....(n-1)n}{1.2.3..p.1.2.3..q.1.2.3..r}$$

$$= \frac{n!}{p!\,q!\,r!}$$

Hieraus folgt, daß die Anzahl aller Permutationen aus n Elementen, unter denen sich p gleiche befinden, gleich ist der Anzahl der Permutationen aus n verschiedenen Elementen, dividirt durch die Permutationszahl für p verschiedene Elemente, und wenn sich unter den n Elementen außer den p gleichen noch q gleiche einer zweiten und r gleiche einer dritten Art befinden, dividirt durch das Produkt aus den Permutationszahlen für p, q und r verschiedene Elemente.

§. 453. Bei der Aufstellung der Permutationsformen bleiben, wie aus §. 449 hervorgeht, nach dem Bildungsgesetz die nach links stehenden Elemente so lange an ihrer Stelle, bis nach rechts hin keine Versetzungen mehr möglich sind. So bleibt auch in der Complexion abcde das erste Element a so lange an der Spitze der Complexionen, bis aus den n—1 stehenden Elementen keine Complexionen mehr gebildet werden können, bis also alle Permutationen aus den n—1 Elementen gebildet sind. Aus n—1 Elementen können aber P(n—1) Formen gebildet werden, also steht das Element a an der Spitze von P(n—1) Formen. Dann tritt das zweite Element b an die Spitze und behält diese Stelle ebenfalls so lange, bis alle Permutationen aus den rechts stehenden n—1 Elementen gebildet sind, steht also wieder an der Spitze von P(n—1) Complexionen. So treten nach und nach alle n Elemente an die Spitze einer Anzahl von Complexionen, die der Anzahl aller Permutationen aus n—1 Elementen gleich ist. Dadurch

Digitized by Google

werden nun alle Permutationen aus n Elementen in n Abtheilungen gebracht, die man Ordnungen nennt.

§. 454. Auflösungen der Beispiele in Heis §. 88.
Die Nummer 1 bis 7 einschließlich sind in den vorstehenden §§. erörtert worden.

8. In α) lassen sich die Faktoren des aus 8 Elementen bestehenden Produktes $8! = 1.2.3.4.5.6.7.8 = 40320$ mal versetzen.

β) $\frac{5!}{2!3!} = \frac{1.2.3.4.5}{1.2.1.2.3} = 2.5 = 10$ nach §. 452.

γ) $\frac{13!}{4!7!2!} = \frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13}{1.2.3.4.1.2.3.4.5.6.7.1.2} = 3.5.11.12.13 = 25740.$

δ) $\frac{9!}{3!3!3!} = \frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9}{1.2.3.1.2.3.1.2.3} = 5.6.7.8 = 1680.$

ε) $\frac{15!}{7!5!2!} = 7.9.10.11.12.13 = 1081080.$

ζ) $\frac{10!}{2!2!3!2!} = 3.5.7.8.9.10 = 75600.$

η) $\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{1.2.3...(n-1)n}{1.2.3...(n-1)} = \frac{n}{1}.$

ϑ) $\frac{n!}{(n-2)!2!} = \frac{1.2..(n-2)(n-1)n}{1.2...(n-2).1.2.} = \frac{(n-1)n}{1.2}.$

ι) $\frac{n!}{(n-3)!3!} = \frac{1.2...(n-3)(n-2)(n-1)n}{1.2...(n-3).1.2.3} = \frac{(n-2)(n-1)n}{1.2.3}.$

κ) $\frac{n!}{(n-x)!x!} = \frac{1.2...(n-x)(n-x+1)(n-x+2)..n}{1.2...(n-x).1.2.3.....x} =$

$= \frac{(n-x+1)(n-x+2)..n}{1.2.3...x} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-x+1)}{1.2.3.....x}.$

λ) $\frac{n!}{(n-5)!3!2!} = \frac{1.2.3...(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n}{1.2.3...(n-5).1.2.3.1.2}$

$= \frac{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n}{1.2.3.1.2}.$

μ) $\frac{n!}{(n-x-y)!x!y!} = \frac{(n-x-y+1)(n-x-y+2)...n}{1.2.3..x.1.2.3..y}.$

9. Hier soll die Permutationsstufe aus der Permutation bestimmt werden; d. h. es soll angegeben werden, die wievielte Complexion eine gegebene ist. Wenn die gegebene Form dbafce ist, so ist der Index abcdef. Nach §. 453 befindet sich die gegebene Form in der Ordnung d, da d an der

Digitized by Google

Spitze steht, es sind also die Ordnungen a, b, c vorhergegangen. Jede Ordnung enthält $P(n-1) = P(5) = 120$ Complexionen, die drei vorhergehenden Ordnungen enthalten deren also $3.120 = 360$. Wir betrachten jetzt nur die Ordnung d, deren erste Form dabcef ist, da dem eben an die Spitze getretenen d die übrigen Elemente in alphabetischer Ordnung folgen. Da d in dieser ganzen Ordnung an der Spitze bleibt, so kann dieses Element wegbleiben und abcef als Index und bafce als gegebene Form angesehen werden. Es wird nun wieder in derselben Weise verfahren. In dieser Form steht b an der Spitze und sie befindet sich also in der Ordnung b. Der Ordnung b ist aber die Ordnung a vorangegangen. Jede dieser Ordnungen enthält, da hier $n = 5$ ist, $P(n-1) = P(4) = 24$ Formen, der Ordnung b gehen also 24 Formen voran. Da sich die gegebene Form in der Ordnung b befindet, so betrachten wir wieder nur diese. In derselben folgen dem b die übrigen Elemente in der ersten Form in alphabetischer Ordnung, ihre erste Form ist daher bacef. Es bleibt b in der ganzen Ordnung an der Spitze, daher lassen wir es ganz weg und sehen acef als Index und afce als gegebene Form an. In der gegebenen Form befindet sich a an der Spitze und sie befindet sich daher in der Ordnung a, welcher keine andere Ordnung vorangeht; zu den vorangehenden Formen kommen also hierdurch keine neuen hinzu. Wir scheiden a aus und erhalten cef als Index und fce als gegebene Form. Hier steht f an der Spitze und es sind also die Ordnungen c und e vorhergegangen. Jede derselben hat 2, beide also $2.2 = 4$ Formen. Nach Weglassung des Elementes f bleibt ce als neuer Index und ce ebenfalls als gegebene Form, mithin ist die gegebene Form dbafce die $360 + 24 + 4 + 1 = 389^{te}$. Vorstehende Entwickelung kann auch in folgender Weise kurz dargestellt werden.

Index: abcdef. Gegebene Form: dbafce.

Vor Ordnung *d*	abcef	gehen her	$3.P(5) = 360$	Formen.
b	acef	„ „	$1.P(4) = 24$	„
a	cef	„ „	$0.P(3) = 0$	„
f	ce	„ „	$2.P(2) = 4$	„
ce	gegebene Form		$= 1$	„

Daher ist die gegebene Form dbafce die 389te.

Digitized by Google

10. Index: abcdefghiklmn. Gegebene Form: hdflaimbgeknc.

Vor Ordnung				
h dflaimbgeknc	gehen her	7.P(12) =	3353011200	Formen.
d flaimbgeknc	„ „	3.P(11) =	119750400	„
f laimbgeknc	„ „	4.P(10) =	14515200	„
l aimbgeknc	„ „	7.P(9) =	2540160	„
a imbgeknc	„ „	0.P(8) =	0	„
i mbgeknc	„ „	4.P(7) =	20160	„
m bgeknc	„ „	5.P(6) =	3600	„
b geknc	„ „	0.P(5) =	0	„
g eknc	„ „	2.P(4) =	48	„
e knc	„ „	1.P(3) =	6	„
k nc	„ „	1.P(2) =	2	„
n c	„ „	1.P(1) =	1	„
c	„ „	0.P(0) =	0	„

Der gegebenen Form gehen vorher 3489840777 Formen, mithin ist sie selber die 3489840778te.

11. α) Umkehrung der vorigen Aufgabe; denn hier ist die Permutationsstufe gegeben, und es soll die Permutationsform gesucht werden, z. B. wie heißt die 76te Permutation von abcde?

Der gesuchten Form gehen 75 Formen voraus. Alle Complexionen der 5 Elemente zerfallen in 5 Ordnungen, von denen jede aus P(4)=24 Formen besteht. Die 75 Formen sind daher die von 75:24 = 3 Ordnungen und es fallen noch 75 — 72 = 3 Formen in die vierte Ordnung. In der vierten Ordnung steht d in allen, also auch der gesuchten Form an der Spitze und hiermit ist also das erste Element gefunden. Die erste Form der Ordnung d ist dabce; wir haben daher den noch fehlenden Theil der gesuchten Form unter den Permutationen von abce zu bestimmen. Die Permutationen von abce bilden 4 Ordnungen und jede derselben enthält P(3) = 6 Formen. Es gehen der gesuchten Form nur noch 3 Formen voraus, daher befindet sie sich in der ersten der 4 Ordnungen, deren erste Form abce. Das zweite gesuchte Element ist daher a und der übrige Theil der gesuchten Form ist eine der Permutationen von bce. Jede der 3 Ordnungen, in welche diese Formen zerfallen, enthält P(2) = 2 Formen. Es gehen der gesuchten Form daher 3:2 = 1 Form voraus und dieselbe befindet sich also in der Ordnung cbe; das dritte gesuchte Element ist daher c und der Rest ist eine der Permutationen von be. Da nur noch eine Form vorhergeht, so ist be diese vorhergehende und der Rest der gesuchten Form daher eb; somit heißt die gesuchte Form: daceb.

Digitized by Google

Schema zu einem abgekürzten Verfahren.

75 : {P(4) = 24} = 3 Ordnungen vor *d* abce
72
3 : {P(3) = 6} = 0 „ „ *a* bce
0
3 : {P(2) = 2} = 1 „ „ *c* be
2
1 : {P(1) = 1} = 1 „ „ *eb*

also gehört eb zur gesuchten Form, die also daceb ist.

11. *β*) Index: ghiklmn.

1831 : {P(6) = 720} = 2 Ordnungen vor *i* ghklmn
1440
391 : {P(5) = 120} = 3 „ „ *l* ghkmn
360
31 : {P(4) = 24} = 1 „ „ *h* gkmn
24
7 : {P(3) = 6} = 1 „ „ *k* gmn
6
1 : {P(2) = 2} = 0 „ „ *g* mn
0
1 : {P(1) = 1} = 1 „ „ *nm*

Die verlangte Form ist daher ilhkgnm.

11. *γ*) Index: opqrstuvx.

299317 : {P(8) = 40320} = 7 Ordn. vor *v* opqrstux
282240
17077 : {P(7) = 5040} = 3 „ „ *r* opqstux
15120
1957 : {P(6) = 720} = 2 „ „ *q* opstux
1440
517 : {P(5) = 120} = 4 „ „ *u* opstx
480
37 : {P(4) = 24} = 1 „ „ *p* ostx
24
13 : {P(3) = 6} = 2 „ „ *t* osx
12
1 : {P(2) = 2} = 0 „ „ *o* sx
0
1 : {P(1) = 1} = 1 „ „ *xs*

Daher ist die gesuchte Permutation vrquptoxs.

Digitized by Google

11. δ) Index: abcdefghiklmn.

4237758153 : {P(12)=479001600} = 8 Ord. v. *i* abcdefghklmn
3832012800

405745353 : {P(11)= 39916800} =10 „ *m* abcdefghkln
399168000

6577353 : {P(10)= 3628800} = 1 „ *b* acdefghkln
3628800

2948553 : {P(9) = 362880} = 8 „ *l* acdefghkn
2903040

45513 : {P(8) = 40320} = 1 „ *c* adefghkn
40320

5193 : {P(7) = 5040} = 1 „ *d* aefghkn
5040

153 : {P(6) = 720} = 0 „ *a* efghkn
0

153 : {P(5) = 120} = 1 „ *f* eghkn
120

33 : {P(4) = 24} = 1 „ *g* ehkn
24

9 : {P(3) = 6} = 1 „ *h* ekn
6

3 : {P(2) = 2} = 1 „ *k* en
2

1 : {P(1) = 1} = 1 „ *ne*

Daher ist die gesuchte Permutation imblcdafghkne.

12. Die Bestimmung der Permutationsstufe ist weniger einfach, wenn unter den gegebenen Elementen mehrere gleiche vorkommen, weil dann nicht alle vorhergehenden Ordnungen gleich viel Permutationen enthalten, indem die gleichen Elemente nicht unter sich versetzt werden können und daher jede Ordnung besonders untersucht werden muß. Man hat dabei zu berücksichtigen, daß die gleichen Elemente nur eine einzige Ordnung bilden. Diese Bemerkung gilt für das hier und in der folgenden Nummer zu behandelnde Beispiel.

Index: aabbbc. Gegebene Form: cbabab.

Da die gegebene Form mit c beginnt, so liegt dieselbe in der Ordnung c und es gehen ihr die Ordnungen a und b voraus. Die Ordnung a enthält, weil n = 6, ist: 5!:3! = 20

Digitized by Google

und die Ordnung b enthält $5!:(2!\,2!) = 30$ Complexionen. Demnach gehen der Ordnung c $20 + 30 = 50$ Complexionen voraus. Nun gehen in der Ordnung c den mit cb beginnenden Formen $4!:3! = 4$ Formen voraus, die mit ca anfangen. Lassen wir jetzt aa auf cb folgen, so gibt dies $2!:2! = 1$ Form, nämlich *cbaa*bb. Vertauschen wir hierin das zweite a mit b, so entsteht die gegebene Form, welches daher die $50+4+1+1 = 56^{te}$ Permutation von aabbbc ist.

13. Index aaaabbcccd.

Suchen wir zunächst die Ordnung zu bestimmen, in welcher sich die verlangte Permutation befindet. Dazu gelangen wir, indem wir die Anzahl der Complexionen in den Ordnungen a, b, c u. s. w. ermitteln. Der Complexionen, die mit a beginnen, gibt es $\frac{9!}{3!\,2!\,3!} = 3.5.6.7.8 = 5040$ und die mit b anfangen $\frac{9!}{4!\,3!} = 5.7.8.9 = 2520$. Diese beiden Ordnungen geben also zusammen $5040 + 2520 = 7560$ Complexionen; sie erreichen mithin noch nicht die Zahl der gesuchten Complexion, weshalb sich diese nicht in den Ordnungen a und b befindet. Untersuchen wir jetzt die Ordnung c; sie gibt: $\frac{9!}{4!\,2!\,2!} = 2.5.6.7.9 = 3780$ Complexionen, mithin in Vereinigung mit denen aus den Ordnungen a und b, mehr als der gesuchten Complexion vorausgehen, woraus folgt, daß die gesuchte Complexion mit dem Element c beginnt. Wir haben daher als erste Form

c aaaabbccd

und es gehen der gesuchten Complexion noch $8756 - 7560 = 1196$ Complexionen voraus. Der Complexionen, die mit *ca* beginnen, gibt es $\frac{8!}{3!\,2!\,2!} = 5.6.7.8 = 1680$; also mehr als erforderlich ist; folglich ist das zweite Element a und wir haben jetzt:

ca aaabbccd

und es gehen noch 1196 Complexionen voraus.

Von den übrigen 8 Elementen gibt es $\frac{7!}{2!\,2!\,2!} = 630$, die mit a und $\frac{7!}{3!\,2!} = 420$ Complexionen, die mit b beginnen,

Digitized by Google

also gehen der gesuchten Complexion noch $1196-(630+420)=146$ vorher. Der mit c beginnenden Compl. gibt es $\frac{7!}{3!\,2!}=420$, also zu viel, folglich ist das dritte Element der gesuchten Compl. c und wir haben sonach

cac aaabbcd

und 146 Compl., die der gesuchten vorhergehen.

Die übrigen 7 Elemente geben $\frac{6!}{2!\,2!}=180$, die mit a; ferner $\frac{5!}{2!}=60$, die mit aa und $\frac{5!}{2!}=60$, die mit ab beginnen; es bleiben also noch $146-(60+60)=26$ vorhergehende Compl. und das vierte Element der gesuchten ist a, weshalb wir jetzt haben:

caca aabbcd

Es gehen von jetzt an der gesuchten Compl. noch 26 Compl. vorher.

Die übrigen 6 Elemente geben $5!:2!=60$, die mit a; ferner $5!:2!=60$, die mit b anfangen und $\frac{5!}{2!\,2!}=30$ mit c. Alle 3 Ordnungen liefern mehr Compl. als nöthig ist; da aber die Anzahl der mit c beginnenden Compl. weniger groß ist, als jede der beiden andern, so ist c das fünfte Element der gesuchten Compl. und wir haben jetzt:

cacac aabbd

und es gehen noch 26 Compl. der gesuchten vorher.

Die übrigen 5 Elemente geben $4!:2!=12$, die mit a und $4!:2!=12$, die mit b anfangen und es bleiben noch $26-(12+12)=2$ der gesuchten vorhergehenden Complexionen. Der Compl., worin d an der Spitze steht, sind $\frac{4!}{2!\,2!}=6$ also zu viel, folglich ist das sechste Element der gesuchten Compl. d und wir haben somit:

cacacd aabb

und es gehen noch 2 Complexionen der gesuchten voraus.

Die übrigen 4 Elemente geben $3!:2!=3$ Compl., die mit a beginnen, also zu viel; folglich ist das siebente Element der gesuchten Compl. a und wir haben:

cacacda abb

und es gehen noch 2 Complexionen vorher.

Digitized by Google

Die übrigen 3 Elemente geben 2!:2! = 1 Compl., die mit a beginnt; es bleiben daher noch 2 — 1 = 1 Complexion, die der gesuchten vorhergeht; ferner gibt es 2! = 2 Compl., die mit b beginnen; also zu viel; demnach ist das achte Element b und wir haben

cacacdab ab,

von wo noch 1 Complexion vorhergeht, die mit a beginnt, weshalb das neunte Element b ist und wir haben jetzt

cacacdabba,

welches die verlangte Permutation ist.

14. In einer Complexion bilden zwei Elemente eine Inversion, wenn das höhere Element dem niedrigeren vorangeht. So kommen in allen vorhergehenden Permutationsformen, mit Ausnahme in der ersten, Inversionen vor. Hiernach enthält

α) die Complexion bdca die vier Inversionen ba, ca, da, dc

β) „ „ fcedab die 12 Inversionen: ca, cb, da, db, ea, eb, ed, fa, fb, fc, fd, fe.

15. Durch Vertauschung von 2 Elementen ändert sich die Anzahl der in einer Complexion vorhandenen Inversionen um eine ungerade Zahl.

Sind nämlich x und y die zu vertauschenden Elemente, wobei y höher ist, als x; sind ferner die Gruppen A, B, C diejenigen Gruppen, die in der gegebenen Complexion durch x und y getrennt werden, so ist die Differenz der Anzahl von Inversionen, welche in AxByC und AyBxC vorhanden sind, gleich der Differenz der Anzahl von Inversionen, die xBy und yBx enthalten. Denn angenommen, die Gruppe B enthalte m Elemente, wovon α höher als x und β Elemente höher als y seien. Unter dieser Voraussetzung sind m — α Elemente der Gruppe B niedriger als x, sie bilden mit x also m — α Inversionen, und weil β Elemente höher als y vorhanden sind, so entstehen dadurch β Inversionen, also im Ganzen m — α + β Inversionen, außer denen, welche in der Gruppe B schon vorhanden sind. In der Complexion yBx hingegen sind m — β Elemente niedriger als y, liefern also m — β Inversionen, und weil α Elemente höher als x, so entstehen dadurch α Inversionen und weil das höhere Element y dem niedrigeren x vorangeht, so entsteht überdies noch eine Inversion mehr, also sind außer den schon in der Complexion B vorhandenen Inversionen, durch die Vertauschung der beiden Elemente x und y im Ganzen

Digitized by Google

$m-\beta+\alpha+1$ Inversionen entstanden. Die Differenz dieser Inversionen ist nun:

$$m-\beta+\alpha+1-(m-\alpha+\beta)=2(\alpha-\beta)+1,$$

welches in jedem Falle eine ungrade Zahl ist.

Z. B. Die Complexion edabc hat 7 Inversionen, nämlich ed, ea, eb, ec, da, db, dc. Vertauscht man darin das Element a mit c, so erhalten wir die Complexion edcba mit 10 Inversionen; es treten nämlich durch diese Vertauschung zu den 7 Inversionen der ersten Complexion noch die 3 Inversionen cb, ca, ba hinzu.

Bildet man also nach und nach alle Permutationen durch Vertauschung von jedesmal 2 Elementen, so erhalten die aufeinander folgenden Permutationen abwechselnd eine grade und ungrade Anzahl von Inversionen. Da nun die Anzahl aller Permutationen grade ist, so hat die eine Hälfte der Permutationen eine grade und die andere Hälfte eine ungrade Anzahl von Inversionen. Hierauf beruht die richtige Ausrechnung einer Determinante, wovon später die Rede sein wird.

Das Combiniren und Variiren.

(Heis, §. 89.)

§. 455. Beim Permutiren kam es darauf an, aus den gegebenen Elementen so viele von einander verschiedene Complexionen zu bilden, als möglich war; außerdem mußte jede Complexion alle vorhandenen Elemente, aber in verschiedener Aufeinanderfolge enthalten. Das Wesen des Combinirens aber besteht darin, aus den gegebenen Elementen Gruppen aus einem, zwei, drei, vier Elementen u. s. w. zu bilden, so also, daß nicht immer alle gegebenen Elemente zugleich in einer und derselben Complexion vorkommen. So liefern die beiden Elemente a, b, die beiden Permutationsformen ab und ba, aber nur die eine Combinationsform ab, weil hier keine Inversionen stattfinden dürfen. Aus den 3 Elementen a, b, c entstehen die 6 Permutationen abc, acb, bca, bac, cab, cba; bildet man aber aus diesen Elementen Gruppen von je 2 Elementen, so erhält man blos die 3 Combinationen ab, ac, bc und dieselben Elemente liefern nur eine Combinationsform von 3 Elementen, nämlich abc. Demnach heißt combiniren: aus gegebenen Elementen, so oft es angeht, gleich viel, aber jedesmal andere Elemente zu einer gut geordneten Complexion vereinigen. Die Menge der Elemente, aus welchen jede einzelne Combinationsform

Digitized by Google

bestehen soll, wird durch die Combinationsklasse bestimmt und der numerische Ausdruck dieser Menge heißt Klassenexponent. Die Combinationen zur ersten, zweiten, dritten, vierten u. s. w. Klasse werden auch bezüglich Unionen, Amben, Ternen, Quaternen, Quinternen u. s. w. genannt. Wenn jedes der gegebenen Elemente in einer Combinationsform so oft vorkommen darf, als der Klassenexponent Einheiten enthält, so entstehen Combinationen mit Wiederholung. Wird aber jedes Element bei jeder Combinationsform nicht mit sich selbst, sondern jedesmal mit einem oder mehreren andern Elementen verbunden, so erhält man Combinationen ohne Wiederholung. Der symbolische Ausdruck für Combinationen von n Elementen ohne Wiederholung zur r^{ten} Klasse ist $C(n)_r$ und mit Wiederholung $^{w}C(n)_r$.

2. Sollen alle Combinationen der zweiten und dritten Classe ohne Wiederholung d. h. die Amben und Ternen für die Elemente a, b, c, d gebildet werden, so verbinde man zunächst das Element a mit jedem der 3 folgenden, wodurch wir erhalten: ab, ac, ad. Hierauf verbinde man b mit jedem der zwei folgenden Elemente; dies gibt die Combinationsformen bc, bd; verbindet man nun das dritte Element c mit dem vierten d, so entsteht cd. Bezeichnen wir die mit a, b, c beginnenden Combinationen bezüglich als die erste, zweite, dritte Ordnung, so enthält die

1. Ordnung: ab, ac, ad = 3
2. „ bc, bd = 2 } = 6 Combinationen zur 2. Cl.
3. „ cd = 1

Verbindet man je 3 von einander verschiedene Elemente zu einander, so liefern die 4 Elemente folgende Combinationen zur 3. Classe:

In der 1. Ordnung: abc, abd, acd = 3
„ „ 2. „ bcd = 1 } = 4 Ternen.

3. Setzt man die Elemente einzeln in der Ordnung, wie sie alphabetisch aufeinander folgen, so hat man die Classe der Unionen. Der gegebenen Elemente sind 6, dieselben geben also auch 6 Unionen, nämlich

a, b, c, d, e, f.

Die sechs Elemente geben 15 Combinationen zur 2. Classe, nämlich:

In der 1. Ordnung: ab, ac, ad, ae, af = 5
„ „ 2. „ bc, bd, be, bf = 4
„ „ 3. „ cd, ce, cf = 3
„ „ 4. „ de, df = 2
„ „ 5. „ ef = 1

Digitized by Google

Dieſelben Elemente geben 20 Combinationen zur dritten Claſſe; es ſind folgende:

abc, abd, abe, abf, acd, ace, acf, ade, adf, aef = 10
bcd, bce, bcf, bde, bdf, bef = 6
cde, cdf, cef = 3
def = 1.

Aus denſelben Elementen erhalten wir 15 Combinationen zur vierten Claſſe, nämlich:

abcd, abce, abcf, abde, abdf, abef, acde, acdf, acef, adef = 10
bcde, bcdf, bcef, bdef = 4
cdef = 1.

Die 6 Elemente geben 6 Combinationen zur fünften Claſſe, nämlich:

abcde, abcdf, abcef, abdef, acdef = 5
bcdef = 1.

4. Die 4 Elemente geben 4 Unionen, nämlich:

a, b, c, d.

Setzt man allen Unionen das erſte Element a, alsdann vom zweiten Element b an, allen dieſes Element, vom dritten an das Element c u. ſ. w., ſo erhält man die Combinationen zur zweiten Claſſe mit Wiederholung. Ihre Anzahl beträgt 10, nämlich:

aa, ab, ac, ad = 4
bb, bc, bd = 3
cc, cd = 2
dd = 1.

Setzt man allen Combinationen zur zweiten Claſſe zuerſt das Element a, vor, dann von b an das Element b, von c an das Element c und von d an das Element d vor, ſo erhält man die Combinationen mit Wiederholung zur dritten Claſſe, nämlich:

aaa, aab, aac, aad, abb, abc, abd, acc, acd, add = 10
bbb, bbc, bbd, bcc, bcd, bdd = 6
ccc, ccd, cdd = 3
ddd = 1.

Man bildet aus den Combinationen mit Wiederholung zur dritten Claſſe die zur vierten, indem allen 20 Combinationen das Element a, den übrigen 6+3+1=10 das Element b, den übrigen 3+1=4 das Element c und der Schlußgruppe ddd das Element d vorgeſetzt wird. Hienach erhalten wir folgende 35 Combinationen zur 4. Claſſe mit Wiederholung.

Digitized by Google

aaaa, aaab, aaac, aaad, aabb
aabc, aabd, aacc, aacd, aadd
abbb, abbc, abbd, abcc, abcd
abdd, accc, accd, acdd, addd } = 20.

bbbb, bbbc, bbbd, bbcc, bbcd
bbdd, bccc, bccd, bcdd, bddd } = 10.

cccc, cccd, ccdd, cddd = 4.

dddd = 1.

5. *α*) Sechs Elemente geben ebensoviele Combinationen zur 1. Classe; daher ist:

$$^{w}C_{1}(6) = 6.$$

Sollen 6 Elemente zur 2. Classe mit Wiederholung combinirt werden, so kann man dabei auch auf folgende Weise verfahren. Man verbinde jedes Element mit sich selbst und mit jedem andern; auf diese Weise dient jedes Element zur Bildung von 6 von einander verschiedenen Complexionen; da nun 6 Elemente vorhanden sind, so entstehen durch diese Operation im Ganzen 6.6 Complexionen, wobei diejenigen die aus 2 verschiedenen Elementen bestehen, zweimal, die anderen aber, die aus 2 gleichen Elementen bestehen, nur einmal vorkommen. Damit nun alle Complexionen zweimal vorkommen, müssen noch 6.1 Compl. von 2 gleichen Elementen hinzugefügt werden, wodurch wir 6.6+6.1 = 6.(6+1) = 6.7 Combinationen zur 2. Classe erhalten z. B. für die 6 Elemente a b c d e f erhalten wir:

aa aa ab ac ad ae af
bb bb ba bc bd be bf
cc cc ca cb cd ce cf
dd dd da db dc de df
ee ee ea eb ec ed ef
ff ff fa fb fc fd fe

Da aber jede zweimal vorkommt, wenn sie alle gut geordnet werden, so muß das Produkt 6.7 durch 2 dividirt werden, um die wirkliche Anzahl der Combinationen zu erhalten. Daher geben 6 Elemente (6.7):2 = 21 Combinationen mit Wiederholung zur 2. Classe oder

$$^{w}C_{2}(6) = \frac{6.7}{2} = 21.$$

Die Combinationen selbst erhält man, wenn man die in Nummer 3 gefundenen Combinationen ohne Wiederholung um aa, bb, cc, dd, ee, ff vermehrt.

Wird nun jede Combination zur 2. Classe mit jedem der 6 Elemente verbunden, so erhalten wir durch diese Operation

Digitized by Google

$\frac{6.7}{2} \times 6$ Combinationen zur 3. Classe, wobei diejenigen, die aus 3 verschiedenen Elementen bestehen, dreimal, die übrigen dagegen nur einmal vorkommen. Damit letztere in denselben auch dreimal erscheinen, muß jede Combination zur 2. Classe noch mit denjenigen Elementen verbunden werden, woraus sie besteht, wodurch beispielsweise aus aa die beiden Combinationen aaa, aaa, aus ab die Combinationen aab, abb u. s. w., also aus jeder 2 neue entstehen; weshalb die Anzahl der auf diese Weise entstandenen Combinationen zur 3. Klasse $\frac{6.7}{2} \times 6 + \frac{6.7}{2} \times 2 = \frac{6.7.8}{2}$ beträgt. Weil aber jede Combination 3mal vorkommt, so ist die wirkliche Anzahl der gutgeordneten Combinationen zur 3. Classe oder

$$^{w}C_{3}(6) = \frac{6.7.8}{2.3} = 7.8 = 56.$$

Combinirt man jede der $\frac{6.7.8}{2.3}$ Combinationen zur 3. Classe nach und nach mit den 6 verschiedenen Elementen, so entstehen dadurch $\frac{6.7.8}{2.3} \times 6$ Combinationen zur 4. Classe. Hierin kommt aber jede Combination, die aus 4 verschiedenen Elementen besteht, viermal vor, hingegen diejenigen, die nur gleiche oder einige gleiche Elemente enthalten, nur einmal. Damit auch diese viermal vorkommen, muß jede Combination zur 3. Klasse noch mit den 3 Elementen combinirt werden, aus denen sie selbst besteht, wodurch wir z. B. aus den beiden Combinationen zur 3. Classe aaa und aab die bezügl. Combinationen zur 4. Classe: aaaa, aaaa, aaaa, aaab, aaab, aabb u. s. w. erhalten. Auf diese Weise erhalten wir noch $\frac{6.7.8}{2.3} \times 3$ Combinationen, also im Ganzen

$$\frac{6.7.8}{2.3} \times 6 + \frac{6.7.8}{2.3} \times 3 = \frac{6.7.8.9}{2.3}.$$

Da aber hierin jede Combination viermal vorkommt, so ist für 6 Elemente die wirkliche Anzahl der Combinationen mit Wiederholung zur 4. Classe oder

$$^{w}C_{4}(6) = \frac{6.7.8.9}{2.3.4} = 126.$$

Auf gleiche Weise findet man, daß

Digitized by Google

$$^{w}C_{5}(6) = \frac{6.7.8.9}{2.3.4.5} \times 6 + \frac{6.7.8.9}{2.3.4.5} \times 4 = \frac{6.7.8.9.10}{2.3.4.5} = 252.$$

$$^{w}C_{6}(6) = \frac{6.7.8.9.10}{2.3.4.5.6} \times 6 + \frac{6.7.8.9.10}{2.3.4.5.6} \times 5 = \frac{6.7.8.9.10.11}{2.3.4.5.6} = 462$$

5. β) Bei 6 Elementen finden 6 Combinationen zur 1. Classe statt, oder $C_{1}(6) = 6.$

Sollen aus 6 Elementen Combinationen ohne Wiederholung zur 2. Classe gebildet werden, so sondere man jedesmal ein Element ab und verbinde es mit den 5 anderen; auf diese Weise entstehen 6.5 Combinationen zur 2. Classe. Es sind folgende:

ab ac ad ae af
ba bc bd be bf
ca cb cd ce cf
da db dc de df
ea eb ec ed ef
fa fb fc fd fe.

Da aber hierin jede Combination doppelt vorkommt, so ist die Anzahl der gut geordneten Combinationen zur 2. Klasse oder

$$C_{2}(6) = \frac{6.5}{2} = 15.$$

Die Combinationen selbst finden sich in Nummer 3.

Verbindet man jede der $\frac{6.5}{2}$ Combinationen zur 2. Classe mit jedem der 6 Elemente, jedoch so, daß dasselbe Element nur einmal in jeder Combination vorkommt, so entstehen aus jeder Combination zur 2. Classe 4 Combinationen zur 3. Classe, also im Ganzen $\frac{6.5}{2} \times 4 = \frac{6.5.4}{2}$. Dieselben sind:

abc abd abe abf acd ace acf ade adf aef
bac bad bae baf bcd bce bcf bde bdf bef
cab cad cae caf cbd cbe cbf cde cdf cef
dab dac dae daf dbc dbe dbf dce dcf def
eab eac ead eaf ebc ebd ebf ecd ecf edf
fab fac fad fae fbc fbd fbe fcd fce fde.

Hierin kommt aber jede Combination 3mal vor, folglich ist die wirkliche Anzahl der gut geordneten Combinationen ohne Wiederholung zur 3. Classe, oder

$$C_{3}(6) = \frac{6.5.4}{2.3} = 20.$$

Die Combinationen selbst finden sich in Nummer 3.

Verfährt man auf ähnliche Weise bei der Bildung der Com-

Digitized by Google

binationen ohne Wiederholung zur 4. Classe aus denen der 3. Classe, wobei jedoch nicht außer Acht gelassen werden darf, daß kein Element mit einer Combinationsform verbunden wird, was schon in ihr enthalten ist, so entstehen aus jeder Combination zur 3. Classe 3 Combinationen zur 4. Classe und weil durch dieses Verfahren jede Combinationsform viermal erzeugt wird, so ist die Anzahl aller Combinationen zur 4. Classe ohne Wiederholung oder

$$C_4(6) = \frac{6.5.4.3}{2.3.4} = 15.$$

Ebenso findet man, daß

$$C_5(6) = \frac{6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5} = 6 \text{ und}$$

$$C_6(6) = \frac{6.5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5.6} = 1.$$

6. Da jede 2 Nummern eine Ambe bilden, so geben 90 Nummern so viele Amben, als Combinationen ohne Wiederholung zur 2. Classe sich aus 90 verschiedenen Elementen bilden lassen. Die Anzahl aller möglichen Amben ist daher nach 5. β) oder

$$C_2(90) = \frac{90.89}{2} = 4005.$$

Da je 3 Nummern eine Terne bilden, so enthalten 90 Nummern

$$C_3(90) = \frac{90.89.88}{2.3} = 117480 \text{ Ternen.}$$

Ferner enthalten 90 Nummern.

$$C_4(90) = \frac{90.89.88.87}{2.3.4} = 2555190 \text{ Quaternen und}$$

$$C_5(90) = \frac{90.89.88.87.86}{2.3.4.5} = 43949268 \text{ Quinternen.}$$

7. α) Diese Aufgabe verlangt für n Elemente die Combinationen ohne Wiederholung zur 2. Classe zu berechnen, womit zu gleicher Zeit der Beweis im Allgemeinen für die Richtigkeit der Auflösung der vorhergehenden Beispiele geliefert wird.

Es seien n Elemente vorhanden. Sondert man hievon das erste Element ab, so bleiben noch n—1 Elemente. Combinirt man nun das erste Element mit den übrigen n—1 Elementen, so entstehen n—1 Amben. Sondert man jetzt das zweite ab, so hat man wieder n—1 Elemente, womit sich das zweite wieder zu n—1 Amben verbinden läßt. Ebenso sind n—1 Elemente vom dritten verschieden, können

Digitized by Google

also mit dem dritten Elemente wieder n—1 Amben bilden. Dasselbe gilt vom vierten, fünften, überhaupt von jedem folgenden Elemente. Da nun n verschiedene Elemente da sind, so geben diese n(n—1) Amben. Weil aber durch dieses Verfahren, das erste Element mit jedem von ihm verschiedenen und wiederum jedes von diesen mit dem ersten Elemente verbunden werden muß und dasselbe von allen übrigen gilt, so folgt daraus, daß jede Verbindung von 2 Elementen zweimal vorkommen muß, weshalb

$$C(n) = \frac{n(n-1)}{1.2} = \binom{n}{2}$$

$\binom{n}{2}$ wird gelesen: „n über 2", wobei die obere Zahl immer die Anzahl der combinirten Elemente und die untere den Rang der Combinationsklasse angibt. Die Formel $\binom{n}{r}$ bedeutet also das Produkt von n Faktoren, die von n in natürlicher Reihe bis 1 absteigen, dividirt durch das Produkt von r Faktoren, die von 1 aufsteigen.

7. β) Wird jedes von n Elementen nicht allein mit allen übrigen n—1 Elementen, sondern auch mit sich selbst combinirt, so entstehen jedesmal n Amben, also für n Elemente n.n Amben. Da hierin die aus verschiedenen Elementen bestehenden Amben zweimal, dagegen die aus 2 gleichen nur einmal vorkommen, so müssen noch n Amben gleicher Elemente hinzugefügt werden, weshalb in diesem Falle die doppelte Anzahl der Combinationen $n.n + n = n(n+1)$ Amben ist. Oder: Um gleich alle Formen doppelt zu erhalten, setze man das Element, welches mit den übrigen verbunden werden soll, wodurch also aus jedem Elemente n+1 Combinationen erzeugt werden, also im Ganzen aus n Elementen n(n+1), daher ist:

$$^{w}C(n) = \frac{n(n+1)}{1.2} = \binom{n+1}{2}.$$

Man kann auch leicht $^{w}C(n)$ aus $C(n)$ dadurch ableiten, daß man die hier fehlenden n Combinationen eines jeden Elementes mit sich selbst zu $C(n)$ hinzufügt; alsdann ist:

$$^{w}C(n) = \frac{n(n-1)}{1.2} + n = \frac{n(n+1)}{1.2} = \binom{n+1}{2}.$$

7. γ) Hier sollen für n Elemente die Combinationen zur 3. Classe oder die Ternen berechnet werden.

Digitized by Google

Wird das erste Element ausgeschlossen, so lassen sich die übrigen $n-1$ Elemente mit $(n-1)-1=n-2$ Elementen zu $\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}$ Amben verbinden. Combinirt man mit jeder von diesen Amben das erste Element zu einer Terne, so entstehen dadurch ebenfalls $\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}$ Ternen. Auf gleiche Weise sind $n-1$ Elemente, die vom zweiten Elemente verschieden sind. Diese $n-1$ Elemente geben wieder $\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}$ Amben, womit das zweite Element sich zu ebenso vielen Ternen verbinden läßt. Dasselbe gilt von den übrigen Elementen. Bei n Elementen müssen also $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2}$ Ternen entstehen. Weil aber in je 3 Complexionen dieselben Elemente mit einander verbunden vorkommen, indem beispielsweise a mit (bc), b mit (ac), c mit (ab) u. s. w. combinirt wird, so kommt jede Terne 3 mal vor. Daher ist:

$$C_3(n)=\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}=\binom{n}{3}.$$

7. δ) Gemäß 7. β) ist: ${}^{w}C_2(n)=\frac{n(n+1)}{1.2}$. Wird nun jede dieser Combinationen zur 2. Classe mit den n Elementen und auch noch mit den in jeder Complexion enthaltenen Elementen verbunden, z. B. aa noch mit $\binom{a}{a}$, ab noch mit $\binom{a}{b}$ u. s. w., woraus dann noch die Complexionen aaa, aaa, aab, abb u. s. w. entstehen, so erhalten wir aus jeder Combination zur 2. Classe $n+2$ Combinationen zur dritten Classe; daher beträgt die Anzahl aller Combinationen mit Wiederholungen zur 3. Classe $\frac{n(n+1)}{1.2}\times(n+2)$. Weil aber je 3 dieser Combinationen aus denselben Elementen bestehen, also einander gleich sind, so ist

$${}^{w}C_3(n)=\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}=\binom{n+2}{3}.$$

Oder: Wie aus 7. γ) hervorgeht, beträgt die Anzahl aller Combinationen ohne Wiederholung zur 3. Classe $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$. Wenn nun Wiederholungen gestattet sind, so

Digitized by Google

kommen noch hinzu alle Combinationen mit 2 gleichen Elementen, deren Anzahl = n(n—1) sein muß, weil je 2 gleiche Elemente mit den übrigen n—1 von ihnen verschiedenen Elementen sich verbinden lassen, außerdem aber kommen auch noch alle Complexionen hinzu, die aus 3 gleichen Elementen bestehen und deren Anzahl = n ist; folglich wird

$$^{w}C_{3}(n) = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + n(n-1) + n = \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3} = \binom{n+2}{3}.$$

8. α) Gemäß 7. γ) ist $C_{3}(n) = \binom{n}{3}$. Bei n Elementen entstehen also $\binom{n}{3}$ Ternen. Combinirt man jede Terne mit jedem der gegebenen Elemente, ausgenommen mit den 3 Elementen, die sie schon enthält, so werden aus jeder Terne n—3, folglich aus $\binom{n}{3}$ Ternen $\binom{n}{3}.(n-3)$ Quaternen. Da aber durch diese Operation je 4 und 4 einander gleiche Complexionen entstehen, weil z. B. a mit (bcd), b mit (acd), c mit (abd) und d mit (abc) verbunden wird, also dieselben Elemente enthalten, so ist die wirkliche Anzahl der Combinationen zur 4. Classe ohne Wiederholung oder

$$C_{4}(n) = \binom{n}{3} \cdot \frac{n-3}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} = \binom{n}{4}.$$

Durch dieselben Schlüsse erhält man aus jeder Quaterne, wenn sie mit jedem in ihr nicht enthaltenen Elemente verbunden wird, n—4 Quinternen und weil je 5 und 5 Quinternen dieselben Elemente enthalten, so ist:

$$C_{5}(n) = \binom{n}{4} \cdot \frac{n-4}{5} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5} = \binom{n}{5}.$$

Hieraus ist das Gesetz ersichtlich, wonach jede folgende Classe aus der nächst vorhergehenden abgeleitet wird, und da dies Gesetz für alle Classen gilt, so ist also allgemein:

$$C_{r}(n) = \binom{n}{r-1} \cdot \frac{n-(r-1)}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(r-2))(n-(r-1))}{1.2.3.\ldots.(r-1).r}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(r-1))}{1.2.3.\ldots.r} = \binom{n}{r}.$$

Hierbei ist zu bemerken, daß r = oder < n sein muß, weshalb die Anzahl der Classen, wenn keine Wiederholungen gestattet sind, eine beschränkte ist.

8. β_1) Nach 7. δ) ist $^{w}C_{3}(n) = \binom{n+2}{3}$. Wird nun jede Terne

Digitized by Google

mit jedem der gegebenen Elemente und auch noch mit jedem in ihr enthaltenen Elemente verbunden, z. B. aaa mit $\left\{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}\right\}$, abc mit $\left\{\begin{matrix}a\\b\\c\end{matrix}\right\}$ u. s. w., so werden aus jeder Terne n+3 Quaternen und weil je 4 und 4 Quaternen aus denselben Elementen bestehen, also, wenn sie gut geordnet sind, einander gleich sind, so ist

$$^{w}C_{4}(n) = \binom{n+2}{3} \cdot \frac{n+3}{4} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4} = \binom{n+3}{4}.$$

Ebenso findet man, daß

$$^{w}C_{5}(n) = \binom{n+3}{4} \cdot \frac{n+4}{5} = \binom{n+4}{5}.$$

Auch hierbei ist das Gesetz der Bildung jeder folgenden Classe aus der nächstvorhergehenden leicht zu ersehen, und da dasselbe für alle Classen Gültigkeit haben muß, weil die Art und Weise der Ableitung einer Classe aus der andern dieselbe ist, so hat man

$$^{w}C_{r}(n) = \binom{n+r-2}{r-1} \cdot \frac{n+r-1}{r} = \frac{n(n+1)...(n+r-2)(n+r-1)}{1.2....(r-1).r}$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)....(n+r-1)}{1.2.3...r} = \binom{n+r-1}{r}.$$

Hier kann r = oder > n sein, weshalb die Anzahl der Classen mit Wiederholung eine unbeschränkte ist.

8. β_2) Die Combinationen zur r^{ten} Classe mit Wiederholung lassen sich auch noch auf folgende Weise bestimmen. Gesetzt es seien die Elemente a, b, c, d gegeben, die wir in Nummer 4 zur 1., 2., 3. und 4. Classe combinirt haben. Wie dort ersichtlich, wird jede folgende Classe aus der zunächst vorhergehenden dadurch gebildet, daß das Element a allen Formen dieser Classe vorgesetzt wird; das Element b allen Formen mit Ausnahme derjenigen, die mit a anfangen; das Element c denjenigen Formen, die weder mit a noch mit b beginnen; das Element d endlich blos den mit d anfangenden Formen. Daraus folgt, daß in der Ordnung a alle 4 Elemente a, b, c, d, in der Ordnung b, wobei a ausgeschlossen ist, die 3 Elemente b, c, d, in der Ordnung c nur 2 Elemente, nämlich c, d und in der Ordnung d nur ein Element, nämlich d zur Bildung der Formen dient. Daher ist also z. B.:

$$^{w}C_{4}(4) = {}^{w}C_{3}(4) + {}^{w}C_{3}(3) + {}^{w}C_{3}(2) + {}^{w}C_{3}(1) \text{ oder}$$

Digitized by Google

$$\binom{7}{4}=\binom{6}{3}+\binom{5}{3}+\binom{4}{3}+\binom{3}{3} \text{ oder}$$

$$\frac{4.5.6.7}{1.2.3.4}=\frac{4.5.6}{1.2.3}+\frac{3.4.5}{1.2.3}+\frac{2.3.4}{1.2.3}+\frac{3.2.1}{1.2.3}.$$

Soll nun ${}^{w}_{4}C(n)$ bestimmt werden, so haben wir hiernach:

$${}^{w}_{4}C(n)={}^{w}_{3}C(n)+{}^{w}_{3}C(n-1)+{}^{w}_{3}C(n-2)+\ldots{}^{w}_{3}C(2)+{}^{w}_{1}C(1) \text{ oder}$$

$$\binom{n+3}{4}=\binom{n+2}{3}+\binom{n+1}{3}+\ldots\binom{4}{3}+\binom{3}{3}.$$

Da das Gesetz der Bildung für alle Classen dasselbe ist, so ist auch:

$${}^{w}_{r}C(n)={}^{w}_{r-1}C(n)+{}^{w}_{r-1}C(n-1)+{}^{w}_{r-1}C(n-2)+\ldots{}^{w}_{r-1}C(2)+{}^{w}_{r-1}C(1) \text{ oder}$$

$$\binom{n+r-1}{r}=\binom{n+r-2}{r-1}+\binom{n+r-3}{r-1}+\binom{n+r-4}{r-1}$$
$$+\ldots\binom{r}{r-1}+\binom{r-1}{r-1}.$$

8. γ) Nach 8. β) ist:

$${}^{w}_{r}C(n)=\frac{n(n+1)\ldots.(n+r-2)(n+r-1)}{1.2\ldots(r-1).r}$$

oder, wenn man diesem Ausdrucke eine andere Form gibt:

$${}^{w}_{r}C(n)=\frac{(n+r-1)(n+r-2)\ldots.(n+1)n}{1.2\ldots.(r-1).r}=\binom{n+r-1}{r}.$$

Nun ist ferner auch:

$${}_{r}C(n+r-1)=\frac{(n+r-1)(n+r-2)\ldots.(n+1)n}{1.2\ldots.(r-1).r}=\binom{n+r-1}{r}.$$

Hieraus folgt alsdann, daß

$${}^{w}_{r}C(n)={}_{r}C(n+r-1),$$

d. h. in Worten: Die Anzahl der Combinationen aus n Elementen zur r^{ten} Classe mit Wiederholung ist gleich der Anzahl der Combinationen von $(n+r-1)$ Elementen zur r^{ten} Classe ohne Wiederholung. Für $n=6$, $r=3$ ist:

$${}^{w}_{3}C(6)=\frac{6.7.8}{1.2.3} \text{ und } {}_{3}C(6+3-1)=\frac{8.7.6}{1.2.3}; \text{ folglich:}$$

$${}^{w}_{3}C(6)={}_{3}C(8).$$

9. Bilden wir aus den 6 Elementen a, b, c, d, e, f die Combinationsformen zur 4. Classe und klammern jedesmal die bei jeder Form nicht zur Verwendung kommenden Elemente ein, so erhalten wir:

Digitized by Google

abcd(ef), abce(df), abcf(de), abde(cf), abdf(ce)
abef(cd), acde(bf), acdf(be), acef(bd), adef(bc)
bcde(af), bcdf(ae), bcef(ad), bdef(ac), cdef(ab).

Es ist hieraus ersichtlich, daß die beiden eingeklammerten Elemente alle Combinationen zur 2. Classe ohne Wiederholung, aber in umgekehrter Ordnung darstellen, ebenso daß es ebenso viele Combinationen zur 2. Classe, wie zur 4. Classe gibt, weil sich die Classenexponenten $4+(6-4)$ zur Anzahl der Elemente ergänzen.

Deshalb ist also: $\underset{4}{C}(6) = \underset{2}{C}(6)$.

Allgemein: Bei der Bildung der Combinationen aus n Elementen zur r^{ten} Classe ohne Wiederholung kommen bei jeder aus r Elementen bestehenden Combinationsform jedesmal $n-r$ von einander verschiedene Elemente nicht in Betracht und zwar abwechselnd höhere und niedrigere, je nachdem niedrigere oder höhere Elemente bei den Verbindungen verwendet werden. Dadurch müssen dann nothwendig ebensoviel Combinationen zur $(n-r)^{ten}$ Classe entstehen, als zur r^{ten} Classe und zwar in umgekehrter Ordnung, weil die Formen zur r^{ten} Classe allmälig von den niedrigeren zu den höheren Elementen aufsteigen, deshalb ist:

$$\underset{r}{C}(n) = \underset{n-r}{C}(n) \quad \text{oder} \quad \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}.$$

Die Richtigkeit ergibt sich auch noch auf folgende Weise. Es ist nämlich nach 8. α)

$$\underset{r}{C}(n) = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1.2.3\ldots.r}$$

Setzt man in diese Formel $n-r$ statt r, so wird:

$$\underset{r-n}{C}(n) = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots.(r+1)}{1.2.3\ldots.(n-r)}.$$

Letztere Formel ist identisch mit der ersten; denn es ist auch:

$$\underset{n-r}{C}(n) = \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)(n-r)\ldots(r+1)}{1.2\ldots r.(r+1)\ldots.(n-r)}.$$

Dividirt man hier Dividend und Divisor durch $(r+1)\ldots(n-r)$, so wird:

$$\underset{n-r}{C}(n) = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1.2.3\ldots r},$$

weshalb also wieder:

$$\underset{r}{C}(n) = \underset{n-r}{C}(n).$$

Daraus folgt, daß, wenn in zwei Combinations-Classen die Summe der Classenexponenten gleich ist der Anzahl der Elemente, beide Classen gleich viel Combinationen enthalten.

Digitized by Google

Setzt man in $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$, für $r=0$, so wird:

$$\binom{n}{0}=\binom{n}{n} \text{ oder } \binom{n}{0}=1; \text{ daher } \underset{0}{C}(n)=1.$$

10. Nach den in Nummer 8. α) entwickelten Sätzen wird die $(r+1)^{te}$ Combinations-Classe aus der r^{ten} gebildet. Nun geben n Elemente $\binom{n}{r}$ Combinationen zur r^{ten} Classe; folglich geben dieselben Elemente $\binom{n}{r}\cdot\frac{n-r}{r+1}$ Combinationen zur $(r+1)^{ten}$ Classe. Daher ist:

$$\underset{r+1}{C}(n)=\binom{n}{r}\cdot\frac{n-r}{r+1}.$$

11. Die 25 Elemente geben $\frac{25.24.23.22}{1.2.3.4}=12650$ Combinationsformen zur vierten Classe. Nun beginnt die gegebene Form mit r, also mit dem 16ten Element. Von da ab gibt es also noch 9 Elemente zur 4. Classe zu combiniren. Diese 9 Elemente geben $\frac{9.8.7.6}{1.2.3.4}=126$ Formen; mithin gehen den mit r beginnenden Formen $12650-126=12524$ Formen voran. Die Anzahl der Formen, die hier noch weiter in Betracht kommen und mit rs, rt, ru anfangen, ist bezüglich der Anzahl der Combinationen zur 2. Classe von 7, 6, 5 Elementen. Diese geben $\frac{7.6}{1.2}+\frac{6.5}{1.2}+\frac{5.4}{1.2}=21+15+10=46$ Formen. Nun ist die letzte mit ru beginnende Form, also die 46ste, ruyz; dieser geht die gegebene Form ruxz voran, mithin kommen zu den obigen noch $46-1=45$ Formen hinzu; daher ist ruxz die $12524+45=12569$ste Combinationsform zur 4. Classe.

12. Nach Nummer 8. α) geben n verschiedene Elemente

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(\alpha-1))}{1.2.3.\ldots.\alpha}=\binom{n}{\alpha}$$

Combinationsformen, wovon jede aus α Elementen besteht. Dieselben sollen die erste Gruppe bilden. Setzt man $n=\alpha+x$ und sollen überhaupt nur 2 Gruppen gebildet werden, von welchen die erste aus α Elementen und die zweite aus den übrigen x besteht, so ist die Anzahl aller möglichen Vertheilungen $=\binom{n}{\alpha}$; oder, weil $n-\alpha=x$ und daher $\binom{n-\alpha}{x}=1$, so ist diese Anzahl

Digitized by Google

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots.3.2.1}{1.2.3\ldots\alpha.1.2.3..x} = \frac{n!}{\alpha!\,x!}$$

Aus demſelben Grunde laſſen ſich x Elemente, wenn $x = \beta + y$ geſetzt wird, in zwei Gruppen zerlegen, wovon die eine aus β und die andere aus y Elementen beſteht auf

$$\frac{x!}{\beta!\,y!} = \frac{x(x-1)(x-2)\ldots3.2.1}{1.2.3\ldots\beta.1.2.3\ldots y}$$

verſchiedene Arten; mithin iſt die Anzahl aller möglichen Zerlegungen der n Elemente in 3 Gruppen, wovon die erſte aus α, die zweite aus β und die dritte aus y Elementen beſteht

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots3.2.1}{1.2.3\ldots\alpha.1.2.3..x} \times \frac{1.2.3\ldots.x}{1.2.3..\beta.1.2.3.y} \text{ oder}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots3.2.1}{1.2.3..\alpha.1.2.3..\beta.1.2.3..y} = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,y!}$$

Weil ferner y Elemente $\frac{y!}{\gamma!\,z!}$ Gruppen geben, wovon die eine aus γ und die andere aus $z = y - \gamma$ Elementen beſteht, ſo laſſen ſich n Elemente in 4 Gruppen von α, β, γ, z Elementen auf

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots.3.2.1}{1.2.3..\alpha.1.3.3..\beta.1.2.3..\gamma.1.2.3..z} = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,z!}$$

verſchiedene Arten zerlegen.

Da dieſe Schlußfolge für jede beliebige Anzahl von Gruppen fortgeſetzt werden kann, ſo iſt, wenn $n = \alpha + \beta + \gamma .. + \lambda + \mu$ iſt, die Anzahl der Partheien, worin n verſchiedene Elemente zerlegt werden können

$$= \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots\lambda!\,\mu!}$$

Da dieſe Formel mit der Permutationsformel für gleiche Elemente in §. 452 übereinſtimmt, ſo folgt daraus, daß n Elemente ſich auf ebenſoviel verſchiedene Arten in mehrere Partieen zerlegen laſſen, von welchen die erſte α, die zweite β, die dritte γ, die vorletzte λ und die letzte μ Elemente enthält, als n Elemente, unter welchen α gleiche einer Art, β gleiche einer andern Art u. ſ. w. ſich befinden, verſetzt werden können.

13. α) Soll das Produkt abcd in Produkte von 2 Faktoren zerlegt werden, ſo kann dies nach Nummer 12 auf $4!:(2!\,2!) = 4!:(2!)^2$ verſchiedene Arten geſchehen. Auf dieſe Weiſe würde man aber die Combinationen mit ihren Permutationen erhalten. Da nun 2 Elemente 2! Permutationen geben,

Digitized by Google

so muß $4!:(2!)^2$ noch durch $2!$ dividirt werden, wodurch wir erhalten: $4!:(2!)^3 = 3$. Diese 3 Produkte sind:

$$(ab)(cd) = (ac)(bd) = (ad)(bc).$$

13. β) Das Produkt abcdef läßt sich auf $6!:(2!\,2!\,2!) = 6!:(2!)^3$ verschiedene Arten in Produkte von 2 Faktoren zerlegen. Weil nun 3 Elemente sich $3!$ mal permutiren lassen, so ist die wirkliche Anzahl $6!:3!.(2!)^3 = 15$. Es sind folgende:

$$\begin{aligned}
&(ab)(cd)(ef) = (ab)(ce)(df) = (ab)(cf)(de)\\
&(ac)(bd)(ef) = (ac)(be)(df) = (ac)(bf)(de)\\
&(ad)(bc)(ef) = (ad)(be)(df) = (ad)(bf)(ce)\\
&(ae)(bc)(df) = (ae)(bd)(cf) = (ae)(bf)(cd)\\
&(af)(bc)(de) = (af)(bd)(ce) = (af)(be)(cd).
\end{aligned}$$

13. γ) Das Produkt abcdef läßt sich auf $6!:\{(3!)^2.2!\} = 10$ verschiedene Arten in Produkte von 3 Faktoren zerlegen, nämlich:

$$\begin{aligned}
&(abc)(def) = (abd)(cef) = (abe)(cdf) = (abf)(cde) = (acd)(bef)\\
&(ace)(bdf) = (acf)(bde) = (ade)(bcf) = (adf)(bce) = (aef)(bcd).
\end{aligned}$$

13. δ) Die Anzahl der Zerlegungen ist hier: $9!:(3!\,3!\,3!\,3!) = 9!:(3!)^4 = 9!:6^4 = 280$.

14. α) Combiniren wir $2n, 2n-2, 2n-4 \ldots 2$ zur zweiten Classe, so haben wir nach Nummer 12, wenn wir die gesuchte Anzahl mit x bezeichnen:

$$\begin{aligned}
x &= \underset{2}{C}(2n).\underset{2}{C}(2n-2).\underset{2}{C}(2n-4).....\underset{2}{C}(2)\\
&= \binom{2n}{2}\cdot\binom{2n-2}{2}\cdot\binom{2n-4}{2}\cdot\ldots\cdot\binom{2}{2}\\
&= \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)...3.2.1}{(1.2)^n} = \frac{(2n)!}{2^n}
\end{aligned}$$

Weil sich nun n Produkte $1.2.3\ldots n = n!$ mal permutiren lassen, so ist

$$x = \frac{(2n)!}{n!\,2^n}.$$

14. β) Hier soll das aus 3n Faktoren bestehende Produkt in Produkte von 3 Faktoren zerlegt werden. Es ist daher:

$$\begin{aligned}
x &= \underset{3}{C}(3n).\underset{3}{C}(3n-3).\underset{3}{C}(3n-6)....\underset{3}{C}(3)\\
&= \binom{3n}{3}\cdot\binom{3n-3}{3}\cdot\binom{3n-6}{3}\cdot\ldots\cdot\binom{3}{3}\\
&= \frac{3n(3n-1)(3n-2)(3n-3)....3.2.1}{(1.2.3)^n} = \frac{(3n)!}{6^n}
\end{aligned}$$

Daher ist, weil n Produkte n! Permutationen geben,

$$x = \frac{(3n)!}{n!\,6^n}.$$

Digitized by Google

14. γ) Es ist hier:

$$x = \overset{m}{C}(mn) \cdot \overset{m}{C}(mn-m) \cdot \overset{m}{C}(mn-2m) \ldots \overset{m}{C}(m)$$
$$= \binom{mn}{m} \cdot \binom{mn-m}{m} \cdot \binom{mn-2m}{m} \cdot \ldots \cdot \binom{m}{m}$$
$$= \frac{mn(mn-1)(mn-2)(mn-3)\ldots 3.2.1}{(1.2.3\ldots m)^n} = \frac{(mn)!}{(m!)^n}$$

Weil aber aus n Produkten n! Permutationen entstehen, so ist in Wirklichkeit:

$$x = \frac{(mn)!}{n!\,(m!)^n}.$$

Das Variiren.

§. 456. Eine dritte Art, gegebene Elemente mit einander zu verbinden, heißt Variiren. Man versteht darunter, aus jeder von mehrern gegebenen Elementenreihen ein Element herausnehmen und es zu einer Complexion verbinden. Jede auf diese Weise gebildete Complexion, die offenbar so viele Elemente enthält, als es Reihen gibt, heißt eine Variationsform oder auch eine Variation. Man erhält daher alle Variationen gegebener Reihen, wenn man jedes Element der ersten Reihe mit jedem Elemente der zweiten Reihe und jede hierdurch entstandene Complexion noch mit jedem Elemente der dritten, vierten, n^{ten} Reihe verbindet. Auf diese Weise entstehen so viele Complexionen, als das Produkt aus den Elementenmengen der einzelnen Reihen beträgt. Sollen nun die Variationsformen der 3 Reihen abc, αβγδ, AB, wobei die erste Reihe 3, die zweite 4 und die dritte 2 Elemente enthält, gebildet werden, so beträgt die Anzahl der hieraus entstehenden Complexionen $3.4.2 = 24$; es sind folgende:

15.
aαA aαB aβA aβB aγA aγB aδA aδB
bαA bαB bβA bβB bγA bγB bδA bδB
cαA cαB cβA cβB cγA cγB cδA cδB.

16. Die erste der hier gegebenen 4 Reihen enthält 2, die zweite 1, die dritte 3 und die vierte 5 Elemente; dies gibt im Ganzen $2.1.3.5 = 30$ Complexionen; nämlich:

aaαA aaαB aaαC aaαD aaαE
aaβA aaβB aaβC aaβD aaβE
aaγA aaγB aaγC aaγD aaγE
baαA baαB baαC baδD baαE
baβA baβB baαC baβD baβE
baγA baγB baβC baγD baγE.

Digitized by Google

17. Sind die Elementenmengen der einzelnen Reihen m, n, p, q, so kann jedes Element der ersten Reihe mit allen Elementen der zweiten Reihe verbunden werden, wodurch m.n Complexionen erhalten werden, wovon jede aus 2 Elementen besteht. Jede dieser Complexionen läßt sich ferner mit allen Elementen der dritten Reihe verbinden, und dies gibt (m.n).p Complexionen, von welchen jede 3 Elemente enthält. Nun läßt sich endlich jede dieser Complexionen mit allen Elementen der vierten Reihe verbinden, wodurch wir (m.n.p.).q Complexionen erhalten, wovon jede aus 4 Elementen besteht; demnach ist die Anzahl aller möglichen Variationen = mnpq.

18. a) Bei den bisherigen Operationen, aus gegebenen Elementenreihen die entsprechenden Variationsformen zu bilden, bestand jede Reihe aus verschiedenen Elementen. Indeß können die fraglichen Reihen auch aus denselben Elementen bestehen, alsdann geht das Variiren offenbar in ein Combiniren der Elemente einer dieser Reihen mit Wiederholungen, zu einer Classe, deren Exponent der Anzahl der Reihen gleich ist, und in gleichzeitiges Permutiren der erhaltenen Combinationsformen über. In diesem Falle ist Variiren nichts anders als combiniren und dann permutiren, weshalb die Variationen permutirte Combinationsformen mit und ohne Wiederholung genannt werden können. Nun wird die Anzahl der Variationen von n Elementen zur r^ten Classe ohne Wiederholung durch $V_r(n)$ und mit Wiederholung durch ${}^{w}V_r(n)$ bezeichnet.

Sollen nun die Elemente abc mit und ohne Wiederholung zur 2. Classe variirt werden, so denke man sich, es seien die beiden identischen Reihen abc und abc gegeben. Um die zweite Classe der Variationen dieser Elemente mit Wiederholung zu bilden, verbinde man jedes Element der ersten Reihe mit jedem Elemente der zweiten Reihe, wodurch folgende Complexionen entstehen:

aa ab ac
bb ba bc
cc ca cb

Hierin kommen alle Combinationen der gegebenen Elemente nebst den Permutationen dieser Combinationen vor. Auf diese Weise sind aus jedem Elemente 3 Complexionen entstanden, also aus 3 Elementen $3.3 = 3^2$; daher ist, weil $n = 3$, $r = 2$

$${}^{w}V_2(3) = 3^2.$$

18. b) Sollen aber dieselben Elemente zur 2. Classe ohne

Digitized by Google

Wiederholung variirt werden, so denke man sich, man habe die 3 identischen Reihen abc abc abc. Nun verbinde man jedes der gegebenen Elemente mit allen übrigen, nur nicht mit sich selbst; dadurch entstehen sodann $3.2 = 6$ Variationen; es sind folgende:

ab, ac, ba, bc, ca, cb

Mithin ist: $V_2(3) = 3.2 = 3!$

Man kann die Anzahl derselben auch aus den Combinationen von 3 Elementen zur 2. Classe herleiten. Es ist nämlich $C_2(3) = \frac{3.2}{1.2}$. Jede dieser Combinationsformen besteht aus 2 Elementen, welche $1.2 = 2!$ mal permutirt werden können; daher ist auch:

$$V_2(3) = C_2(3).2! = 3!$$

18. c) Sollen die 3 Elemente zur 3. Classe mit Wiederholung variirt werden, also die 3 identischen Reihen abc, abc, abc, so erhalten wir folgende Variationen:

aaa aab aac aba abb abc aca acb acc
baa bab bac bba bbb bbc bca bcb bcc
caa cab cac cba cbb cbc cca ccb ccc

Aus jeder Form zur 2. Classe sind also 3 Formen zur 3. Classe entstanden, also aus 3.3 Formen zur 2. Cl. $3.3.3 = 3^3$ zur 3. Cl.; daher ist:

$$^wV_3(3) = 3.\,^wV_2(3) = 3^3$$

18. d) Dieselben Elemente geben folgende Variationen zur 3. Classe ohne Wiederholung:

abc bac cab
acb bca cba

Ihre Anzahl ist also $V_3(3) = 3.2 = 3!$ Leitet man ihre Anzahl aus den Combinationen zur 3. Cl. ab, so erhält man die Combinationen: $C_3(3) = \frac{3.2.1}{1.2.3} = \frac{3!}{3!}$

Weil nun jede dieser Complexionen 3 Elemente enthält, welche einer $1.2.3 = 3!$ fachen Permutation fähig sind, so ist auch:

$$V_3(3) = C_3(3).3! = 3!$$

18. e) Aus den 4 Reihen abc, abc, abc, abc erhält man folgende Variationen zur 4. Classe mit Wiederholung:

aaaa aaab aaac aaba aabb aabc aaca aacb aacc
abaa abab abac abba abbb abbc abca abcb abcc

Digitized by Google

acaa acab acac acba acbb acbc acca accb accc
baaa baab baac baba babb babc baca bacb bacc
bbaa bbab bbac bbba bbbb bbbc bbca bbcb bbcc
bcaa bcab bcac bcba bcbb bcbc bcca bccb bccc
caaa caab caac caba cabb cabc caca cacb cacc
cbaa cbab cbac cbba cbbb cbbc cbca cbcb cbcc
ccaa ccab ccac ccba ccbb ccbc ccca cccb cccc

Hieraus folgt, daß aus jeder Complexion zur 3. Classe, 3 Complexionen zur 4. Cl. entstanden sind; daher aus den 3.3.3 Complexionen zur 3. Cl. $3.3.3.3 = 3^4$ zur 4 Cl.; mithin ist:

$$^{w}V_{4}(3) = 3.\,^{w}V_{3}(3) = 3^4.$$

Aus 3 Elementen können keine Variationen ohne Wiederholung zur 4. Cl. gebildet werden.

19. a) Die 4 Elemente geben nun folgende Variationen zur 2. Cl. mit Wiederholung:

aa ba ca da
ab bb cb db
ac bc cc dc
ad bd cd dd

Aus jedem Elemente sind also 4 Variationen entstanden; daher geben 4 Elemente $4.4 = 4^2$ Formen. Es ist also:

$$^{w}V_{2}(4) = 4^2.$$

19. b) Aus den 4 Elementen entstehen folgende Variationen zur 2. Cl. ohne Wiederholung:

ab ba ca da
ac bc cb db
ad bd cd dc

Aus jedem Elemente sind also 3 Formen entstanden, also ist:

$$V_{2}(4) = 4.3 = 12.$$

Auch ist: $V_{2}(4) = C_{2}(4).2! = \frac{4.3}{2!} \times 2! = 4.3.$

19. c) Die Variationen zur 3. Cl. mit Wiederholung sind:

aaa aab aac aad aba abb abc abd
aca acb acc acd ada adb adc add
baa bab bac bad bba bbb bbc bbd
bca bcb bcc bcd bda bdb bdc bdd
caa cab cac cad cba cbb cbc cbd
cca ccb ccc ccd cda cdb cdc cdd
daa dab dac dad dba dbb dbc dbd
dca dcb dcc dcd dda ddb ddc ddd

Digitized by Google

Ihre Anzahl ist:

$$^{w}V_{2}(4) = 4 . {}^{w}V_{2}(4) = 4 . 4^{2} = 4^{3}.$$

19. d) Die Variationen zur dritten Classe ohne Wiederholung sind:

abc bac cab dab
abd bad cad dac
acb bca cba dba
acd bcd cbd dbc
adb bda cda dca
adc bdc cdb dcb

Ihre Anzahl ist:

$$V_{3}(4) = 2 . V_{2}(4) = 2 . 3 . 4 = 4! \text{ oder auch}$$

$$V_{3}(4) = C_{3}(4) . 3! = \frac{4!3!}{3!} = 4!$$

19. e) Die Variationen zur 2. Cl. der Reihe abcde mit Wiederholung sind:

aa ba ca da ea
ab bb cb db eb
ac bc cc dc ec
ad bd cd dd ed
ae be ce de ee

Ihre Anzahl ist:

$$^{w}V_{2}(5) = 5 . {}^{w}V_{1}(5) = 5 . 5 = 5^{2}.$$

19. f) Die Variationen derselben Elementenreihe ohne Wiederholung sind:

ab ac ad ae
ba bc bd be
ca cb cd ce
da db dc de
ea eb ec ed

Ihre Anzahl ist:

$$V_{2}(5) = 5 . 4 \text{ oder auch}$$

$$V_{2}(5) = C_{2}(5) . 2! = \frac{5 . 4}{2!} \times 2! = 5 . 4.$$

20. Die Anzahl der Variationen α) zur 2. β) zur 3. und γ) zur r^{ten} Classe mit Wiederholung aus n Elementen zu bestimmen.

Der Variationen zur 1. Cl. sind offenbar ebensoviel, als der Elemente, also n. Setzt man der Reihe nach jeder Form der 1. Cl. die n Elemente vor, so werden aus jeder der n verschiedenen Variationen der 1. Cl. n neue zur 2. Cl.

Digitized by Google

Auf diese Weise müssen also $n.n = n^2$ Variationen zur 2. Cl. mit Wiederholung entstehen. Daher ist:

$$\alpha)\ {}^{w}_{2}V(n) = n.{}^{w}_{1}V(n) = n.n = n^2.$$

Hieraus erhält man die Variationen zur 3. Cl. wenn man jeder Variationsform zur 2. Cl. die n Elemente der Reihe nach vorsetzt. Dadurch entstehen dann aus jeder Form n neue; folglich ist die Anzahl der Variationen zur 3. Cl. mit Wiederholung oder

$$\beta)\ {}^{w}_{3}V(n) = n.{}^{w}_{2}V(n) = n.n^2 = n^3.$$

Verbindet man wieder jede dieser Variationen mit jedem der gegebenen Elemente, so erhält man die Variationen für die 4. Cl. und zwar aus jeder n neue. Daher muß die Anzahl derselben n^4, für die fünfte Cl. n^5, für die sechste Cl. n^6 sein, also überhaupt für die r^{te} Cl. n^r sein; daher ist:

$$\gamma)\ {}^{w}_{r}V(n) = n.{}^{w}_{r-1}V(n) = n.n^{r-1} = n^r.$$

21. Diese Aufgabe verlangt die Anzahl der Variationen ohne Wiederholung aus n Elementen zu bestimmen.

Nach §. 455. Nummer 8. α) ist:

$$C(n) = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-r+1}{1.2.3.4\ldots r}.$$

Nun enthält jede dieser Combinationsformen r Elemente, welche $1.2.3\ldots r = P(r)$mal permutirt werden können; folglich ist:

$$V(n) = C(n).P(r) = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-r+1).$$

Für n Elemente ist die n^{te} Classe auch die höchste für die Variationen ohne Wiederholung; ihre Anzahl ist, wenn $n = r$ ist:

$$V(r) = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\ldots 1.$$

22. Die 25 Buchstaben des Alphabets geben 25 Unionen, 25^2 Amben, 25^3 Ternen. Nun wird aus jeder Terne durch ihre Verbindung mit einem Buchstaben eine Quaterne, mithin entstehen aus jedem Buchstaben 25^3 Quaternen; daher gehen den mit c beginnenden Quaternen 2.25^3 andere voran. Dem Buchstaben m gehen 11 Buchstaben voran, welche 11.25^2 Amben geben; mithin gehen den mit cm anfangenden Formen $2.25^3+11.25^2$ Formen voran. Den Formen, die mit d anfangen, gehen 3.25 voran, folglich gehen den mit cmd beginnenden Formen $2.25^3+11.25^2+3.25$ Formen voran. In der Ordnung d gibt es 25 Amben, wovon dx die 23ste ist; folglich ist:

α) cmdx die $2.25^3+11.25^2+3.25+23 = 38223$ste Form.

Digitized by Google

Die 25 Buchstaben geben 24.23.22, Variationen zur dritten Classe; dem c gehen also 2.(24.23.22), dem Buchstaben m 10.(23.22), dem d 2.22 und dem x 20 Formen voran; also ist

β) cmdx die 2.(24.23.22)+10.(23.22)+2.22+20=29412te Form.

Combinationen und Variationen zu bestimmten Summen.

§. 457. Unter Combiniren zu bestimmten Summen versteht man das Verfahren, in welchem die Zeiger (1, 2, 3 .. n) der Elemente addirt eine bestimmte Summe geben. Hiebei kann die Combinationsklasse oder die Anzahl der Theile, woraus die Summe bestehen soll, angegeben sein oder nicht. Ist letzteres der Fall, so setze man die Zahl als Union hin. Hierauf vermindere man die Zahl um 1 und mache 1 zum ersten und die um 1 verminderte Zahl zum zweiten Element; dann vermindere man die Zahl um 2, 3, 4 .. so lange, bis das zweite Element entweder dem ersten gleich oder höchstens um 1 größer ist, als das erste. Auf diese Weise erhält man die Combinationen zur 2. Classe. Nun leitet man die dritte Classe aus der zweiten ab, indem man in jeder Complexion das zweite Glied in zwei Theile zerlegt, so daß der erste Theil dem ersten Gliede gleich ist und hieraus neue Complexionen ableitet, daß man den ersten Theil dieser beiden Theile um 1 vermehrt und den zweiten um 1 vermindert und diese Operation so lange fortsetzt, bis der zweite dem ersten gleich oder höchstens um 1 größer ist. Aus den Combinationen der dritten Classe erhält man auf ähnliche Weise die der vierten, wenn man dasselbe Verfahren mit dem letzten Gliede in Bezug auf das vorletzte einschlägt. Jede folgende Classe wird nach denselben Gesetzen aus der zunächst vorhergehenden abgeleitet. Daraus ergibt sich auch zugleich, daß jede Complexion gut geordnet erscheinen muß, und die letzte Classe eine einzige nur aus Einheiten bestehende Complexion ist. Wir wollen das Verfahren an folgendem Beispiele zeigen. Es seien die Combinationsformen zur Summe 8 zu bilden.

I.	Classe	hat	1	Complex.,	näml. 8 . . . . .
II.	„	„	4	„	„ 17, 26, 35, 44
III.	„	„	5	„	„ 116, 125, 134, 224, 233
IV.	„	„	5	„	„ 1115, 1124, 1133, 1223, 2222
V.	„	„	3	„	„ 11114, 11123, 11222
VI.	„	„	2	„	„ 111113, 111122
VII.	„	„	1	„	„ 1111112
VIII.	„	„	1	„	„ 11111111

Digitized by Google

Soll aber eine bestimmte Classe der Combinationen außer der Ordnung gebildet werden, so fülle man alle Stellen der ersten Complexion durch Einer aus bis auf die letzte, welche durch das noch fehlende zur erforderlichen Summe ergänzt wird. Hierauf vergrößere man die vorletzte Stelle um 1, um welche man die letzte Stelle vermindert und fährt hiemit so lange fort, bis die vorletzte entweder gleich der letzten oder um 1 kleiner ist. Jetzt geht man zur nächsten Stelle links, welche um 1 kleiner ist, als die letzte Stelle und mache sie um 1 größer, füllt die übrigen Stellen rechts durch dieselbe Zahl aus bis auf die letzte Stelle, die durch den nachfolgenden Rest ausgefüllt wird. Dasselbe Verfahren wird solange wiederholt angewendet, bis man eine Complexion erhält, bei welcher dasselbe nicht mehr anwendbar ist und diese ist denn die letzte der Classe. Es sei die sechste Combinationsklasse zur Summe 12 zu bilden. Wir haben alsdann:

111117
111126
111135
111144
111225
111234
111333
112224
112233
122223
222222

23. α) Sind nun die Zeiger 1, 2, 3, 4, 5, so sind die Combinationsformen

a) der 2. Classe zur Summe 2 = 11
b) „ „ „ „ „ 3 = 12
c) „ „ „ „ „ 4 = 13 22
d) „ „ „ „ „ 5 = 14 23
e) „ „ „ „ „ 6 = 15 24 33

β) a) „ 3. „ „ „ 2 = 0
b) „ „ „ „ „ 3 = 111
c) „ „ „ „ „ 4 = 112
d) „ „ „ „ „ 5 = 113 122
e) „ „ „ „ „ 6 = 114 123 222

γ) a) „ 4. „ „ „ 2 = keine
b) „ „ „ „ „ 3 = keine
c) „ „ „ „ „ 4 = 1111
d) „ „ „ „ „ 5 = 1112
e) „ „ „ „ „ 6 = 1113 1122

Digitized by Google

δ) a) „ 5. „ „ „ 2 und 4 keine
d) „ „ „ „ „ 5 = 11111
e) „ „ „ „ „ 6 = 11112

24. α) Man erhält die Variationen zu bestimmten Summen, wenn man die Combinationen bildet und dieselben permutirt. Sind die Zeiger 1, 2, 3, 4, 5 so sind die Combinationsformen:

α) a) der 2. Classe zur Summe 2 = 11
b) „ „ „ „ „ 3 = 12 21
c) „ „ „ „ „ 4 = 13 22 31
d) „ „ „ „ „ 5 = 14 23 32 41
e) „ „ „ „ „ 6 = 15 24 33 42 51

β) a) „ „ „ „ „ 2 = keine
b) „ „ „ „ „ 3 = 111
c) „ „ „ „ „ 4 = 112 121 211
d) „ „ „ „ „ 5 = 113 122 131
212 221
311
e) „ „ „ „ „ 6 = 114 123 132 141
213 222 231
312 321
411

γ) a) „ 4. „ „ „ 2 und 3 keine Formen
c) „ „ „ „ „ 4 = 1111
d) „ „ „ „ „ 5 = 1112 1121 1211 2111
e) „ „ „ „ „ 6 = 1113 1122 1131 1212
1221 1311 2112
2121 2211
3111

25. Um die Variationen zur 2. Classe zur Summe n, wobei S = n ist, zu bilden, zerlege man die Zahl n nach einander in die beiden Theile 1 + (n—1), 2 + (n—2), 3 + (n—3)... bis zu (n—1) + 1, welches die n^{te} oder letzte der aus n gebildeten Complexionen ist. Die Anzahl derselben ist also n—1. Da sich die Null ebenfalls in der Elementenreihe 0, 1, 2, 3 .. n findet, so werden hiedurch noch die beiden Complexionen 0 + n und n + 0 erzeugt; folglich ist die Anzahl der Variationen aus den Elementen 0, 1, 2 .. n zur 2. Classe

$$(n - 1) + 2 = n + 1.$$

Ihre Darstellung ist:

Digitized by Google

$$\begin{array}{c} 0+n \\ 1+(n-1) \\ 2+(n-2) \\ 3+(n-3) \\ . \quad . \\ . \quad . \\ (n-1)+1 \\ n+0 \end{array}$$

26. α) In der vorigen Nummer fanden wir die Anzahl der Variationen der Zahlen 0, 1, 2, 3 . . . n zur Summe n zur 2. Classe, nämlich n+1. Hieraus erhalten wir zunächst ebenso viele Variationsformen zur dritten Classe, indem wir diesen Complexionen eine Null vorsetzen. Lassen wir jetzt die (n−1), (n−2), (n−3) . . . n−(n−1) Formen bezüglich mit 1, 2, 3 . . . n anfangen, so erhalten wir folgende Complexionen:

0+0+n	1+0+(n−1)	2+0+(n−2)	3+0+(n−3)
0+1+(n−1)	1+1+(n−2)	2+1+(n−3)	. . .
0+2+(n−2)	1+2+(n−3)	. . .	. . .
0+3+(n−3)	. . .	. . .	3+(n−3)+0
. . .	. . .	2+(n−2)+0	u. s. w.
. . .	1+(n−1)+0		
0+n+0			

Auf diese Weise entstehen (n+1)+(n)+(n−1)+(n−2)+.. +2+1 Variationsformen zur dritten Classe. Es fragt sich nun, wie groß die Summe dieser Formen ist. Wir können dieselbe auf zweifache Weise bestimmen und zwar ist mit Bezug auf §. 455. 8. β_2).

$$s={}^nV(3)=\frac{n+1}{1}+\frac{n}{1}+\frac{n-1}{1}+\frac{n-2}{1}+\ldots+\frac{1}{1}$$

$$=\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}=\binom{n+1}{2}$$

Nach §. 405. 3. finden wir ebenfalls die Summe dieser Formen, indem wir die Summe des ersten und letzten Gliedes mit der halben Anzahl der Glieder multipliciren. Das erste Glied ist n+1, das letzte 1; ihre Summe (n+1)+1=n+2, Daher ist wieder:

$$s={}^nV(3)=\tfrac{1}{2}(n+1)(n+2)=\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}=\binom{n+1}{2}$$

26. β) Bilden wir jetzt die Variationsformen zur 4. Classe aus denen zur 3. Classe, so hat man:

Digitized by Google

0+0+0+n	1+0+0+(n−1)	2+0+0+(n−2)
0+0+1+(n−1)	1+0+1+(n−2)	2+0+1+(n−3)
0+0+2+(n−2)	. . . .	. . . .
. . . .	. . . .	. . . .
. . . .	1+0+(n−1)+0	2+0+(n−2)+0
0+0+n+0	1+1+0+(n−2)	2+1+0+(n−3)
0+1+0+(n−1)	1+1+1+(n−3)	2+1+(n−3)+0
0+1+1+(n−2)	. . . .	. . . .
. . . .	. . . .	. . . .
. . . .	1+1+(n−2)+0	2+2+0+(n−4)
0+1+(n−1)+0	1+2+0+(n−3)	. . . .
0+2+0+(n−2)	1+2+1+(n−4)	. . . .
0+2+1+(n−3)	. . . .	2+2+(n−4)+0
. . . .	. . . .	. . . .
. . . .	1+3+0+(n−4)	. . . .
0+2+(n−2)+0	1+3+1+(n−5)	2+3+0+(n−5)
0+3+0+(n−3)	1+3+(n−4)+0	. . . .
0+3+1+(n−4)	. . . .	. . . .
. . . .	. . . .	. . . .
. . . .	. . . .	2+(n−2)+0+0
0+3+(n−3)+0	. . . .	
0+4+0+(n−4)	1+(n−1)+0+0	u. s. w.
. . . .		
. . . .		
0+5+0+(n−5)		
. . . .		
. . . .		
0+n+0+0		

Die Summe aller Formen, denen Null vorangeht, beträgt $\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}$, die zweite Colonne enthält $\frac{n(n+1)}{1.2}$.... die dritte $\frac{n(n-1)}{1.2}$, die vierte $\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}$.... die letzte hat blos die eine Form n; daher ist nach §. 455. 8. β_2:

$$s=nV(4)=\binom{n+2}{2}+\binom{n+1}{2}+\binom{n}{2}+\binom{n-1}{2}+\ldots.\binom{2}{2}$$
$$=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3}=\binom{n+3}{3}.$$

Da das Gesetz der Bildung für alle Variationsklassen dasselbe ist, so ist

26. γ) $$s=nV(5)=\binom{n+3}{3}+\binom{n+2}{3}+\binom{n+1}{3}+\binom{n}{3}+\ldots.\binom{3}{3}$$
$$=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1.2.3.4}=\binom{n+4}{4}$$ und

Digitized by Google

26. $\delta)\ ^{s=n}V(r) = \binom{n+r-2}{r-2} + \binom{n+r-3}{r-2} + \binom{n+r-4}{r-2} + \ldots$

$$\binom{r-2}{r-2} = \binom{n+r-1}{r-1}.$$

27. Wenn n^2 Elemente, und zwar in n Horizontalreihen (Zeilen) und n Vertikalreihen (Colonnen) geordnet, gegeben sind, z. B.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & \ldots & n_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & \ldots & n_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & \ldots & n_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & \ldots & n_4 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n & b_n & c_n & d_n & \ldots & n_n \end{vmatrix}$$

so versteht man unter Determinante*) dieses Systems das Aggregat von Produkten von je n solchen Elementen, die aus sämmtlich verschiedenen Colonnen oder Zeilen genommen werden. Das Anfangsglied oder Hauptglied der Determinante ist das Produkt der Elemente der Diagonalreihe $a_1 b_2 c_3 d_4 \ldots n_n$. Aus diesem werden die andern Produkte dadurch abgeleitet, daß man die Indices 1, 2, 3 ... n permutirt und zwar sind diejenigen Produkte positiv, deren Indices entweder keine oder eine grade Anzahl von Inversionen enthalten, und diejenigen negativ, wenn die Anzahl der Inversionen ungrade ist.

I. Es gibt Determinanten vom zweiten, dritten, vierten ... n^{ten} Grade, je nachdem dieselbe bezüglich aus 4, 9, 16 ... n^2 Elemente besteht. Eine Determinante zweiten Grades hat die Form:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Da zu jedem Produkte jede Reihe nur ein Element hergeben darf, so ist ersichtlich, daß eine Determinante zweiten Grades nur 2 verschiedene Produkte enthalten kann. Das Hauptprodukt ist das der Diagonale, die man sich immer vom ersten bis zum letzten Gliede gezogen denkt; es ist also hier $a_1 b_2$ und ist positiv; das zweite Produkt ist $a_2 b_1$

*) Außer den im Handbuche genannten Schriften über die Lehre der Determinanten ist auch noch besonders empfehlenswerth: „Einleitung in die Lehre von den Determinanten und ihre Anwendung auf dem Gebiete der niederen Mathematik von Dr. J. Diekmann. Essen 1876, so wie: „Die Determinanten von Dr. Dölp. Zweite Aufl., bearbeitet von Soldan. Darmstadt 1877."

Digitized by Google

und ist negativ, weil die Complexion der Indices 21 zu den ungeraden Inversionen gehört. Demnach ist:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Weil auch $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1,$

so wird die Determinante nicht geändert, wenn die Horizontalreihe zu einer Vertikalreihe und umgekehrt gemacht wird.

Weil aber sowohl

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} = -a_2 b_1 + a_1 b_2 = -(a_2 b_1 - a_1 b_2)$$

als auch $\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = -a_2 b_1 + a_1 b_2 = -(a_2 b_1 - a_1 b_2),$

so findet ein Zeichenwechsel der Determinante statt, wenn 2 Colonnen oder 2 Zeilen mit einander vertauscht werden.

II. Eine Determinante vom dritten Grade hat die Form:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Die Produkte derselben bestehen also aus 3 Elementen, wozu jede Colonne oder Zeile nur ein einziges hergibt. Das Hauptprodukt liegt hier, wie in jeder Determinante in der Diagonale von oben links nach unten rechts, also hier von a_1 nach c_3 und heißt $a_1 b_2 c_3$. Tritt nun hier a_1 an die Spitze der Produkte, so sind selbstverständlich alle Elemente mit dem Index 1 und die Elemente a_2 und a_3 ausgeschlossen, zur Bildung der fraglichen Produkte bleiben also nur die Elemente

$$\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = b_2 c_3 - b_3 c_2.$$

übrig, also eine Determinante zweiten Grades. Demnach ist ein Drittel der Determinante

$$a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2.$$

Lassen wir nun a_2 an die Spitze treten, so kommen die Elemente $a_1\ a_3\ b_2\ c_2$ nicht zur Verwendung und es bleiben nur noch die Elemente $b_1\ c_1\ b_3\ c_3$, so daß also das zweite Drittel der Determinante heißt:

$$a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Digitized by Google

Weil aber hier die Complexion $a_2 b_1 c_3$ eine Inversion enthält, also negativ ist, so haben wir:

$$-a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -a_2 b_1 c_3 + a_2 b_3 c_1.$$

Tritt endlich a_3 an die Spitze der Produkte, so sind die Elemente $a_1\ a_2\ b_3\ c_3$ ausgeschlossen und wir erhalten als letztes Drittel der Determinante

$$a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1.$$

Demnach ist also:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} =$$

$$a_1(b_2 c_3 - b_3 c_2) + a_2(b_3 c_1 - b_1 c_3) + a_3(b_1 c_2 - b_2 c_1).$$

Indessen kann die Ausrechnung einer Determinante vom dritten Grade auch auf folgende Weise rasch und sicher bewerkstelligt werden. Man schreibe nämlich rechts neben die Determinante die zwei ersten Colonnen noch einmal, so sind alle Produkte positiv, deren Elemente auf den Diagonalen liegen, die mit der Diagonale des Hauptproduktes parallel laufen und diejenigen negativ, welche mit der zweiten Diagonale von oben rechts nach unten links der Determinante parallel laufen. Also

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix}$$

$$= \begin{cases} a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 c_3 - a_1 c_2 b_3 - b_1 a_2 c_3 \\ a_1(b_2 c_3 - b_3 c_2) + a_2(b_3 c_1 - b_1 c_3) + a_3(b_1 c_2 - b_2 c_1). \end{cases}$$

Rechnen wir nach beiden Verfahrungsarten die folgende Determinante aus, so erhalten wir:

$$(1)\quad \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} b & f \\ f & c \end{vmatrix} - h \begin{vmatrix} h & g \\ f & c \end{vmatrix} + g \begin{vmatrix} h & g \\ b & f \end{vmatrix}$$

$$= \begin{cases} abc - af^2 - ch^2 + gfh + gfh - bg^2 \text{ oder} \\ abc - af^2 - ch^2 + 2gfh - bg^2. \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} \begin{matrix} a & h \\ h & b \\ g & f \end{matrix} = \begin{cases} abc + hfg + ghf - gbg - aff - hhc \\ abc + 2fgh - bg^2 - af^2 - ch^2. \end{cases}$$

28. Diese Aufgabe hat bereits ihre Erledigung gefunden in der fünften Auflage des zweiten Bandes dieses Werkes S. 175—178.

Digitized by Google

Auflösung der Aufgaben als Anwendung der Permutations-, Combinations- und Variations-Rechnung.

(Heis §. 90.)

§. 458. Das Wort Eva hat 3 Elemente, welche nach §. 449 ..1.2.3 = 3! = 6 Permutationen geben, nämlich:

Eva Eav Vea Vae Aev Ave.

Unter diesen 6 Permutationen geben die erste, vierte und letzte einen Sinn. Eva ist der bekannte Eigenname; Vae ist ein lat. Ausrufungswort unser „Wehe! Ach!" und die letzte ein lat. Imperatif, welche „Sei gegrüßt" bedeutet.

Das Wort Roma gibt 1.2.3.4 = 4! = 24 Permutationen, es sind folgende:

Roma, Roam, Rmoa, Rmao, Raom, Ramo
Orma, Oram, Omra, Omar, Oarm, Oamr
Mroa, Mrao, Mora, Moar, Maro, Maor
Arom, Armo, Aorm, Aomr, Amro, Amor.

Folgende geben einen Sinn: Roma lat. ist der Name der Stadt Rom. Ramo lat. ist Dativ oder Ablativ von ramus der Ast. Oram lat. ist Accusativ von ora die Küste und 2) das Tau, Schiffsseil. Omar der Name eines berühmten Kalifen. 1) Mora lat. die Mehrzahl von morum die Brombeere; 2) mora lat. eine Närrin und 3) mora eine Mohrin. Maro Name des lat. Dichters Vergilius Maro. Arom unser deutsches Wort „Arom", so viel als Duft. 1) Armo lat. ich bewaffne und 2) armo Dativ von armus das Schulterblatt. 1) Amor lat. der Name eines Gottes; 2) amor lat. die Liebe und 3) amor das Passivum von amo ich liebe. Unter den übrigen Permutationen gibt es noch mehrere, welche in der hebräischen, syrischen und ungarischen Sprache vorkommen und daher ebenfalls einen Sinn geben.

2. Der Vers hat 8 Wörter, die sich 8! = 40320 mal permutiren lassen.

3. Speisten die Personen nur einmal täglich zusammen, so könnten sie ihr Vorhaben in 10! Tagen ausführen; da dies aber täglich 2 mal geschehen soll, so sind es nur $\frac{10!}{2} = \frac{3628800}{2} = 1814400$ Tage. Diese machen nach der genauen Zeitrechnung, wenn wir 4 Jahre zu 4.365+1 = 1461 Tagen rechnen, 4967 Jahre und 203 Tage.

4. Nach §. 454 Nummer 11 gehen

Digitized by Google

569 : (5! = 120) = 4 Ordnungen her vor *n* lipao
480
89 : (4! = 24) = 3 „ „ „ *a* lipo
72
17 : (3! = 6) = 2 „ „ „ *p* lio
12
5 : (2! = 2) = 2 „ „ „ *o* li
4
1 : (1! = 1) = 1 „ „ „ *li*

folglich ist Napoli die $(480 + 72 + 12 + 4 + 1) = 569$ste Permutation.

5. *α*) Der erste Vers besteht aus 66 Buchstaben, unter denen aber mehrere gleiche vorkommen, nämlich 6a, 6s, 2p, 7i, 2c, 12e, 6n, 6m, 6r, 2g, 3o und 8t; daher geben die Buchstaben desselben nach §. 452:

$$\frac{66!}{6!\,6!\,2!\,7!\,2!\,12!\,6!\,6!\,6!\,2!\,3!\,8!}$$ Permutationen.

5. *β*) Der zweite Vers enthält 25 Buchstaben, worunter aber 2s, 4a, 4t, 4o, 4r, 4e und 2p sind; also gestatten die Buchstaben desselben:

$$\frac{25!}{2!\,4!\,4!\,4!\,4!\,4!\,2!}$$ Permutationen.

6. *α*) Index: ceiiinosssttuv. Gegebene Form: uttensiosicvis. Nach §. 454 Nummer 12 haben wir hier:
Der Ordnung u sind die Ordnungen c, e, i, n, o, s, t vorhergegangen. Es stand c an der Spitze von Complexionen aus 13 Elementen, wovon drei gleiche (iii) einer Art, 3 einer andern Art (sss) und 2 einer dritten Art (tt) waren, weshalb die Ordnung c also $\frac{13!}{3!\,3!\,2!}$ Complexionen enthält. Hiemit stimmen die Ordnungen e, n, o überein, so daß daher die Anzahl der Complexionen dieser 4 Ordnungen $4 \cdot \frac{13!}{3!\,3!\,2!}$ ist. Steht i an der Spitze, so folgen 13 Elemente, unter denen sich 2 gleiche (ii) einer Art, 3 einer andern Art (sss) und 2 einer dritten Art (tt) sich befinden. Dasselbe ist der Fall, wenn s an der Spitze steht. Die Zahl der Complexionen dieser beiden Ordnungen ist also $2 \cdot \frac{13!}{2!\,3!\,2!}$. In der Ordnung t folgen 13 Elemente, unter denen 3 gleiche (iii) einer Art und 3 gleiche (sss) einer andern Art vorkommen, und die Anzahl ihrer Complexionen

Digitized by Google

ist also $\frac{13!}{3!\,3!}$ u. s. w. Schließt man auf diese Weise weiter fort, so erhalten wir folgendes Schema:

Vor Ordnung	gehen her	Formen
u ceiiinosssttv 4.	$\frac{13!}{3!\,3!\,2!}+2.\frac{13!}{2!\,3!\,2!}+\frac{13!}{3!\,3!}=$	345945600 518918400 172972800
t ceiiinosssv 4.	$\frac{12!}{3!\,3!\,2!}+2.\frac{12!}{2!\,3!\,2!}\ldots\ldots=$	26611200 39916800
t ceiiinosssv 4.	$\frac{11!}{3!\,3!}+2.\frac{11!}{2!\,3!}\ldots\ldots=$	4435200 6652800
e ciiinosssv..	$\frac{10!}{3!\,3!}\ldots\ldots\ldots\ldots=$	100800
n ciiiosssv.	$\frac{9!}{3!\,3!}+\frac{9!}{2!\,3!}\ldots\ldots\ldots=$	10080 30240
s ciiiossv 2.	$\frac{8!}{3!\,3!}+\frac{8!}{2!\,3!}\ldots\ldots\ldots=$	2240 3360
i ciiossv	$\frac{7!}{3!\,2!}\ldots\ldots\ldots\ldots=$	420
o ciissv	$\frac{6!}{2!\,2!}+\frac{6!}{2!}\ldots\ldots\ldots=$	180 360
s ciisv	$\frac{5!}{2!\,2!}+\frac{5!}{2!}\ldots\ldots\ldots=$	30 60
i cisv	$\frac{4!}{2!}\ldots\ldots\ldots\ldots=$	12
c isv 0.3	$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=$	0
v is 2.2!	$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=$	4
i s 0.1!	$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=$	0
s 0!	$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=$	0
Im Ganzen gehen also vorher		1115600586

Formen; folglich ist ut tensio sic vis die 1115600587ste Permutation.

6. *β*) Das Anagramm enthält 14 Buchstaben, worunter 2a, 2o und 2u vorkommen; also können daraus

$$\frac{14!}{2!\,2!\,2!}=3.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14=10897286400$$

Permutationen gebildet werden.

6. *γ*) Der Vers enthält 35 Buchstaben, worunter 3t, 2i, 6a, 3e, 4u, 4r, 4m sind; deshalb ist die Anzahl der Permutationen

$$\frac{35!}{3!\,2!\,6!\,3!\,4!\,4!\,4!}.$$

Digitized by Google

7. Die zehn Zahlzeichen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 können $10! = 3628800$mal permutirt werden. Soll aber die Anzahl der ganzen Zahlen, die mit diesen 10 Zahlzeichen geschrieben werden können, angegeben werden, so müssen die Complexionen derselben, an deren Spitze 0 steht und deren Anzahl $9! = 362880$ ist, von $10!$ abgezogen werden. Es können daher durch den gleichzeitigen Gebrauch der zehn Zahlzeichen blos $10! - 9! = 3265920$ verschiedene ganze Zahlen gebildet werden.

8. Es ist hier zu untersuchen, wie oft 6 Elemente sich zu 2, 3, 4, 5 combiniren lassen. Diese Aufgabe ist aber bereits §. 455 Nummer 3 und 5. β) gelöst worden. Hienach können je 2 Farben zu 15, je 3 zu 20, je 4 zu 15 und je 5 zu 6, also im Ganzen die 6 Farben zu $15+20+15+6=56$ neuen Farben mit einander vermischt werden.

9. Nach demselben §. können die 65 Elemente aus

$$C_2(65) = \frac{65.64}{1.2} = 2080 \text{ Körper aus 2 Bestandtheilen;}$$

$$C_3(65) = \frac{65.64.63}{1.2.3} = 43680 \quad " \quad " \quad 3 \quad "$$

$$C_4(65) = \frac{65.64.63.62}{1.2.3.4} = 677040 \quad " \quad " \quad 4 \quad "$$

bestehen.

10. α) Die angegebenen Zahlen lassen sich auf $C_3(7) = \frac{7.6.5}{1.2.3} = 35$ verschiedene Arten zu drei combiniren.

10. β) Nur bei 12 Complexionen läßt sich das Verhältniß je zweier Elemente durch 2 der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 darstellen. Denn

$1 : {}^2/_3 = 3 : 2$	${}^2/_3 : {}^3/_4 = 8 : 9$ trifft nicht zu
$1 : {}^3/_4 = 4 : 3$	${}^2/_3 : {}^4/_5 = 5 : 6$ trifft zu
$1 : {}^4/_5 = 5 : 4$	${}^2/_3 : {}^5/_6 = 4 : 5$ " "
$1 : {}^5/_6 = 6 : 5$	${}^2/_3 : {}^5/_8 = 16 : 15$ trifft nicht zu
$1 : {}^5/_8 = 8 : 5$	${}^2/_3 : {}^3/_5 = 10 : 9$ " " "
$1 : {}^3/_5 = 5 : 3$	

${}^3/_4 : {}^4/_5 = 15 : 16$ trifft nicht zu	${}^4/_5 : {}^5/_6 = 24 : 25$ trifft nicht zu
${}^3/_4 : {}^5/_6 = 9 : 10$ " " "	${}^4/_5 : {}^5/_8 = 32 : 25$ " " "
${}^3/_4 : {}^5/_8 = 6 : 5$ trifft zu	${}^4/_5 : {}^3/_5 = 4 : 3$ trifft zu
${}^3/_4 : {}^3/_5 = 5 : 4$ " "	

$${}^5/_6 : {}^5/_8 = 4 : 3$$
$${}^5/_6 : {}^3/_5 = 25 : 18 \text{ trifft nicht zu}$$
$${}^5/_8 : {}^3/_5 = 25 : 24 \quad " \quad " \quad "$$

11. α) Zwischen 2 Punkten läßt sich nur eine gerade Linie

Digitized by Google

ziehen, daher zwischen 12 Punkten $C_2(12) = \frac{12.11}{1.2} = 66$ und zwischen n Punkten $\frac{n(n-1)}{1.2}$ gerade Linien.

11. β) Man erhält die Anzahl aller möglichen Diagonalen, die sich in einem Vielecke ziehen lassen, wenn man die Anzahl aller Seiten weniger 3 mit der vollen Anzahl aller Seiten multiplicirt und das Produkt durch 2 dividirt. Denn wenn man aus einer Spitze der Figur so viele Diagonalen als möglich zieht, so ist leicht ersichtlich, daß ihre Anzahl um 3 kleiner ist, als die Anzahl aller Seiten. Eben dasselbe gilt von jeder Winkelspitze der Figur, da nun deren ebensoviele sind, wie Seiten, so muß man jene um 3 verminderte Zahl mit der vollen Seitenzahl multipliciren. Auf diese Weise erhält man aber jede Diagonale doppelt, daher muß das erhaltene Produkt noch durch 2 dividirt werden; mithin hat ein Zwanzig-Eck $\frac{20.(20-3)}{1.2} = \frac{20.17}{1.2} = 170$ und ein n-Eck $\frac{n(n-3)}{1.2}$ Diagonalen.

Man kann diese Aufgabe auch aus 11. α) ableiten. Hienach lassen sich zwischen 20 Punkten $\frac{20.19}{1.2}$ Linien ziehen. Denkt man sich nun die 20 Punkte in einer solchen Lage, daß durch ihre Verbindung ein 20-Eck entsteht, so findet man alle möglichen Diagonalen, die man in demselben ziehen kann, wenn man von obiger Summe die 20 ersten Verbindungslinien oder die Seiten des 20-Ecks subtrahirt; daher hat ein 20-Eck $\frac{20.19}{1.2} - 20 = \frac{20.19 - 2.20}{1.2} = \frac{20.17}{1.2} = 170$ und ein n-Eck $\frac{n(n-1)}{1.2} - n = \frac{n(n-3)}{1.2}$ Diagonalen.

12. Zwei Linien schneiden sich nur in einem Punkte; zwei Linien werden von einer dritten in 2 und 3 Linien von einer vierten in 3 Punkten geschnitten; daher schneiden sich

α) 4 Linien in $1+2+3 = \frac{4.3}{1.2} = 6$ Punkten; folglich

β) 8 Linien in $1+2+3+4+5+6+7 = \frac{8.7}{1.2} = 28$ Punkten;

γ) 11 Linien in $1+2+3+4+5+6..+10 = \frac{11.10}{1.2} = 55$ „

δ) n Linien in $1+2+3 \ldots +(n-1) = \frac{n(n-1)}{1.2}$ „

Digitized by Google

Die Beantwortung der unter ε), ζ) und η) gestellten Fragen wird sich leicht ergeben, wenn wir die Anzahl der durch den Durchschnitt von 4 oder 5 oder n Linien gebildeten Dreiecke zu bestimmen suchen und die jedesmalige Anzahl derselben mit 3 multipliciren. Nun entstehen durch den Durchschnitt von 3 Linien $\frac{3.2.1}{1.2.3}$ Dreiecke $= 3 . \frac{3.2.1}{1.2.3} = \frac{3.2.1}{1.2} = 3$ begrenzte Linien; also durch den Durchschnitt von ε) 4 Linien $\frac{4.3.2}{1.2.3}$ Dreiecke; daher $3 . \frac{4.3.2}{1.2.3} = \frac{4.3.2}{1.2} = 12$ begrenzte Linien.

ζ) 5 Linien $3 . \frac{5.4.3}{1.2.3} = \frac{5.4.3}{1.2} = 30$ und

η) n Linien $3 . \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2}$ begrenzte Linien.

13. Nach 12 δ) können n nicht parallele Linien sich in $\frac{n(n-1)}{1.2}$ Punkten schneiden. Wären die p Linien nicht parallel, so würden sie sich untereinander in $\frac{p(p-1)}{1.2}$ Punkten schneiden; weil sie aber parallel und parallele Linien sich nie schneiden, so können sich n Linien, worunter p parallel sind, in so viel weniger Punkten schneiden, als die Anzahl der Schneidepunkte beträgt, wenn die p Linien nicht parallel wären; mithin ist unter den angegebenen Bedingungen die Anzahl der Schneidepunkte

$$\frac{n(n-1)}{1.2} - \frac{p(p-1)}{1.2}.$$

14. Nach Nummer 12 δ) können sich 20 Linien in $\frac{20 . 19}{1.2}$ Punkten schneiden. Nun geben 8 Linien $\frac{8.7}{1.2}$ und 5 Linien $\frac{5.4}{1.2}$ Durchschnittspunkte. Weil aber die 8 Linien durch einen einzigen Punkt und die 5 Linieu ebenfalls durch einen Punkt gehen sollen, so liefern die 8 Linien $\frac{8.7}{1.2} - 1$ und die 5 Linien $\frac{5.4}{1.2} - 1$ Durchschnittspunkte weniger; mithin schneiden sich die 20 Linien nur in

Digitized by Google

$$\frac{20.19}{1.2} - \left\{\frac{8.7}{1.2} - 1 + \frac{5.4}{1.2} - 1\right\} = 154 \text{ Punkten.}$$

15. α) Zwei sich durchkreuzende gerade Linien bilden 4 conkave, 4 flache und 4 convexe Winkel, also im Ganzen $4.3 = 12$ Winkel.

15. β) Zieht man nach 12 Punkten der Peripherie eines Kreises die Radien, so werden dadurch je 12 Centriwinkel gebildet, wenn man je 1, je 2, je 3 .... je 11 Winkel mit einander verbindet; folglich ist die Anzahl aller Centriwinkel $12.11 = 132$. Oder: die 12 Radien lassen sich auf $C_2(12) = \frac{12.11}{1.2}$ verschiedene Weise zu 2 combiniren; folglich entstehen dadurch $2C_2(12) = 12.11$ Winkel.

16. Acht Linien schneiden sich nach Nummer $12.\beta$ in $\frac{8.7}{1.2}$ Punkten. Da nun nach Nummer 15. α) an jedem Durchschnittspunkte zweier Linien 12 Winkel entstehen, so können durch 8 sich durchschneidende Linien $12.\frac{8.7}{1.2}$ Winkel gebildet werden. Nun sind aber 5 dieser 8 Linien parallel. Wären sie nicht parallel, so könnten sie unter sich $12.\frac{5.4}{1.2}$ Winkel bilden. Durch die 5 parallele Linien entsteht also ein minus von $12.\frac{5.4}{1.2}$ Winkeln; folglich ist die wirkliche Anzahl der auf diese Weise gebildeten Winkel nur

$$12.\frac{8.7}{1.2} - 12.\frac{5.4}{1.2} = 12\left(\frac{8.7}{1.2} - \frac{5.4}{1.2}\right) = 216.$$

17. α) 24 sich durchschneidende Linien geben so viele Dreiecke, Vierecke, Fünfecke, als sich 24 bezüglich zu 3, 4 und 5 combiniren läßt; folglich geben:

24 Linien $C_3(24) = \frac{24.23.22}{1.2.3} = 2024$ Dreiecke

n Linien $C_3(n) = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ Dreiecke

24 Linien $C_4(24) = \frac{24.23.22.21}{1.2.3.4} = 10624$ Vierecke

n Linien $C_4(n) = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}$ Vierecke

24 Linien $C_5(24) = \frac{24.23.22.21.20}{1.2.3.4.5} = 42504$ Fünfecke.

n Linien $C_5(n) = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5}$ Fünfecke.

Digitized by Google

17. β) Wenn 4 Parallelinien von 5 andern Parallelinien durchschnitten werden, so entstehen dadurch $\frac{4.3}{1.2} \times \frac{5.4}{1.2} = 60$ Parallelogramme. Denn nimmt man die fragliche Zeichnung vor, so erhalten wir ein großes Parallelogramm, das wie die Figur zeigt, aus 12 kleinern besteht, die zu 1, zu 2, zu 3, zu 4 Parallelogrammen combinirt werden können.

a	b	c	d
e	f	g	h
i	k	l	m

Auf der kleinern Seite liegen 6 Parallelogramme, nämlich:
a+e+i+(a+e)+(e+i)+(a+e+i)
auf der längern 10, nämlich:
a+b+c+d+(a+b)+(b+c)+(c+d)+(a+b+c)+(b+c+d)+(a+b+c+d).
Daraus folgt, daß in dem großen Parallelogramm $6 \times 10 = 60$ Parallelogramme enthalten sind. Allgemein: Werden n Parallelinien von p Parallelinien geschnitten, so entstehen

$$\frac{n(n-1)}{1.2} \times \frac{p(p-1)}{1.2}$$ Parallelogramme.

18. α) Da drei im Raume sich schneidende Ebenen 8 einfache Ecken bilden, so werden

α) von 27 sich durchschneidenden Ebenen $8.\frac{27.26.25}{1.2.3.} = 23380$

und β) von n Ebenen $8.\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ einfache Ecken gebildet.

Da zu einer dreiseitigen Pyramide 4 dreiflächige Ebenen gehören, so können aus

γ) 27 sich im Raume durchschn. Ebenen $\frac{27.26.25.24}{1.2.3.4} = 17550$

und δ) n solcher Ebenen $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} = \binom{n}{4}$ dreiseitige Pyramiden gebildet werden.

19. Nach Nummer 12. δ) können sich n Linien in $\frac{n(n-1)}{1.2}$ Punkten durchschneiden. Da auf je 2 Durchschnittspunkte eine Verbindungslinie kommt, so entstehen aus $\binom{n}{2}$ Durchschnittspunkten

$$\tfrac{1}{2}\binom{n}{2} \cdot \left\{\frac{n(n-1)}{1.2} - 1\right\} = \tfrac{1}{8}n(n-1)\{n(n-2)-2\}$$

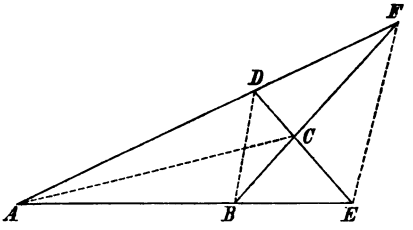
Verbindungslinien. Hierin sind aber die durch n sich schnei-

Digitized by Google

bende Linien entstandenen begränzten Linien mit einbegriffen; nun gibt es nach Nummer 12. η) dieser begränzten Linien $3.\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} = {}^1/_2 n(n-1)(n-2)$. Da es sich nun in dieser Aufgabe um die Verbindungslinien handelt, so muß die Anzahl der begrenzten Linien von obiger Anzahl subtrahirt werden; hiernach gibt es an den Durchschnittspunkten von n sich durchschneidenden Linien

$${}^1/_8 n(n-1)\{n(n-1)-2\} - {}^1/_2 n(n-1)(n-2) \text{ oder}$$
$${}^1/_8 n(n-1)\{n(n-1)-4(n-2)\} \text{ oder endlich}$$
$${}^1/_8 n(n-1)(n-2)(n-3) \text{ Verbindungslinien.}$$

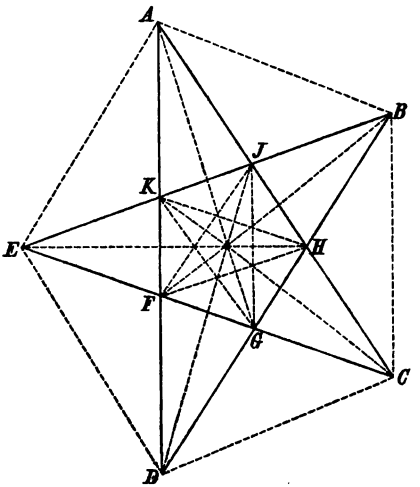
Vier gerade Linien, von denen sich nicht 3 in einem Punkte schneiden, bilden ein vollständiges Vierseit. Die Geraden heißen Seiten, ihre Durchschnittspunkte Ecken, die Verbindungslinien von Ecken, die noch nicht durch eine Seite verbunden sind,



Diagonalen. Ein vollständiges Vierseit, wie vorstehende Figur, hat 4 Seiten, AF, AE, BF und DE, $\frac{3.4}{1.2} = 6$ Ecken, A, B, C, D, E, F und ${}^1/_8.(4.3.2.1) = 3$ Diagonalen, nämlich AC, BD, EF. Es ist keine Fläche, sondern ein Liniensystem.

Fünf sich schneidende Linien haben $\frac{5.4}{1.2} = 10$ Schneidepunkte. Da auf je 2 Schneidepunkte eine Verbindungslinie möglich ist, so kommen im Ganzen auf 10 Schneidepunkte $\frac{10.9}{1.2} = 45$ Verbindungslinien. Hierunter befinden sich aber auch die begränzten Linien; da es dieser nach 12. η) $3.\frac{5.4.3}{1.2.3} = 30$ gibt, so sind $45-30=15$ Verbindungslinien zwischen den Durchschnittspunkten möglich. Daher hat ein vollständiges Fünfseit 5 Seiten, KJ, JH, HG, FG, FK, $\frac{5.4}{1.2} = 10$ Schneidepunkte oder Ecken, nämlich A, B, C, D, E, F, G, H, J, K und ${}^1/_8.(5.4.3.2) = 15$ Diagonalen, nämlich AG, BF, CK, DJ, EH, JF, JG, HK, HF, GK, AB, BC, CD, DE, AE

Digitized by Google



20. Diese Aufgabe könnte auch ebenso lauten: Auf wie viele Arten können die 52 Kartenblätter in vier gleiche Theile, von welchen jeder 13 Karten enthält, eingetheilt werden? Es ist hier zunächst zu untersuchen, auf wie vielerlei Arten sich 52 Karten in 2 Haufen zu 13 und 39 Karten abtheilen lassen. Weil sich nun 52 zu 13 auf $\binom{52}{13} = 635013559600$ verschiedene Arten combiniren lassen, so erhält man ebenso viele verschiedene Abtheilungen. Nun lassen sich 39 Karten in 2 Haufen zu 13 und 26 so oft abtheilen, als sich 39 zu 13 combiniren läßt; dies kann nämlich $\binom{39}{18} = 8122425444$ mal geschehen. Endlich lassen sich 26 Karten in 2 Haufen von je 13 Karten so oft abtheilen, als 26 sich zu 13 combiniren läßt; d. i. $\binom{26}{13} = 10400600$ mal. Daher ist die Anzahl der sämmtlichen Abtheilungen

$$= 635013559600 \times 8122425444 \times 10400600 \times 1$$
$$= 5157850293780050462400 \times 10400600$$
$$= 53644737765488792839237440000.$$

Dasselbe Resultat hätten wir auch erhalten, wenn wir nach §. 452 verfahren wären.

21. Nach §. 452 kann die fragliche Vertheilung auf

$$\frac{12!}{3!\,4!\,5!} = \frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12}{1.2.3.1.2.3.4.1.2.3.4.5} = 27720$$

Digitized by Google

verschiedene Arten bewerkstelligt werden. Dasselbe Resultat gibt $\binom{12}{3}\cdot\binom{9}{4}\cdot\binom{5}{5}$.

22. Hier sind 12 Elemente, welche in 4 verschiedene Reihen zerfallen. Nun besteht die erste Reihe aus 2 rothen, die zweite aus 3 gelben, die dritte aus 3 grünen, die vierte aus 4 blauen Kugeln. Es muß nun ermittelt werden, auf wie viel verschiedene Arten diese Kugeln in mehrere Fächer vertheilt werden können, wenn für jedes Fach entweder Kugeln aus allen oder nur aus einzelnen Reihen genommen werden müssen. Nimmt man aus der ersten Reihe 1 rothe und ebenso 1 rothe für das zweite Fach, so kann dies auf $\frac{2!}{1!\,1!}$ Arten geschehen. Hebt man aus der zweiten Reihe 1 gelbe für das zweite und 2 gelbe Kugeln für das dritte Fach auf, so kann dies $\frac{3!}{1!\,2!}$ mal geschehen. Auf $\frac{3!}{1!\,2!}$ verschiedene Arten können 1 grüne für das zweite und 2 grüne für das dritte Fach und auf $\frac{4!}{2!\,1!\,1!}$ verschiedene Arten für das erste Fach 2, für das zweite 1 und für das dritte 1 blaue Kugel genommen werden. Nun können die Anordnungen der Elemente dieser 4 Reihen mit einander combinirt werden, weshalb die fragliche Vertheilung der Kugeln in die verschiedenen Fächer auf

$$\frac{2!}{1!\,1!}\times\frac{3!}{1!\,2!}\times\frac{3!}{1!\,2!}\times\frac{4!}{2!\,1!\,1!}=2.3.3.12=216$$

verschiedene Arten geschehen kann.

23. α) Bezeichnet man s mit 1, i mit 2, e mit 3, h mit 4, so sind die Variationen zur 2. Classe:

12, 13, 14, 21, 23, 24
31, 32, 34, 41, 42, 43.

Die Anzahl derselben ist also: $V_2(4)=4.3=12$.

Ferner ist: $V_3(4)=4.3.2=24$; es sind folgende:

123, 124, 132, 134, 142, 143
213, 214, 231, 234, 241, 243
312, 314, 321, 324, 341, 342
412, 413, 421, 423, 431, 432.

Endlich ist: $V_4(4)=4.3.2.1=24$; nämlich:

1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432
2134, 2143, 2314, 2341, 2413, 2431

Digitized by Google

3124, 3142, 3214, 3241, 3412, 3421
4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321.

Die letzte Complexion gibt das Wort „Heis" Name des Verfassers der Sammlung.

23. β) Die Anzahl der Variationen der 25 Buchstaben des Alphabets zur 2., 3., 4 Classe

a) mit Wiederholung ist:

$$^{w}V_{2}(25) = 25^2 = 625$$

$$^{w}V_{3}(25) = 25 . {}^{w}V_{2}(25) = 25^3 = 15625$$

$$^{w}V_{4}(25) = 25 . {}^{w}V_{3}(25) = 25^4 = 390625.$$

b) ohne Wiederholung

$$V_{2}(25) = 25.24 = 600$$

$$V_{3}(25) = 23 . V_{2}(25) = 23.600 = 13800$$

$$V_{4}(25) = 22 . V_{3}(25) = 22.13800 = 303600.$$

24. Der Ausdruck Révolution française enthält die alphabetisch geordneten Elemente: aaceefiilnnoorrstuv. Denken wir uns nun bei der Bildung der verschiedenen Classen den jedesmal an der Spitze der Complexionen stehenden Buchstaben von den übrigen getrennt, und variiren demnach eigentlich jedesmal nur 18 Elemente, so liefert jeder Buchstabe $V_{14}(18)$ Variationen zur 14ten Classe. Solcher Complexionen gehen nun, wenn wir alphabetisch verfahren, 8 dem Buchstaben r voran, womit das Wort révolution beginnt und 12 dem Buchstaben u, Anfangsbuchstabe des Anagramm un corse la finira; mithin hat man höchstens $12\,V_{14}(18) - 8\,V_{14}(18) = 4\,V_{14}(18)$ Variationen zu bilden, um das fragliche Anagramm zu erhalten.

In Bezug auf die folgende Aufgabe ist zu bemerken, daß man die Anzahl der zu bildenden Permutationen erhält, wenn man nach §. 454. 12 und nach §. 458. 6 zunächst die Anzahl der Permutationen aufsucht, welche aus der gut geordneten Elementenreihe aaceefiilnnoorrstuv zum Anagramm révolution française führt, dann ebenso verfährt, um das Anagramm un corse voté la finira zu erhalten. Der Unterschied zwischen den gefundenen Permutationen des ersten und des zweiten Anagramms ist die gesuchte Zahl.

Der Name frère Jacques Clément enthält die gut geordnete Elementenreihe acceeeeefilmnqrrstu. Sucht man

Digitized by Google

nach den angezogenen §§. aus diesen Elementen sowohl die Anzahl der Permutationen auf, die nothwendig sind, um das Anagramm frère Jacques Clément als auch das Anagramm c'est l'enfer qui m'a créé zu bilden, so gibt die Differenz zwischen den für das erste und das zweite Anagramm gefundenen Permutationen die Anzahl der Permutationen, welche man von frère Jacques Clément zu bilden hätte, um das fragliche Anagramm zu erhalten.

25. Nach §. 456 Nummer 17 kann er in $4.7.5 = 140$ verschiedenen Anzügen erscheinen.

26. Bei der Silbenmessung dient die kurze Silbe zum Maße. Die Zeichen der beiden Quantitäten sind: ⏑ –. Aus diesen beiden Zeichen lassen sich

α) $\overset{2}{V}(2) = 2^2 = 4$ zweisilbige Versfüße, nämlich:

⏑⏑ Pyrrhichius, –– Spondäus, ⏑– Jambus, –⏑ Trochäus.

β) $\overset{3}{V}(2) = 2^3 = 8$ dreisilbige Füße; es sind folgende:

⏑⏑⏑ Tribrachys, ––– Molossus, ⏑⏑– Anapästus, –⏑⏑ Dactylus, ⏑–⏑ Amphibrachys, –⏑– Amphimacer, ⏑–– Bacchius, ––⏑ Antibacchius.

γ) $\overset{4}{V}(2) = 2^4 = 16$ viersilbige Füße und überhaupt

δ) $\overset{n}{V}(2) = 2^n$ n-silbige Versfüße bilden.

27. Von den daktylischen Versen ist der gewöhnlichste der Hexameter von sechs Füßen, deren letztem jedoch eine Silbe fehlt und immer aus einem Spondäus –– oder Trochäus –⏑ besteht. Statt der Daktylen können in den vier ersten Füßen Spondäen gesetzt werden, ausnahmsweise auch im fünften. Da der sechste Fuß nie verrückt werden kann, sondern immer an derselben Stelle bleiben muß, so gibt es jedesmal so viele verschiedene Arten von Hexametern, als sich 5 Elemente, die entweder alle gleich oder unter denen sich bezüglich 4, 3, 2 gleiche einer Art befinden, permutiren lassen. Der Hexameter mit 5 Spondäen gibt es also $5!:5! = 1$; mit 1 Daktylus und 4 Spondäen $5!:4! = 5$; mit 2 Daktylen und 3 Spondäen $5!:(2!\,3!) = 10$; mit 3 Daktylen und 2 Spondäen $5!:(3!\,2!) = 10$; mit 4 Daktylen und 1 Spondäus $5!:4! = 5$ und mit 5 Daktylen $5!:5! = 1$; also zusammen im Ganzen

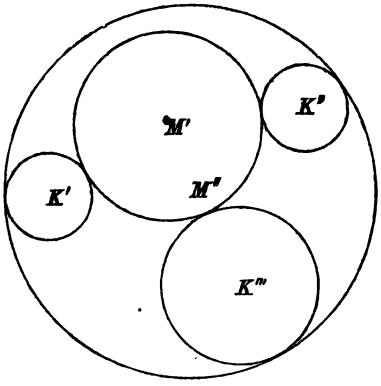
$$1+5+10+10+5+1 = 32.$$

Wegen der Doppelnatur des letzten, sechsten Fußes muß diese Anzahl verdoppelt werden, weshalb es also $2.32 = 64 = 2.\overset{5}{V}(2)$ verschiedene Arten von Hexametern geben kann.

Digitized by Google

28. Je 3 der Töne c e g können in den 7 Oktaven so oft mit einander verbunden werden, als sich 7 zur dritten Classe mit Wiederholungen variiren läßt, d. i.

$$^{w}V_{3}(7) = 7^3 = 343 \text{ mal.}$$



29. α) Bei geeigneter Lage der drei gegebenen Kreise K', K'', K''' gibt es zunächst zwei Kreise M' und M'', von denen jeder die Kreise K', K'', K''' gleichartig berührt. Dann sind auch zwei Kreise denkbar, welche 2 der gegebenen Kreise gleichartig, den dritten ungleichartig mit beiden berühren. Letzteres ist nun auf 3 Arten möglich; folglich gibt es im Allgemeinen $C_3(3) + C_2(3) + C_1(3) + C_0(3) = 1+3+3+1 = 8$ Berührungskreise.

29. β) Auf dieselbe Weise ergibt sich hier, daß im Allgemeinen $C_4(4) + C_3(4) + C_2(4) + C_1(4) + C_0(4) = 1+4+6+4+1 = 16$ Berührungskugeln möglich sind.

30. Jeder der 6 Indicatoren konnte 4 verschiedene Stellungen annehmen, folglich beträgt die Anzahl der verschiedenen Figuren, die man mit dem optischen Telegraphen darzustellen im Stande war, so viel, als sich 4 Elemente zur 6. Classe mit Wiederholung variiren lassen, d. i.

$$^{w}V_{6}(4) = 4^6 = 4096.$$

31. Die Aufgabe ist nicht verschieden von der Aufgabe: Die Anzahl der Combinationen aller Classen aus den Elementen $a^m b^n c^o d^p e^q f^r$ zu suchen. Da $a^m = aaaa \ldots$ a m mal als Faktor enthält, so geben diese Elemente zur 1., 2., 3., ... m^{ten} Combinationsclasse die Formen a, aa, aaa, überhaupt m verschiedene Formen. Aus der zweiten Zahl b erhalten wir n, aus c entstehen o Formen u. s. w. Verbindet man nun alle Formen von a mit denen von b, so ist die Anzahl derselben mn; mithin geben die beiden Elemente a und b im Ganzen $m+n+mn = m+(m+1)n$ verschiedene Formen. Alle Formen von c, deren es o gibt, lassen sich mit sämmtlichen vorhergehenden Formen verbinden. Hier-

Digitized by Google

durch erhalten wir außer den o Formen, welche blos c enthalten, noch neue Formen, deren Anzahl = o[m+(m+1)n] ist. Rechnet man die obigen o Formen hinzu, so ist die Anzahl aller neuen Formen = o+om+(m+1)no = (m+1)(n+1)o. Daher ist die Summe aller möglichen Formen aus a, b, c = m+(m+1)n+(m+1)(n+1)o. Das Element d gibt, für sich genommen, p Formen; daher ist im Ganzen die Anzahl der durch d entstandenen Formen =

$$p+mp+(m+1)np+(m+1)(n+1)op=(m+1)(n+1)(o+1)p.$$

Folglich ist die Summe aller Formen aus den 4 Elementen a, b, c, d =

$$m+(m+1)n+(m+1)(n+1)o+(m+1)(n+1)(o+1)p.$$

Ebenso gibt das neue Element e, welches q mal als Faktor vorkommt, für sich genommen und mit den übrigen verbunden, die neuen Formen, deren Anzahl =

$$(m+1)(n+1)(o+1)(p+1)q$$

und endlich erhalten wir durch das Element f die Formen, deren Anzahl =

$$(m+1)(n+1)(o+1)(p+1)(q+1)r.$$

Die Summe aller dieser Formen ist daher, wenn man die aus a erhaltenen einfachen Formen $m=-1+(m+1)$ setzt:

$$\begin{aligned}&=-1+(m+1)\\&\quad+(m+1)n\\&\quad+(m+1)(n+1)o\\&\quad+(m+1)(n+1)(o+1)p\\&\quad+(m+1)(n+1)(o+1)(p+1)q\\&\quad+(m+1)(n+1)(o+1)(p+1)(q+1)r\\&=-1+(m+1)(n+1)(o+1)(p+1)(q+1)(r+1).\end{aligned}$$

Die Anzahl der Theiler der angegebenen Zahl ist also:

$$(m+1)(n+1)(o+1)(p+1)(q+1)(r+1)-1.$$

Z. B. $5040=2^4.1^2.5.7$. Diese Zahl läßt sich also, da $m=4$, $n=2$, $o=1$, $p=1$, durch $(4+1)(2+1)(1+1)(1+1)-1=5.3.2.2-1=59$ verschiedene Zahlen dividiren, wenn man die Zahl 5040 selbst mitrechnet. Man vgl. I. Theil IV. Auflage, S. 164—165.

32. Soll aus den 6 Zahlen ein Produkt von je 3 Zahlen gebildet werden, so finden wir die Anzahl der möglichen Produkte, wenn wir die 6 Elemente zur dritten Classe ohne Wiederholung combiniren; dies gibt $C_3(6)=\frac{6.5.4}{1.2.3}=20$ Produkte von der Form $a^\alpha b^\beta c^\delta$. Da nun aber weiter jeder der Exponenten in jedem der 20 Produkte nicht immer gleich, sondern in der natürlichen Zahlenreihe von 1 bis α, bezüglich bis β und γ abwechseln soll und die 3 Elemente α, β, γ sich $1.2.3=6$ mal versetzen lassen, so können aus

Digitized by Google

jedem der 20 Produkte 6 verschiedene, also im Ganzen 6.20 = 120 von einander verschiedene Produkte von der fraglichen Form entstehen.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

(Heis §. 91.)

§. 459. Ein Ereigniß, für dessen Eintreffen mehr Gründe, als für dessen Gegentheil vorhanden sind, wird im gewöhnlichen Leben *wahrscheinlich* genannt. Hiermit stimmt aber der Begriff der mathematischen Wahrscheinlichkeit nicht überein. Diese drückt das Verhältniß der einem Ereignisse günstigen Fälle zu der Anzahl aller möglichen Fälle aus, wobei wohl zu beachten ist, in wie fern alle Fälle *gleich* möglich sind. In diesem Sinne kommt daher einem jeden Ereignisse eine Wahrscheinlichkeit zu, dessen Gegentheil nicht absolut nothwendig ist; der Grad der Wahrscheinlichkeit aber ist desto größer, je mehr von allen möglichen Fällen dem Ereignisse selbst günstig sind, und die Wahrscheinlichkeit wird zur Gewißheit, wenn das Ereigniß nothwendig eintreffen muß, wenn also auch nicht ein einziger Fall sich für das Gegentheil angeben läßt. — Unter mathematischer Wahrscheinlichkeit versteht man also das Verhältniß der einem Ereignisse günstigen Fälle zu der Anzahl aller Fälle; sie wird daher immer durch einen Bruch ausgedrückt, dessen Zähler die Anzahl der günstigen Fälle und dessen Nenner alle möglichen Fälle angibt. Je näher also der Werth des Bruches der Einheit kömmt, desto größer ist die Wahrscheinlichkeit und die Einheit ist das Symbol der Gewißheit. Werden z. B. 32 Kartenblätter unter A, B, C, D gleichmäßig vertheilt, so muß einer von ihnen das Aß einer bestimmten Farbe haben. Hier sind also 4 mögliche Fälle, von denen nur einer für A günstig ist; mithin ist die Wahrscheinlichkeit, daß er das fragliche Blatt habe, gleich $1/4$. Die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit, daß Einer der drei übrigen Personen dieses Blatt erhalten wird, hat 3 Fälle für sich, sie ist daher gleich $3/4$ und beide Wahrscheinlichkeiten zusammen sind gleich $1/4 + 3/4 = 1$.

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignißes überhaupt wird die *absolute* Wahrscheinlichkeit genannt. Von ihr ist die *relative* Wahrscheinlichkeit verschieden, welche ohne Rücksicht auf alle übrigen noch möglichen Fälle nur diejenigen mit einander vergleicht, welche einigen bestimmten Ereignissen günstig sind. Unter *zusammengesetzter* Wahrscheinlichkeit versteht man endlich eine solche, die selbst wieder von einer

Digitized by Google

andern Wahrscheinlichkeit abhängig ist. Sind also unter $m+n$ möglichen Fällen n Fälle einem Ereignisse günstig, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß das Ereigniß eintrete, gleich $\frac{n}{m+n}$ und daß dasselbe nicht eintrete, also die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit gleich $1-\frac{n}{m+n}=\frac{m}{m+n}$.

2. Bedeutet $\frac{p}{q}$ die Wahrscheinlichkeit einer Begebenheit, so wird diese Wahrscheinlichkeit um so größer oder kleiner, je nachdem p wächst oder abnimmt, und q denselben Werth behält.

   α) Für $p=0$ oder $\frac{p}{q}=0$ ist das Eintreffen des Ereignisses unmöglich, mithin ist Null das Symbol der Unmöglichkeit.

   β) Für $p={}^1/_2 q$, also $\frac{p}{q}={}^1/_2$ ist das Eintreffen des Ereignisses als ungewiß zu bezeichnen. Daher ist das Ereigniß unwahrscheinlich, wenn seine Wahrscheinlichkeit kleiner als $^1/_2$ ist, und wahrscheinlich, wenn seine Wahrscheinlichkeit größer als $^1/_2$ ist.

   γ) Für $p=q$, also $\frac{p}{q}=1$ ist das Ereigniß gewiß, weil alle Fälle vortheilhaft sind. Hieraus folgt, daß die Wahrscheinlichkeit niemals größer als die Einheit, noch kleiner als Null sein kann, aber daß sie durch alle Werthe und Stufen der Größen, die zwischen Null und 1 liegen, durchgehen kann.

3. Bei dem Aufwerfen einer Münze sind 2 mögliche Fälle, nämlich Krone oder Schrift, unter diesen ist für jedes 1 günstiger Fall, also ist die Wahrscheinlichkeit eines von beiden zu werfen, oder $w={}^1/_2$.

4. Nehme ich 5 Loose, so habe ich 5 günstige und 200 mögliche Fälle; also ist die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen oder $w={}^5/_{200}={}^1/_{40}$.

5. α) Soll ich mit einem Würfel eine bestimmte Zahl, etwa 5, werfen, so ist die Anzahl der möglichen Fälle gleich 6, weil die Würfe, die mit einem Würfel geworfen werden können von 1 bis 6 gehen. Weil aber jeder Wurf nur auf eine einzige Art geworfen werden kann, so ist die Anzahl der günstigen Fälle gleich 1; mithin ist die Wahrscheinlichkeit, 5 zu werfen gleich $w={}^1/_6$.

5. β) Beim Würfeln mit 2 oder 3 Würfeln gestaltet sich die Sache auf folgende Weise: Bezeichnen wir die beiden Wür-

Digitized by Google

fel mit A und B, so können zu jeder Anzahl von Augen, die der Würfel A gibt, sechs verschiedene Mengen von Augen mit dem Würfel B hinzugeworfen werden, woraus folgt, daß es bei einem Wurfe mit 2 Würfeln $6.6 = 6^2 = 36$ mögliche Fälle gibt. Ebenso ist die Anzahl aller möglichen Würfe mit 3 Würfeln gleich $6.6.6 = 6^3 = 216$; weil, wenn mit den beiden Würfeln A und B einer von den genannten 36 Fällen sich ereignet, zu gleicher Zeit irgend einer von den 6 verschiedenen Fällen des dritten Würfels C sich ereignen kann. Daraus ergibt sich dann ferner, daß durch jeden neu hinzugekommenen Würfel die Anzahl der Fälle der vorigen Würfel sechsmal vermehrt wird; mithin sind die möglichen Würfe mit n Würfeln gleich 6^n. Hätten wir Würfel mit p Flächen, so geben n solcher Würfel p^n mögliche verschiedene Würfe. Die sämmtlichen Würfe für 2 Würfel bilden alle Variationen zur 2. Classe mit Wiederholung für 6 Elemente. Die 36 möglichen Fälle können von den beiden Würfeln A und B auf folgende Weise herbeigeführt werden:

A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
1	1	2	1	3	1	4	1	5	1	6	1
1	2	2	2	3	2	4	2	5	2	6	2
1	3	2	3	3	3	4	3	5	3	6	3
1	4	2	4	3	4	4	4	5	4	6	4
1	5	2	5	3	5	4	5	5	5	6	5
1	6	2	6	3	6	4	6	5	6	6	6

Hieraus folgt, daß mit 2 Würfeln geworfen werden können:

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Augen
1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1	mal

Wie hieraus hervorgeht, hat nicht jede Zahl eine gleiche Wahrscheinlichkeit für sich, da z. B. 2 oder 12 nur in dem einzigen Falle geworfen wird, wenn von beiden Würfeln beziehlich 1 oder 6 oben liegt; hingegen 7 auf 6 verschiedene Weise zum Vorschein kommen kann. Soll also die absolute Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte Zahl angegeben werden, so muß man berücksichtigen, wie viele Fälle dem Ereignisse günstig sind und so ergibt sich die absolute Wahrscheinlichkeit für die Zahl 3, wobei 2 günstige Fälle vorkommen $w = {}^2/_{36} = {}^1/_{18}$; für die Zahl 4, welche 3 günstige Fälle gibt $w = {}^3/_{36} = {}^1/_{12}$ und für die Zahl 12, wobei nur 1 günstiger Fall ist $w = {}^1/_{36}$.

6. Aehnlich wie in der vorigen Nummer finden wir, daß mit 3 Würfeln geworfen werden können:

Digitized by Google

3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	Augen
1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1	mal

Um für jede Anzahl Würfel zu finden, wie oft unter allen möglichen Würfen jede mögliche Anzahl Würfe geworfen werden könne, erwäge man folgendes: Da durch jeden hinzukommenden Würfel die Anzahl der Fälle bei der vorigen Anzahl Würfel mit 6 vervielfacht wird, so muß die Anzahl der Würfe bei der vorigen Anzahl Würfel 6mal genommen werden, um die Anzahl der Würfe der um 1 größeren Anzahl Würfel daraus herzuleiten. Für 3 Würfel ist z. B. die Anzahl der Würfe gleich

$$6.(1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1)$$

Nun sei A die Reihe, welche anzeigt, wie oft mal jeder mit n Würfeln mögliche Wurf vorkommt. Man soll aus ihr die Reihe B für $(n+1)$ Würfel herleiten, z. B. für $n=2$ ist

$$A = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2, 1$$

und die gesuchte Reihe für $n+1=3$

$$B = 1, 3, 6, 10, 15, 21, 25, 27, 27, 25, 21, 15, 10, 6, 3, 1.$$

Die Reihe A hat $6n-(n-1)=(5n+1)$ Glieder, weil der niedrigste Wurf mit n Würfeln = n und der höchste $=6n$ ist. In ihr zeigt

das erste Glied, wie oftmal n Augen geworfen werden;
„ zweite „ „ „ $(n+1)$ „ „ „
„ dritte „ „ „ $(n+2)$ „ „ „
. . . . . „
„ m^{te} „ „ „ $(n+m-1)$ „ „ „
. . . . . „
„ $(5n+1)^{te}$ „ „ „ $(5n+n)$ „ „ „

Verbindet man mit dem Wurf $(n+m-1)$, der q mal vorkomme, jede Seite des hinzukommenden Würfels, so kann dies mit jeder Seite q mal geschehen. Aber alsdann wird aus $n+m-1$ der Wurf $(n+m)$; $(n+m+1)$; $(n+m+2)$; $(n+m+3)$; $(n+m+4)$; $(n+m+5)$; je nachdem die Seite 1, 2, 3, 4, 5, 6 des hinzugekommenen Würfels mit dem Wurfe $(n+m-1)$ verbunden wird. Hierdurch ändert sich nun zwar die Anzahl der Augen, aber nicht die Anzahl der Fälle, und hieraus folgt zugleich, daß man, um aus der Reihe A die Reihe B herzuleiten, jene sechsmal so unter einander schreiben müsse, daß man bei jeder Reihe eine Stelle weiter nach rechts geht. Die Reihe, welche aus der Summe jeder senkrechten Colonne entsteht, wird die gesuchte Reihe B sein. Da für zwei Würfel die Reihe

$$A = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2, 1 \text{ ist,}$$

so ist für 3 Würfel die Reihe B gleich

Digitized by Google

1,	2,	3,	4,	5,	6,	5,	4,	3,	2,	1				
	1,	2,	3,	4,	5,	6,	5,	4,	3,	2,	1			
		1,	2,	3,	4,	5,	6,	5,	4,	3,	2,	1		
			1,	2,	3,	4,	5,	6,	5,	4,	3,	2,	1	
				1,	2,	3,	4,	5,	6,	5,	4,	3,	2,	1

1, 3, 6, 10, 15, 21, 25, 27, 27, 25, 21, 15, 10, 6, 3, 1

Fragt es sich nun, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, mit 3 Würfeln 3 zu werfen, so liegt hier nur ein günstiger Fall unter 216 Fällen vor, mithin ist die Wahrscheinlichkeit, 3 zu werfen, also $w = {}^{1}/_{216}$. Sollen aber 5 Augen geworfen werden, so sind unter 216 Fällen 6 günstige; daher $w = {}^{6}/_{216} = {}^{1}/_{36}$. Für 7 Augen gibt es unter 216 Fällen 15 günstige, also ist hierfür die Wahrscheinlichkeit $w = {}^{15}/_{216} = {}^{5}/_{72}$.

Drei gleiche Zahlen können nur auf 6 verschiedene Arten geworfen werden, nämlich 3 Einsen, oder 3 Zweier, 3 Dreier, 3 Vierer, 3 Fünfer, oder 3 Sechser und jeder dieser Würfe ist nur einmal möglich; folglich ist die Wahrscheinlichkeit für einen Pasch, also $w = {}^{6}/_{216} = {}^{1}/_{36}$.

Mit 2 Würfeln können auf 6 verschiedene Arten zwei gleiche Zahlen geworfen werden und bei jedem dieser Würfe kann der dritte Würfel eine der 5 übrigen Seiten zeigen. Nun gibt es 15 Fälle, wo vom ersten und zweiten, oder vom ersten und dritten, oder vom zweiten und dritten Würfel zwei gleiche Zahlen geworfen werden können; treten nun zu jedem dieser 3 möglichen Fälle die Augen des dritten hinzu, so entstehen dadurch 3.5 oder 15 Fälle; mithin sind 15.6 oder 90 Fälle möglich, daß unter den geworfenen Zahlen zwei gleiche sein werden und die dritte von diesen verschieden ist. Die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens ist also $w = {}^{90}/_{216} = {}^{5}/_{12}$.

Die Anzahl der Fälle, in welchen alle 3 geworfene Zahlen von einander verschieden sind, wird durch die Variationsformel zur 3. Classe ohne Wiederholung ausgedrückt nach §. 456 Nummer 21. Es ist nämlich: $V^{3}(6) = 6.5.4 = 120$; hiernach sind unter 516 möglichen Fällen 120 günstige, daher die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens $w = {}^{120}/_{216} = {}^{5}/_{9}$.

Sollen 3 auf einander folgende Zahlen geworfen werden, so können dies keine andern, als folgende 4 Zahlen sein; nämlich: 123, 234, 345, 456. Nun kann jede der 4 Zahlen auf $1.2.3 = 6$ verschiedene Arten geworfen werden, da jeder der 3 Würfel die Zahlen 1, 2, 3, geben kann und weil dasselbe von den 3 übrigen Zahlen gilt, so sind also

Digitized by Google

unter 216 Fällen $4.6 = 24$ günstige; folglich ist die fragliche Wahrscheinlichkeit $w = {}^{24}/_{216} = {}^{1}/_{9}$.

Die Anzahl aller möglichen Würfe mit 4 Würfeln ist nach Nummer 5 gleich $6^4 = 1296$. Suchen wir jetzt die dem Eintreffen günstigen Fälle zu bestimmen, so finden wir mit Bezug auf das oben Gesagte, daß mit 4 Würfeln geworfen werden können:

4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	Augen
1	4	10	20	35	56	80	104	125	140	146	140	125	104	80	56	35	20	10	4	1	mal

Wenn also mit 4 Würfeln 9 geworfen werden soll, so sind unter 1296 möglichen Fällen 56 günstige; folglich ist die Wahrscheinlichkeit $w = {}^{56}/_{1296} = {}^{7}/_{162}$.

7. α) Sind unter n möglichen Fällen m_1 einem gewissen Ereignisse günstig, m_2 einem zweiten und m_3 einem dritten, so ist die Anzahl der günstigen Fälle gleich $m_1 + m_2 + m_3$; folglich ist die Wahrscheinlichkeit W, daß das eine oder das andre der 3 Ereignisse eintrete

$$W = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} + \frac{m_3}{n}$$

oder wenn $\frac{m_1}{n} = w_1$, $\frac{m_2}{n} = w_2$, und $\frac{m_3}{n} = w_3$, so ist

$$W = w_1 + w_2 + w_3.$$

Die Wahrscheinlichkeit also, daß von drei von einander unabhängigen Ereignissen irgend einer der günstigen Fälle eintrete, wird gefunden, wenn man die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller einzelnen Ereignisse sucht.

7. β) Man suche zunächst die Wahrscheinlichkeit w_1 mit 2 Würfeln in einem Wurfe 7 zu werfen; dann die Wahrscheinlichkeit w_2 mit ebenso vielen Würfeln in einem Wurfe 8 und endlich w_3 in einem Wurfe 9 zu werfen. Nach der Tabelle in Nummer 5 sind die günstigen Fälle 7, 8 oder 9 zu werfen, bezüglich 6, 5, 4; folglich ist

$$w_1 = {}^{6}/_{36} = {}^{1}/_{6}; \quad w_2 = {}^{5}/_{36} \text{ und } w_3 = {}^{4}/_{36} = {}^{1}/_{9};$$

mithin ist

$$W = {}^{1}/_{6} + {}^{5}/_{36} + {}^{1}/_{9} = {}^{15}/_{36} = {}^{5}/_{12}.$$

8. Die Anzahl aller möglichen Würfe mit 8 Würfeln ist $6^8 = 1679616$; die Anzahl der günstigen Fälle für die einzelnen Würfe ist in folgender Tabelle enthalten:

Digitized by Google

8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	Augen
1	8	36	120	330	792	1708	3368	6147	10480	mal
18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	Augen
16808	25488	36688	50288	65808	82384	98813	113688	125588	133288	mal
28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	Augen
135954	133288	125588	113688	98813	82384	65808	50288	36688	25488	mal
38	39	40	41	42	43	44	45	46	47 48	Augen
16808	10480	6147	3368	1708	792	330	120	36	8 1	mal

Man sieht aus diesem Schema, wie aus den frühern, daß der erste und letzte Wurf, so wie die von denselben gleich weit entfernten, je zwei und zwei Würfe auf gleich viel Arten herbeigeführt werden können. Ferner folgt hieraus, daß der günstigen Fälle 8 oder 48, ferner 9 oder 47 und 10 oder 46 zu werfen bezüglich nur 1, 8, 36 sind; weshalb $w_1 = {}^1/_{1679616}$; $w_2 = {}^8/_{1679616} = {}^1/_{209952}$ und $w_8 = {}^{36}/_{1679616} = {}^1/_{46656}$. Die Aussichten für den Besitzer des Spieles sind demnach die allergünstigsten.

Da sich die Wahrscheinlichkeit des Spielers zu gewinnen, wie $1:6^8$ verhält und der Einsatz genau der Wahrscheinlichkeit proportionirt sein muß, so wird der Besitzer des Spieles, wenn der Spielende 1 Kreuzer einsetzt, die Nummern 8 und 48 mit einem Gegenstande besetzen müssen, der einen Werth von 6^8 Kreuzern hat. In diesem Falle würde der Werth des Gegenstandes dem Einsatz entsprechen. Nun will aber der Besitzer des Spieles 1000 % gewinnen, d. h. er will 11 mal weniger einsetzen als er soll; mithin besetzt er die fraglichen Nummern mit Gegenständen, die nur einen Werth von

$1679616 : 11 = 152692$ Krz $= 1526{,}92$ Gulden haben.

Die Wahrscheinlichkeit 9 oder 47 Augen zu werfen ist dem Verhältnisse $1:209952$ gleich, also besetzt der Besitzer des Spieles diese Nummern mit Gegenständen von $209952:11 = 19086$ Krz. $= 190{,}86$ Gulden an Werth. Auf die Nummern 10 und 46 wird er daher setzen: $46656:11 = 4241$ Krz. $= 42{,}41$ Gulden.

Hieraus geht hervor, in wie großem Nachtheile sich der Spielende dem Besitzer des Spieles gegenüber befindet, da in allen derartigen Spielen bei höchstgeringer Wahrscheinlichkeit zu gewinnen, der Werth des Gegenstandes dem Einsatze, wie gering derselbe auch oft sein mag, durchaus nicht entspricht.

9. Sind in einer Urne 3 schwarze, 2 weiße und 5 rothe Kugeln, so können 3 Kugeln auf so viel verschiedene Arten

Digitized by Google

gezogen werden, als sich $3+2+5=10$ zu 3 combiniren lassen, d. i. $\binom{10}{3}=120$ mal. Dabei kann jede der schwarzen Kugeln mit jeder der weißen und zugleich auch mit jeder der rothen $\binom{3}{1}\cdot\binom{2}{1}\cdot\binom{5}{1}=3.2.5=30$ mal vereinigt vorkommen; daher sind der günstigen Fälle 30 und der möglichen 120; folglich ist die Wahrscheinlichkeit auf einen Zug 1 schwarze, 1 weiße und 1 rothe Kugel heraus zu nehmen, also $W=30/120=1/4$.

10. Der möglichen Fälle 3 Blätter zu ziehen, gibt es so viele, als sich die 52 Blätter zu 3 combiniren lassen, also $C_3(52)=\frac{52.51.50}{1.2.3}=22100$. Nun enthält das Kartenspiel 13 Coeurs, welche $C_3(13)=\frac{13.12.11}{1.2.3}=286$ Combinationen zu 3 geben und dies sind die günstigen Fälle; folglich ist die Wahrscheinlichkeit, daß die 3 gezogenen Karten Coeurs sind oder

$$W=286/22100=11/850.$$

11. Aus den 52 Blättern kann man auf $C_2(52)=\frac{52.51}{1.2}=1326$ verschiedene Arten 2 Blätter herausziehen. Nun enthält das Kartenspiel in jeder Farbe 3 Bilder und 1 Aß und weil jedes Bild und Aß für 11 gelten soll, 4 Blätter à 11 Augen in allen 4 Farben, also 16 Blätter à 11 Augen; hierzu kommen noch 4 Blätter à 10 Augen. Sollen nun die beiden gezogenen Blätter 21 Augen geben, so muß 1 Zehnerblatt nebst 1 Bilde oder 1 Aß gezogen werden. Es fragt sich nun, wie oft dies der Fall sein kann. Die günstigen Fälle ergeben sich offenbar, wenn wir die Anzahl aller Variationen für die Elementenmengen 4 und 16 suchen; diese ist nach §. 456 Nummer 17 gleich $4.16=64$; mithin ist die fragliche Wahrscheinlichkeit oder

$$W=64/1326=32/663 \text{ oder nahezu } 1/21.$$

12. Combinirt man 90 zur 5. Classe ohne Wiederholung, so erhält man als Anzahl aller möglichen Fälle für das Ausziehen von 5 Nummern

$$C_5(90)=\frac{90.89.88.87.86}{1.2.3.4.5}$$

Besetzt man nun eine einzelne Nummer, die mit 4 andern verbunden herauskommen kann, so ist die Anzahl der günstigen Fälle

Digitized by Google

$$C_4(89) = \frac{89.88.87.86}{1.2.3.4}.$$

Mithin ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine der 5 Nummern herauskomme,

$$\text{also } w_1 = \frac{89.88.87.86}{1.2.3.4} : \frac{90.89.88.87.86}{1.2.3.4.5} = 1 : {}^{90}/_{5} = 1 : 18.$$

Demgemäß müßte der Einsatz im Falle des Gewinnens 18 mal bezahlt werden; die Lotterie bezahlt ihn aber nur 15 mal; mithin behält sie ${}^{3}/_{18} = {}^{1}/_{6}$ von der auszuzahlenden Summe, was ${}^{1}/_{6} . 100 = 16{}^{2}/_{3}$ % ausmacht.

Setzt man auf eine Ambe, so werden 2 Nummern mit 3 andern auf

$$C_3(90-2) = \frac{88.87.86}{1.2.3}.$$

verschiedene Arten verbunden; in diesem Falle ist die Wahrscheinlichkeit des Gewinnes

$$w_2 = \frac{88.87.86}{1.2.3} : \frac{90.89.88.87.86}{1.2.3.4.5}$$

$$= 1 : \frac{90.89}{4.5} = 2 : 801 = 1 : 400{,}5.$$

Im Falle des Gewinnens müßte also der Einsatz 400,5 mal ausbezahlt werden; die Lotterie bezahlt aber nur das 270-fache, behält also das $\frac{130{,}5}{400{,}5} = {}^{261}/_{801}$ fache für sich, was ${}^{261}/_{801} . 100 = 32{}^{52}/_{89}$ % zu wenig ist.

Werden 3 Nummern besetzt, so werden diese mit 2 andern combinirt auf

$$C_2(90-3) = \frac{87.86}{1.2}$$

verschiedene Arten; folglich ist die Wahrscheinlichkeit des Gewinnes

$$w_3 = \frac{87.86}{1.2} : \frac{90.89.88.87.86}{1.2.3.4.5} = 1 : \frac{90.89.88}{3.4.5} = 1 : 11748.$$

Der Gewinner einer Terne müßte seinen Einsatz also 11748 mal bekommen; man zahlt ihm aber denselben nur 5500 mal, was ${}^{6248}/_{11748} . 100 = 53{}^{539}/_{2937}$ oder $53{}^{1}/_{5}$ % zu wenig ist.

Vier Nummern, die besetzt werden, können auf 90—4 = 86 verschiedene Arten mit einer fünften verbunden werden; folglich ist die Wahrscheinlichkeit des Gewinnes

$$w_4 = \frac{86}{1} : \frac{90.89.88.87.86}{1.2.3.4.5} = 1 : \frac{90:89.88.87}{2.3.4.5} = 1 : 511038.$$

Digitized by Google

Statt den Einsatz 511038 mal zu bezahlen, zahlt man ihn nur 75000 mal und nimmt demnach $^{436038}/_{511038} . 100 = 85^{103}/_{120}\,\%$ Gewinn.

Fünf Zahlen bilden eine Quinterne und 90 Zahlen geben $\frac{90.89.88.87.86}{1.2.3.4.5} = 43949268$ Quinternen; daher ist

$$w_5 = 1 : 43949268.$$

12. β) Ist die Anzahl der Nummern = n und sollen bei jeder Ziehung r Nummern gezogen werden, so gibt die Combination von n Elementen zur r^{ten} Classe ohne Wiederholung die Anzahl aller möglichen Fälle. Diese betragen nach §. 455. 8. α)

$$\underset{r}{C}(n) = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(r-1))}{1.2.3.\ldots.r} = \binom{n}{r}.$$

Werden nun a Nummern besetzt, so können dieselben mit (n — a) übrigen combinirt werden und zwar zur $(r-a)^{ten}$ Classe; mithin ist die Anzahl der günstigen Fälle

$$\underset{r-a}{C}(n-a) = \binom{n-a}{r-a}$$

folglich ist die fragliche Wahrscheinlichkeit

$$W = \underset{r-a}{C}(n-a) : \underset{r}{C}(n) = \binom{n-a}{r-a} : \binom{n}{r}.$$

13. Wenn unter N möglichen Fällen n Fälle für das Ereigniß A und n′ Fälle für das Ereigniß B günstig sind, so sind unter n+n′ Fällen n Fälle, in welchen A und n′ Fälle, in welchen B eintritt; also ist die relative Wahrscheinlichkeit für A, d. h. die Wahrscheinlichkeit, daß unter den Ereignissen A und B das Ereigniß A eintrete

$$\frac{n}{n+n'} = \frac{\frac{n}{N}}{\frac{n}{N}+\frac{n'}{N}} = \frac{w}{w+w'}$$

und für B $\quad \frac{n'}{n+n'} = \frac{\frac{n'}{N}}{\frac{n}{N}+\frac{n'}{N}} = \frac{w'}{w+w'}$

wenn w und w′ die absoluten Wahrscheinlichkeiten der beiden Fälle A und B bezeichnen. Man erhält also die relative Wahrscheinlichkeit eines Falles einer Art, wenn man seine Wahrscheinlichkeit durch die Summe aus seiner Wahrscheinlichkeit und den Wahrscheinlichkeiten der Fälle andrer Art dividirt.

Digitized by Google

14. In der Urne befinden sich $7+5+9+14=35$ Kugeln und weil 2 Kugeln herausgenommen werden sollen, so ist die Anzahl aller gleich möglichen Fälle gleich

$$C_2(35)=\frac{35.34}{1.2}=595.$$

Weil nun eine weiße und eine blaue Kugel sich $7.9=63$ mal, dagegen eine schwarze und eine rothe Kugel $14.5=70$ mal variiren lassen, so ist die Wahrscheinlichkeit für das Herausziehen einer weißen und einer blauen Kugel, also $w={}^{63}/_{595}$ und einer schwarzen und rothen Kugel, also $w_1={}^{70}/_{595}$; folglich ist die relative Wahrscheinlichkeit, eine weiße und eine blaue Kugel herauszuziehen, also

$$W=\frac{{}^{63}/_{595}}{{}^{63}/_{595}+{}^{70}/_{595}}=\frac{63}{63+70}={}^{9}/_{19}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, eher eine schwarze und eine rothe Kugel zu ergreifen, also

$$W_1=\frac{70}{63+70}={}^{10}/_{19}.$$

Hiernach ist also $W_1>{}^1/_2$, dagegen $W<{}^1/_2$; folglich ist W_1 wahrscheinlicher als W.

15. Eine ungrade Anzahl oder Unpaar wird genommen, wenn man 1 oder 3, oder 5 oder 7 oder überhaupt $2m+1$ nimmt. Demnach geben offenbar alle Combinationen mit ungeradem Classenexponent die Anzahl aller Unpaarzahlen. Setzt man daher die Anzahl aller möglichen Fälle unter 7 Kugeln Unpaar zu greifen, gleich U, so ist:

$$(1)\quad U=\binom{7}{1}+\binom{7}{3}+\binom{7}{5}+\binom{7}{7}.$$

Eine grade Anzahl oder Paar wird genommen, wenn man 2, oder 4, oder 6 oder überhaupt $2m$ nimmt. Daher geben alle Combinationen mit gradem Classenexponent die Anzahl aller Paarzahlen. Bezeichnet man daher mit P die Anzahl der Fälle, unter 7 Kugeln Paar zu greifen, so ist:

$$(2)\quad P=\binom{7}{2}+\binom{7}{4}+\binom{7}{6}.$$

Durch Addition und Subtraktion der Gleichung (2) und (1) wird:

$$(3)\quad P\pm U=\pm\binom{7}{1}+\binom{7}{2}\pm\binom{7}{3}+\binom{7}{4}\pm\binom{7}{5}+\binom{7}{6}\pm\binom{7}{7}\text{ oder}$$

$$=\pm 7+21\pm 35+35\pm 21+7\pm 1=63\pm 64.$$

Addiren wir zu beiden Seiten der Gl. (3) 1, so wird:

Digitized by Google

(4) $P \pm U + 1 = 64 \pm 64 = (1 \pm 1)^7$.

Hieraus folgt, je nachdem das obere oder untere Zeichen gilt:

(5) $P + U + 1 = 2^7$ und (6) $P - U + 1 = 0$.

Es ist daher die Anzahl aller möglichen Fälle Paar oder Unpaar zu greifen:

(7) $P + U = 2^7 - 1$ und (8) $P - U = -1$.

Aus (7) und (8) folgt durch Addition und Subtraktion:

$$P = \frac{2^7 - 2}{2} = 2^{7-1} - 1 = 2^6 - 1$$

$$U = \frac{2^7}{2} = 2^{7-1} = 2^6.$$

Sind daher die bezüglichen Wahrscheinlichkeiten für Paar und Unpaar w und w_1, so ist:

$$w = \frac{2^6 - 1}{2^7 - 1} \text{ und } w_1 = \frac{2^6}{2^7 - 1}.$$

Die letzte Wahrscheinlichkeit ist also immer größer, als die erste und es verhalten sich die beiden Wahrscheinlichkeiten wie:

$$P : U = (2^6 - 1) : 2^6 = 63 : 64.$$

16. α) Die Wahrscheinlichkeit ist einfach, wenn nur eine Wahrscheinlichkeit betrachtet wird; zusammengesetzt aber, wenn mehrere einfache Wahrscheinlichkeiten in Betracht kommen. Dies kann auf verschiedene Arten geschehen, da es denn ebenso verschiedene Arten der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit gibt. So liefert Nummer 7 ein Beispiel einer Art der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit, wo durch Addition der absoluten Wahrscheinlichkeiten die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des einen oder andern Ereignisses gefunden wurde. Wenn aber ein wahrscheinlicher Erfolg erst von einem andern ebenfalls wahrscheinlichen Erfolge so abhängt, daß von zwei verschiedenen Fällen, nachdem der erste schon erfolgt ist, der andere sich zutrage, so ist dies eine zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit anderer Art. Wenn z. B. von zweien Ereignissen die Wahrscheinlichkeit des ersten gleich $\frac{p}{q}$ und die des andern gleich $\frac{r}{s}$ ist, so ist die Wahrscheinlichkeit daß beide Ereignisse zugleich stattfinden, aus den Wahrscheinlichkeiten beider Ereignisse durch Multiplication der absoluten Wahrscheinlichkeiten zusammengesetzt oder gleich $\frac{pr}{qs}$. Denn ein jeder von den q Fällen des ersten Ereignisses kann mit jedem

Digitized by Google

der s Fälle des zweiten Ereignisses zusammentreffen; also ist die Anzahl der Fälle, wo zwei verschiedene Ereignisse zusammentreffen können, gleich qs. Der möglichen Fälle gibt es also qs. Ein jeder der p Fälle, welche für das erste Ereigniß günstig sind, kann mit jedem der r günstigen Fälle des zweiten Ereignisses zu gleicher Zeit geschehen, also ist die Anzahl der günstigen Fälle, welche die beiden Ereignisse zugleich geben, gleich pr; folglich ist die Wahrscheinlichkeit, daß die beiden Ereignisse zugleich sich ereignen werden, $w = \frac{pr}{qs}$. Würde zu den 2 Ereignissen noch ein drittes hinzutreten, dessen Wahrscheinlichkeit gleich $\frac{m}{n}$ wäre, so würde die Wahrscheinlichkeit für das zu gleicher Zeit stattfindende Eintreffen der 3 Ereignisse gleich $\frac{mpr}{nqs}$ sein.

16. β) Aus dem eben Gesagten folgt, daß, wenn mehrere Ereignisse einander gleich und die bezüglichen Wahrscheinlichkeiten $\frac{p}{q}, \frac{r}{q}, \frac{s}{q} \ldots$ sind, deren Anzahl n beträgt, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß das Ereigniß das erste-, zweite- ..., n^{te} mal stattfindet, gleich $\frac{prs.}{q^n}$. Für $p = r = s$ erhält man die Wahrscheinlichkeit, daß alle diese Ereignisse zusammengeschehen oder was dasselbe ist, daß ein Ereigniß mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{p}{q}$ n mal hintereinander eintreten wird, gleich $\left(\frac{p}{q}\right)^n$.

17. α) Bezeichnen w und w^1 bezüglich die Wahrscheinlichkeiten zweier Ereignisse A und B, so ist die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit für A gleich $1 - w$. Da nun B nur in dem Falle stattfinden kann, wenn A nicht eintrifft, so ist die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen von B gleich $(1 - w)w'$.

17. β) Die Wahrscheinlichkeit für das Nicht-Eintreffen von B ist gleich $1 - w'$; folglich ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen von A gleich $w(1 - w')$.

17. γ) Aus α) und β) folgt, daß die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen von A gleich $1 - w$ und für B gleich $1 - w'$, mithin ist die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit, daß weder A noch B eintreffe, gleich $(1-w)(1-w')$.

17. δ) Die Wahrscheinlichkeit, daß von A und B wenigstens

Digitized by Google

Eines eintreffe, ist die Summe vermindert um das Produkt der Wahrscheinlichkeit beider Ereignisse. Sind nun w und w' die Wahrscheinlichkeiten der beiden Ereignisse an und für sich, so ist nach α) die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen von B gleich $(1-w)w'$. Weil nun aber das erste oder doch das zweite Ereigniß eintreten soll, so ist die Wahrscheinlichkeit hierfür nach Nummer 7. α) oder, wenn wir dieselbe mit W bezeichnen:

$$W = w+(1-w)w' = w+w'-w.w' = 1-(1-w)(1-w').$$

Oder: Nach γ) ist die Wahrscheinlichkeit, daß weder A noch B eintreffe, gleich $(1-w)(1-w')$; also ist die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit, daß von A und B wenigstens Eines eintreffe oder

$$W = 1-(1-w)(1-w') = w+w'-w.w'.$$

18. Mit 1 Würfel können 6 mögliche Fälle und nur 1 günstiger Fall stattfinden; folglich ist die Wahrscheinlichkeit, dieselbe Zahl 1, 2, 3, 4 .. nmal zu werfen, bezüglich gleich $^1/_6$, $(^1/_6)^2$, $(^1/_6)^3$, $(^1/_6)^4 \ldots (^1/_6)^n$ nach 16 β).

Bei dem Spiele Kron oder Schrift ist die absolute Wahrscheinlichkeit gleich $^1/_2$; folglich ist die Wahrscheinlichkeit, Kron oder Schrift 1, 2, 3, 4 ... nmal zu werfen, bezüglich $^1/_2$, $(^1/_2)^2$, $(^1/_2)^3$, $(^1/_2)^4 \ldots (^1/_2)^n$.

19. α) Da mit 2 Würfeln überhaupt nur $6^2=36$ verschiedene Würfe stattfinden können und 9 mit 2 Würfeln auf 4 und 8 auf 5 verschiedene Arten geworfen werden können nach 5. β), so sind hier die einfachen Wahrscheinlichkeiten jede für sich bezüglich $^4/_{36}=^1/_9$ und $^5/_{36}$. Da die absolute Wahrscheinlichkeit des zweiten Falles $^5/_{36}$ ist, derselbe aber auf dem ersten selbst nur wahrscheinlichen Falle beruht, so muß seine Wahrscheinlichkeit in eben dem Maße abnehmen, in welchem die Wahrscheinlichkeit des ersten Falles abnimmt und kann folglich nicht mehr $^5/_{36}$, sondern nur $^1/_9 . ^5/_{36} = ^5/_{324}$ betragen.

19. β) Nach α) ist die Wahrscheinlichkeit, mit 2 Würfeln auf den ersten Wurf 9 und auf den zweiten 8 zu werfen, bezüglich $^4/_{36}$ und $^5/_{36}$; also ist nach 17. δ) die fragliche Wahrscheinlichkeit oder

$$W = ^4/_{36}+^5/_{36}-^4/_{36}.^5/_{36} = ^{19}/_{81}.$$

Oder: Die entgegengesetzten Wahrscheinlichkeiten für beide Ereignisse sind $1-^4/_{36}$ und $1-^5/_{36}$; demnach ist die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit, daß von den beiden Würfen wenigstens Einer gelinge, also

$$W = 1-(1-^4/_{36})(1-^5/_{36}) = ^{19}/_{81}.$$

19. γ) Die Wahrscheinlichkeit, mit 2 Würfeln im ersten Wurfe

Digitized by Google

7 zu werfen, ist nach 5.β) gleich $^6/_{36} = {}^1/_6$; demnach ist die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit gleich $1 - {}^1/_6 = {}^5/_6$; mithin ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Wurf von 7 Augen nicht das erste, wohl aber das zweite Mal gelingt nach 17. α) gleich $^5/_6 . {}^1/_6 = {}^5/_{36}$. Für den Fall aber, daß es auch das zweite Mal nicht gelingt, wohl aber das dritte Mal, ist die Wahrscheinlichkeit $(^5/_6)^2 . {}^1/_6 = {}^{25}/_{216}$. Deshalb ist nach 7. α). die Wahrscheinlichkeit, daß der Wurf das eine oder andere Mal gelinge, der Summe der günstigen Fälle gleich, also

$$W = {}^1/_6 + {}^5/_{36} + {}^{25}/_{216} = {}^{91}/_{216}.$$

20. Die einfache Wahrscheinlichkeit a zu werfen, sei x und b zu werfen, sei y, alsdann ist nach 16 die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit bei p Versuchen (p — n) mal a und n mal b mit p Würfeln zu werfen, also

$$W = x^{p-n} . y^n.$$

Dieser Ausdruck gibt indeß nur eine bestimmte Ordnung der Ereignisse. Um nun alle möglichen Anordnungen zu erhalten, muß dem Ausdruck noch die Permutationszahl der (p — n) Elemente x und n Elemente y als Faktoren vorgesetzt werden, und diese ist nach §. 454. 8. $\varkappa$):

$$\frac{p!}{(p-n)!\,n!} = \frac{p(p-1)(p-2)\ldots 1}{1.2\ldots(p-n).1.2\ldots n}$$

$$= \frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-(n-1))}{1.2.3\ldots n} = \binom{p}{n} \quad (\S.\ 455.\ 8.\alpha).$$

Daher ist die Wahrscheinlichkeit für das zusammengesetzte Ereigniß gleich

$$\frac{p!}{(p-n)!\,n!} . x^{p-n} . y^n = \binom{p}{n} . x^{p-n} . y^n.$$

Nun ist dieser Ausdruck das allgemeine Glied von $(x+y)^p$, woraus folgt, daß durch die Glieder dieses Binoms alle hier möglichen Fälle mit ihren bezüglichen Wahrscheinlichkeiten ausgedrückt werden, und es werden selbst die Wahrscheinlichkeiten a und b in einer bestimmten Ordnung zu werfen, dadurch ausgedrückt, daß man überall die Coefficienten wegläßt.

21. Die Wahrscheinlichkeit, in die erste Urne zu greifen, ist gleich $^1/_2$ und die Wahrscheinlichkeit, daß eine aus derselben gezogene Kugel weiß sei, ist, weil unter 4 Kugeln 3 weiße sind, gleich $^3/_4$, also die Wahrscheinlichkeit, daß die genommene Kugel aus der ersten Urne und weiß sei, gleich $^1/_2 . {}^3/_4$. Auf dieselbe Weise erhält die Wahrscheinlichkeit, daß die aus der zweiten Urne gezogene Kugel weiß sei, da unter 6 Kugeln sich 2 weiße befinden, gleich $^1/_2 . {}^2/_6 = {}^1/_2 . {}^1/_3$; folglich ist nach

Digitized by Google

7. α) die Wahrscheinlichkeit, daß man durch einen zufälligen Griff aus einer der beiden Urnen eine weiße Kugel fassen werde, also

$$W = {}^1/_2 . {}^3/_4 + {}^1/_2 . {}^1/_3 = {}^1/_2({}^3/_4 + {}^1/_3) = {}^{13}/_{24}.$$

22. Setzt man die einfache Wahrscheinlichkeit, mit 2 Würfeln 9 zu werfen, gleich a und die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit, also eine andere Zahl zu werfen, gleich b, so daß also $a+b=1$, so werden nach 20 alle hier möglichen Fälle ausgedrückt durch $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
Von diesen Gliedern entspricht das letzte der Erwartung nicht, denn b^2 drückt die Wahrscheinlichkeit aus, zweimal hinter einander etwas anderes, also die Zahl 9 gar nicht zu werfen. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist daher, wenn wir sie mit x bezeichnen.

$$x = a^2 + 2ab.$$

Nun ist $a = {}^4/_{36} = {}^1/_9$, also $b = 1 - {}^1/_9$; folglich

$$x = ({}^1/_9)^2 + 2 . {}^1/_9(1 - {}^1/_9) = {}^{17}/_{81}.$$

Oder: Da $x = a^2 + 2ab$, so ist die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit

$$1 - x = b^2 \text{ oder}$$
$$1 - x = (1 - {}^1/_9)^2 = (1 - {}^1/_9)(1 - {}^1/_9),$$

mithin ist die fragliche Wahrscheinlichkeit.

$$x = 1 - (1 - {}^1/_9)(1 - {}^1/_9) = {}^{17}/_{81}.$$

23. Nach den Baumann-Süßmilch'schen Sterblichkeitstabellen erreichen von 1000 in demselben Jahre Gebornen 210 Personen ein Alter von 60 und 112 ein Alter von 70 Jahren; also ist die Wahrscheinlichkeit, daß nach 10 Jahren eine jetzt 60jährige Person A noch lebe, also $w = {}^{112}/_{210} = {}^8/_{15}$ d. h. von 15 sechszigjährigen Personen erreichen 8 das siebenzigste Lebensjahr. Ferner sind von 1000 Gebornen 300, die ein Alter von 50 und 210, die ein Alter von 60 Jahren erreichen, mithin ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine jetzt fünfzigjährige Person B noch 10 Jahre lebe, gleich $w' = {}^{210}/_{300} = {}^7/_{10}$. Daher sind die absoluten Wahrscheinlichkeiten für die beiden Personen A und B bezüglich

$$w = {}^8/_{15} \text{ und } w' = {}^7/_{10}.$$

Mithin ist nach 16 und 17 die Wahrscheinlichkeit
1) daß beide Personen A und B noch 10 Jahre zusammenleben, gleich

$$w . w' = {}^8/_{15} . {}^7/_{10} = {}^{28}/_{75} = 0{,}37.$$

2) Daß von diesen beiden Personen eine nach 10 Jahren schon todt ist, gleich

$$1 - w . w' = 1 - {}^8/_{15} . {}^7/_{10} = {}^{47}/_{75} = 0{,}63.$$

3) daß nach 10 Jahren A noch lebt und B schon todt ist, gleich

Digitized by Google

$w(1-w') = {}^{8}/_{15} \cdot (1-{}^{7}/_{10}) = {}^{4}/_{25} = 0{,}16$

4) daß nach 10 Jahren A schon todt ist und B noch lebt, gleich

$(1-w)w' = (1-{}^{8}/_{15}) \cdot {}^{7}/_{10} = {}^{49}/_{150} = {}^{1}/_{3}$ ca.

5) daß nach 10 Jahren beide schon todt sind, gleich

$(1-w)(1-w') = (1-{}^{8}/_{15})(1-{}^{7}/_{10}) = {}^{7}/_{50} = 0{,}14,$

6) daß nach 10 Jahren wenigstens eine Person oder beide noch leben, gleich

$1-(1-w)(1-w') = 1-(1-{}^{8}/_{15})(1-{}^{7}/_{10}) = {}^{43}/_{50} = 0{,}86.$

Binomischer und polynomischer Lehrsatz.

(Heis §. 92.)

§. 460. Um das Gesetz der Entwickelung der n^{ten} Potenz des Binoms $x+a$ leichter auffinden zu können, wollen wir das Bildungsgesetz des Produktes mehrerer Binome $x+a$, $x+b$, $x+c$, $x+d$ .... aufsuchen, welche ein gemeinschaftliches erstes Glied, aber lauter verschiedene zweite Glieder haben; und zwar aus dem Grunde, um die Reduktion der gleichartigen Glieder zu verhindern.

Das Produkt aus den beiden binomischen Faktoren $x+a$ und $x+b$ ist:

$$x^2 + \left\{\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right\} x + ab.$$

Multipliciren wir dieses Produkt mit $x+c$, so entsteht:

$$x^3 + \left\{\begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}\right\} x^2 + \left\{\begin{matrix} ab \\ ac \\ bc \end{matrix}\right\} x + abc.$$

Dieses Produkt, mit $x+d$ multiplicirt, gibt:

$$x^4 + \left\{\begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix}\right\} x^3 + \left\{\begin{matrix} ab \\ ac \\ ad \\ bc \\ bd \\ cd \end{matrix}\right\} x^2 + \left\{\begin{matrix} abc \\ abd \\ acd \\ bcd \end{matrix}\right\} x + abcd.$$

Hieraus folgt, daß der Exponent von x im ersten Gliede eines jeden Produktes der Anzahl der multiplicirten Binome gleich ist und dann in jedem folgenden Giede um eine Einheit abnimmt, bis er im letzten Gliede gleich 0 geworden ist.

Was nun die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von x betrifft, so ist der Coefficient des ersten Gliedes gleich 1. Der Coefficient des zweiten Gliedes besteht aus der Summe der zweiten Glieder der multiplicirten Binome oder aus der Summe der

Digitized by Google

Unionen; der des dritten Gliedes aus der Summe der Produkte aus je 2 der zweiten Glieder der Binome oder aus der Summe der Amben; der des vierten Gliedes aus der Summe der verschiedenen Produkte aus je 3 der zweiten Glieder oder aus der Summe der Ternen der zweiten Glieder a, b, c, d ... Das letzte Glied eines jeden Produktes ist dem Produkte aller zweiten Glieder der Binome gleich. Würde noch ein fünfter Faktor $x+e$ hinzutreten, so würden durch die Multiplikation mit x die Exponenten dieser Größe um eine Einheit erhöht und durch die Multiplikation mit e die Unionen, Amben, Ternen und Quaternen aus 4 Elementen zu den Unionen, Amben, Ternen, Quaternen und der Quinterne aus 5 Elementen vervollständigt werden.

Man erhält also, wenn man in der Multiplikation fortfährt und unter $\sum_{r} C(n)$ die Summe der Combinationsformen aus den n Elementen a, b, c, d, e ... zur r^{ten} Classe versteht:

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)\ldots. =$$
$$x^n + \sum_{1} C(n)x^{n-1} + \sum_{2} C(n)x^{n-2} + \sum_{3} C(n)x^{n-3} + \ldots. + \sum_{r} C(n)x^{n-r}$$
$$+ \ldots + \sum_{n-1} C(n)x^1 + \sum_{n} C(n)x^0.$$

Denken wir uns nun in dem entwickelten Produkte der n binomischen Faktoren $x+a$, $x+b$, $x+c$, $x+d$, ... die zweiten Glieder alle einander gleich, also $a=b=c=d=\ldots$, so geht der Ausdruck $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)\ldots$ über in $(x+a)^n$ und da in dem entwickelten Produkte

$$\begin{array}{l} a+b+c+d+\ldots \\ ab+ac+ad+\ldots \\ abc+abd+acd+\ldots \\ \quad\cdot\qquad\cdot\qquad\cdot \\ \quad\cdot\qquad\cdot\qquad\cdot \end{array}$$

die verschiedenen Coefficienten sind, so verwandelt sich

1) Der Coefficient von x^{n-1} oder $a+b+c+d+\ldots$ in $a+a+a+a+\ldots$ d. h. a so oft mal als Summand, als die Anzahl der zweiten Glieder a, b, c, d ... beträgt; diese Anzahl ist in $(x+a)^n$ gleich n; folglich ist der Coefficient des zweiten Gliedes $= n.a = \binom{n}{1}a$.

2) Der Coefficient von x^{n-2} oder $ab+ac+ad+\ldots$ geht über in $a^2+a^2+a^2+\ldots$ oder a^2 so oftmal, als sich aus n verschiedenen Elementen Combinationen zur zweiten Classe ohne Wiederholung bilden lassen; daher ist der fragliche Coefficient $\frac{n(n-1)}{1.2}a^2 = \binom{n}{2}a^2$.

Digitized by Google

3) Der Coefficient von x^{n-3} oder $abc + abd + \ldots$ wird jetzt $a^3 + a^3 + \ldots$, überhaupt a^3 so oft mal als Summand, als aus n verschiedenen Elementen Combinationen zur 3. Classe ohne Wiederholung gebildet werden können; er wird also sein:

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^3 = \binom{n}{3}a^3.$$

Allgemein: Wenn Kx^{n-r} das Glied bezeichnet, dem r Glieder vorhergehen, so reduzirt sich der Coefficient K, welcher in der Voraussetzung, daß die zweiten Glieder der Binome verschieden sind, der Summe der Produkte aus je r derselben gleich ist, auf das Produkt a^r und der Zahl, welche die Anzahl der möglichen Combinationen aus n Buchstaben zu je r ausdrückt, wenn die zweiten Glieder aller Binome einander gleich gesetzt werden. Daher ist nach §. 454, 8. α)

$$K = \binom{n}{r-1} \cdot \frac{n-(r-1)}{r} a^r = \binom{n}{r} a^r.$$

Hiernach ist also:

$$(x+a)^n = x^n + \binom{n}{1}ax^{n-1} + \binom{n}{2}a^2x^{n-2} + \binom{n}{3}a^3x^{n-3} + \ldots.$$

$$+ \binom{n}{r}a^r x^{n-r} + \ldots \binom{n}{n}a^n.$$

Zusatz. Aus der Betrachtung der verschiedenen Glieder des entwickelten Binoms ergibt sich leicht ein einfaches Gesetz, nach welchem ein Coefficient von beliebigem Range aus dem vorhergehenden Coefficienten gebildet werden kann. Denn betrachten wir das Glied $\binom{n}{r}a^r x^{n-r}$, so ist das vorhergehende Glied offenbar $\binom{n}{r-1}a^{r-1}x^{n-(r-1)}$, weil $\binom{n}{r-1}$ die Anzahl der Combinationen zu je $(r-1)$ ausdrückt. Nun ist ersichtlich, daß der Coefficient

$$\binom{n}{r-1} \cdot \frac{n-(r-1)}{r}$$

aus dem vorhergehenden Coefficienten $\binom{n}{r-1}$ gebildet wird, wenn man diesen letztern mit den Exponenten $n-(r-1)$ von x multiplicirt und das Produkt durch die Zahl r der dem betrachteten Gliede vorhergehenden Glieder dividirt. In diesem Gesetze, welches man Newton verdankt, besteht vorzugsweise der binomische Lehrsatz und es kann zur Entwickelung einer besondern Potenz eines Binoms dienen, ohne daß man sich der allgemeinen Formel zu bedienen braucht.

Digitized by Google

§. 461. Unabhängig von der im vorigen §. gezeigten Entwickelung eines Binoms zur n^{ten} Potenz kann dieser wichtige Satz auch noch auf folgende Weise bewiesen werden. In §. 256 sind die verschiedenen Potenzen des Binoms $a+b$ nach den gewöhnlichen abgebraischen Gesetzen gebildet worden. Indessen können dieselben Resultate aber auch noch auf einem andern Wege, als dem dort eingeschlagenen, erzielt werden, und zwar durch die Variationen der Elemente a b zur ersten, zweiten, dritten, vierten, überhaupt zur n^{ten} Classe mit Wiederholungen. Um nun die zweite Potenz von $a+b$ zu erhalten, bilde man aus den beiden Elementen a und b die Variationsformen zur 2. Classe mit Wiederholung, deren Anzahl nach §. 456. 20) gleich $2^2=4$ ist; so entstehen nach §. 456. 18. α) folgende Complexionen:

aa, ab, ba, bb.

Bei diesen Formen kommen alle Permutationen der gegebenen Elemente vor. Nun kann die aus beiden gleichen Elementen bestehende Complexion aa nach §. 452 nur 2!:2! mal permutirt werden, weshalb sie auch nur 2!:2! mal vorkommt; folglich ist der Coefficient von aa gleich 2!:2! Nach §. 449 finden für die aus 2 verschiedenen Elementen bestehenden Complexionen 2!:1! Permutationen statt, mithin müssen solcher Formen 2!:1! vorhanden sein. Diese beiden Formen sind in der That ab und ba und weil nach §. 57 ab = ba ist, so erhält die Complexion ab den Coefficient 2!:1! Von der Complexion bb gilt, was von aa gesagt ist, folglich ist ihr Coefficient ebenfalls 2!:2! Betrachten wir jetzt diese Complexionen als Produkte, die durch + mit einander verbunden und mit ihrer Permutationszahl als Coefficienten versehen werden, so erhalten wir:

$$(a+b)^2=\frac{2!}{2!}aa+\frac{2!}{1!}ab+\frac{2!}{2!}bb.$$

Weil nun ferner nach §. 454. 8)

$$\frac{2!}{2!}=\binom{2}{0}=1;\ \frac{2!}{1!}=\binom{2}{1}=2 \text{ und } \frac{2!}{2!}=\binom{2}{2}=1, \text{ so ist auch}$$

$$(a+b)^2=\binom{2}{0}aa+\binom{2}{1}ab+\binom{2}{2}bb \text{ oder}$$
$$=a^2+2ab+b^2.$$

Bilden wir jetzt aus den Variationsformen zur 2. Klasse die zur 3., so entstehen folgende Complexionen, deren Anzahl gleich $2^3=8$ ist:

aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb.

Die auf diese Weise entstandenen Ternen können nur von der Form aaa, aab, abb, bbb sein. Der Complexionen aus den

Digitized by Google

3 gleichen Elementen a oder b kann es nur $\frac{3!}{3!}=1$ geben, weil 3 gleiche Elemente nur 1 Permutation gestatten. Hingegen geben 3 Elemente, wovon 2 gleiche sind, $\frac{3!}{2!}=3$ Permutationen. Mithin müssen 3 Complexionen von der Form aab und ebensoviele von der Form abb vorhanden sein, was auch wirklich der Fall ist; denn aab=aba=baa und ebenso ist abb=bab=bba. Betrachten wir daher obige Complexionen zur 3. Classe als ebensoviele Produkte, die zusammen addirt und mit ihren Permutationszahlen versehen werden, so erhalten wir:

$$(a+b)^3=\frac{3!}{3!}aaa+\frac{3!}{2!}aab+\frac{3!}{2!}abb+\frac{3!}{3!}bbb.$$

Weil nun $\frac{3!}{3!}=\binom{3}{0}=1$; $\frac{3!}{2!}=\binom{3}{1}=3$; $\frac{3!}{2!}=\binom{3}{2}=3$, und

$$\frac{3!}{3!}=\binom{3}{3}=1,$$ so ist auch:

$$(a+b)^3=\binom{3}{0}aaa+\binom{3}{1}aab+\binom{3}{2}abb+\binom{3}{3}bbb \text{ oder}$$
$$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

Werden nun aus den Variationsformen der beiden Elemente a und b zur 3. Classe die zur 4. gebildet, so entstehen die Complexionen, deren Anzahl gleich $2^4=16$ ist: nämlich:
aaaa aaab aaba abaa aabb aabb abab abba abbb baaa baab baba bbaa babb bbab bbba bbbb
Diese 16 Complexionen reduziren sich, wenn sie gut geordnet werden, auf folgende 5 von einander verschiedene Formen, nämlich:

aaaa aaab aabb abbb bbbb oder
a^4 a^3b a^2b^2 ab^3 b^4

Suchen wir jetzt für jede derselben die Permutationszahl zu bestimmen:

Für a^4 ist sie $\frac{4!}{4!}=\binom{4}{0}=1.$

„ a^3b „ „ $\frac{4!}{3!\,1!}=\binom{4}{1}=4.$

„ a^2b^2 „ „ $\frac{4!}{2!\,2!}=\binom{4}{2}=6.$

„ ab^3 „ „ $\frac{4!}{1!\,3!}=\binom{4}{3}=4.$

Digitized by Google

Für b^4 ist sie $\frac{4!}{4!} = \binom{4}{4} = 1$. Daher ist:

$$(a+b)^4 = \binom{4}{0}a^4 + \binom{4}{1}a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}ab^3 + \binom{4}{4}b^4 \text{ oder}$$
$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Auf dieselbe Weise erhalten wir, da die Variationen zur 5. Classe gut geordnet von der Form

aaaaa aaaab aaabb aabbb abbbb bbbbb oder
a^5 a^4b a^3b^2 a^2b^3 ab^4 b^5

sind und deren Anzahl gleich $2^5 = 32$ ist:

$$(a+b)^5 = \binom{5}{0}a^5 + \binom{5}{1}a^4b + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}ab^4 + \binom{5}{5}b^5$$
$$\text{oder} \quad = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

In jeder der hier entwickelten Potenzen nimmt der Exponent von a in allen aufeinander folgenden Gliedern um eine Einheit ab, von dem Exponent der Potenz an bis zur Null, und der Exponent von b wächst in jedem der aufeinander folgenden Glieder um eine Einheit von Null bis zum Exponenten der Potenz selber, so daß die Summe der Exponenten von a und b in jedem Gliede dem Exponenten der Potenz gleich ist. Daraus folgt, daß die Potenzen nach demselben Gesetze fortschreiten, weshalb für die folgenden Potenzen kein anderes Gesetz stattfinden kann.

§. 462. Um nun das Binom $a+b$ auf die n^{te} Potenz zu erheben, bilde man die n^{te} Classe der Variationen mit Wiederholung aus den Elementen a b und betrachte die erhaltenen Complexionen als Produkte. Nach dem Vorhergehenden müssen dieselben folgende Form haben:

$$a^n,\ a^{n-1}b,\ a^{n-2}b^2,\ a^{n-3}b^3,\ a^{n-4}b^4,\ \ldots\ a^4b^{n-4},$$
$$a^3b^{n-3},\ a^2b^{n-2},\ ab^{n-1},\ b^n.$$

Jedes dieser Glieder oder Produkte muß mit einem Coefficienten versehen werden, welcher der Anzahl der Permutationen der in ihnen enthaltenen Elemente gleich ist. Dieselben werden nach den §§. 452, 453, 454 in Verbindung mit §. 455. 7. a) bestimmt. Nun ist die Permutationszahl

$$\text{für } a^n = \frac{n!}{n!} = \binom{n}{0} = 1$$
$$\text{„ } a^{n-1}b = \frac{n!}{(n-1)!\ 1!} = \binom{n}{1}$$
$$\text{„ } a^{n-2}b^2 = \frac{n!}{(n-2)!\ 2!} = \binom{n}{2}$$

Digitized by Google

für $a^{n-3}b^3 = \frac{n!}{(n-3)!\ 3!} = \binom{n}{3}$

„ $a^{n-4}b^4 = \frac{n!}{(n-4)!\ 4!} = \binom{n}{4}$

„ . . .

„ . . .

„ . . .

„ $a^4b^{n-4} = \frac{n!}{4!\ (n-4)!} = \binom{n}{n-4}$

„ $a^3b^{n-3} = \frac{n!}{3!\ (n-3)!} = \binom{n}{n-3}$

„ $a^2b^{n-2} = \frac{n!}{2!\ (n-2)!} = \binom{n}{n-2}$

„ $ab^{n-1} = \frac{n!}{1!\ (n-1)!} = \binom{n}{n-1}$

„ $b^n = \frac{n!}{n!} = \binom{n}{n}$

Daher ist:

$$(a \pm b)^n = a^n \pm \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 \pm \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 +$$

$$\binom{n}{4}a^{n-4}b^4 \pm \ldots \pm \binom{n}{n-4}a^4b^{n-4} \mp \binom{n}{n-3}a^3b^{n-3} \pm$$

$$\binom{n}{n-2}a^2b^{n-2} \mp \binom{n}{n-1}ab^{n-1} \pm \binom{n}{n}b^n.$$

Für die letzteren Glieder gelten die obern Zeichen, wenn n eine grade Zahl, also von der Form 2m und die unteren, wenn n eine ungerade Zahl, also von der Form $2m \pm 1$ ist.

§. 463. Weil der Coefficient für

$a^n = \binom{n}{0}$

$a^{n-1}b^1 = \binom{n}{1}$

$a^{n-2}b^2 = \binom{n}{2}$

$a^{n-3}b^3 = \binom{n}{3}$, so muß er

für $a^{n-r}b^r = \binom{n}{r}$ sein.

Digitized by Google

Mithin heißt das allgemeine Glied der n^{ten} Potenz von $(a \pm b)$:

$$\binom{n}{r} a^{n-r} b^r (\pm 1)^r.$$

Hieraus lassen sich die einzelnen Glieder der Formel leicht herleiten, wenn für r nacheinander die Werthe 0, 1, 2, 3, 4 ... bis n gesetzt werden, weshalb auch, wenn die Summe sämmtlicher Produkte durch das Zeichen Σ bezeichnet wird, die Binomialformel auf folgende Weise dargestellt werden kann:

$$(a \pm b)^n = \sum_{r=0}^{r=n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r (\pm 1)^r.$$

§. 464. Weil

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(r-2))(n-(r-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (r-1) \cdot r}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(r-2))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (r-1)} \times \frac{n-(r-1)}{r}$$

$$= \binom{n}{r-1} \times \frac{n-(r-1)}{r} \text{ ist,}$$

so kann jeder Binomialcoefficient als ein Produkt betrachtet werden, dessen erster Faktor der zunächst vorhergehende ist. Setzt man ferner

$$a^{n-1} b = \frac{a^n}{a} \cdot b = a^n \cdot \frac{b}{a}$$

$$a^{n-2} b^2 = \frac{a^n}{a^2} \cdot b^2 = a^n \cdot \frac{b^2}{a^2}$$

$$a^{n-3} b^3 = \frac{a^n}{a^3} \cdot b^3 = a^n \cdot \frac{b^3}{a^3} \text{ u. s. w.}$$

und bezeichnet endlich a^n mit A_1 so wird:

das zweite Glied $\binom{n}{1} a^{n-2} b^2 = \binom{n}{1} \cdot \frac{b}{a} \cdot a^n = \binom{n}{1} \cdot \frac{b}{a} A_1 = A_2$

„ dritte „ $\binom{n}{2} a^{n-2} b^2 = \frac{n-1}{2} \cdot \frac{b}{a} A_2 = A_3$

„ vierte „ $\binom{n}{3} a^{n-3} b^3 = \frac{n-2}{3} \frac{b}{a} A_3 = A_4$

„ allgemeine „ $\binom{n}{r} a^{n-r} b^r = \frac{n-(r-1)}{r} \frac{b}{a} A_{r-1}.$

Daher läßt sich die Binomialformel auch noch auf folgende Weise darstellen:

$$(a \pm b)^n = a^n \pm \frac{n}{1} \cdot \frac{b}{a} A_1 + \frac{n-1}{2} \cdot \frac{b}{a} A_2 \pm \frac{n-2}{3} \cdot \frac{b}{a} A^3 + \frac{n-3}{4} \cdot \frac{b}{a} A_4$$

$$\pm \frac{n-4}{5} \cdot \frac{b}{a} A_5 + \ldots\ldots$$

Digitized by Google

§. 465. Die erste Potenz eines Binoms gibt 2 Glieder; die zweite 3, die dritte 4, die vierte 5, die fünfte 6, also im Allgemeinen die n^{te} Potenz eines Binoms $n+1$ Glieder. Demnach ist die Anzahl der Glieder der Potenz eines Binoms immer um 1 größer als der Potenzexponent. Ist nun der Exponent n eine gerade Zahl, so ist die Anzahl der Glieder $n+1$ ungerade; in diesem Falle gibt es nur ein Mittelglied und alle Coefficienten kommen zweimal vor, außer dem des Mittelgliedes. Ist aber n eine ungerade Zahl, so ist die Anzahl der Glieder $n+1$ gerade, weshalb es alsdann zwei Mittelglieder mit demselben Coefficienten gibt; in diesem Falle kommt jeder Coefficient doppelt vor. So sind in:

$(a+b)^3$ die Coefficienten 1, 3, 3, 1.
$(a+b)^4$ „ „ 1, 4, 6, 4, 1.
$(a+b)^5$ „ „ 1, 5, 10, 10, 5, 1.
$(a+b)^6$ „ „ 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1.

Was nun die Exponenten des Mittelgliedes von a und b betrifft, für den Fall, daß es nur ein solches gibt, so ist derselbe für beide Größen gleich, nämlich $\frac{1}{2}n$. Bei Potenzen mit 2 Mittelgliedern kommen a und b mit abwechselndem Exponenten vor; diese sind im ersten Mittelgliede für a und b bezüglich gleich $\frac{1}{2}(n+1)$ und $\frac{1}{2}(n-1)$ und im zweiten umgekehrt. So heißen ohne Coefficienten

z. B. in $(a\pm b)^6$ das Mittelglied $\pm a^3b^3$
„ $(a\pm b)^8$ „ „ $\pm a^4b^4$
„ $(a\pm b)^7$ die Mittelglieder $\pm a^4b^3+a^3b^4$
„ $(a\pm b)^9$ „ „ $+a^5b^4\pm a^4b^5$.

Hieraus ergibt sich folgendes für die Mittelglieder von $(a\pm b)^n$. Hat n als gerade Zahl die Form $4m$ oder $4m+2$, so ist in jenem Falle $\frac{1}{2}n$ eine gerade, in diesem eine ungerade Zahl. Daher ist das Mittelglied in $(a-b)^n$ im ersten Falle positiv, im zweiten negativ. Als ungerade Zahl kann n von der Form $4m+1$ oder $4m+3$ sein. In jenem Falle ist $\frac{1}{2}(n+1)$ eine ungerade und $\frac{1}{2}(n-1)$ eine gerade Zahl, mithin ist in $(a-b)^n$ das erste Mittelglied positiv, und das zweite negativ. Im zweiten Falle ist umgekehrt $\frac{1}{2}(n+1)$ eine gerade und $\frac{1}{2}(n-1)$ eine ungerade Zahl; folglich wird alsdann das erste Mittelglied negativ und das zweite positiv. Daher heißt bei geradem n in $(a-b)^n$

$$\text{das Mittelglied } \pm\binom{n}{\frac{1}{2}n}a^{\frac{1}{2}n}b^{\frac{1}{2}n}$$

und bei ungeradem n sind in $(a-b)^n$ die Mittelglieder

$$\pm\binom{n}{\frac{1}{2}(n-1)}a^{\frac{1}{2}(n+1)}b^{\frac{1}{2}(n-1)}\mp\binom{n}{\frac{1}{2}(n+1)}a^{\frac{1}{2}(n-1)}b^{\frac{1}{2}(n+1)}$$

Digitized by Google

§. 466. Der binomische Lehrsatz ist auch dann richtig, wenn der Exponent ein Bruch ist. Zur Vereinfachung der Rechnung bringe man $(a+b)^{\frac{n}{m}}$ auf die Form $a^{\frac{n}{m}}\left(1+\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{m}}$. Setzt man nun $\frac{b}{a}=y$ und entwickelt $(1+y)^{\frac{n}{m}}$, so braucht man diese Entwickelung nur mit $a^{\frac{n}{m}}$ zu multipliciren, dann für y seinen Werth $\frac{b}{a}$ einzusetzen und man erhält die Reihe für $(a+b)^{\frac{n}{m}}$. Nun sei:

$$(1)\ (1+y)^{\frac{n}{m}}=1+Ay+By^2+Cy^3+Dy^4+\ldots$$

Auf diese Form der Entwickelung wird man durch die Bildung der ersten ganzen positiven Potenzen geführt, indem man zugleich bemerkt, daß sich der erste Theil der Gleichung für $y=0$ auf 1 reducirt, woraus folgt, daß das von y unabhängige Glied im zweiten Theile $=1$ sein muß. Um nun den Werth der noch zu bestimmenden Größen A, B, C, D ... zu ermitteln, setzen wir in der Gl. (1) z für y, dann ist:

$$(2)\ (1+z)^{\frac{n}{m}}=1+Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+\ldots.$$

wo A, B, C, D ... offenbar dieselben Werthe haben, wie in (1), weil sie von jedem, y beigelegten Werthe unabhängig sind. Subtrahirt man (2) von (1), so wird:

$$(3)\ (1+y)^{\frac{n}{m}}-(1+z)^{\frac{n}{m}}=A(y-z)+B(y^2-z^2)+C(y^3-z^3)+D(y^4-z^4)+\ldots$$

Setzt man vorläufig

$$(1+y)^{\frac{1}{m}}=u \text{ und } (1+z)^{\frac{1}{m}}=v, \text{ so wird}$$
$$1+y=u^m \text{ und } (1+z)=v^m;$$
$$(1+y)^{\frac{n}{m}}=u^n \text{ und } (1+z)^{\frac{n}{m}}=v^n, \text{ ferner}$$
$$y-z=u^m-v^m.$$

Daher verwandelt die Gl. (3) sich in folgende:

$$(4)\ u^n-v^n=A(y-z)+B(y^2-z^2)+C(y^3-z^3)+D(y^4-z^4)+\ldots$$

oder wenn man den ersten Theil dieser Gl. durch u^m-v^m und den zweiten durch $y-z=u^m-v^m$ dividirt:

$$(5)\ \frac{u^n-v^n}{u^m-v^m}=\frac{A(y-z)+B(y^2-z^2)+C(y^3-z^3)+D(y^4-z^4)+\ldots}{y-z}$$

Digitized by Google

oder, wenn man die linke Seite im Zähler und Nenner durch u—v dividirt und im rechten Theile die Division wirklich vornimmt:

$$(6)\quad \frac{u^{n-1}+vu^{n-2}+v^2u^{n-3}+\ldots v^{n-1}}{u^{m-1}+vu^{m-2}+v^2u^{m-3}+\ldots v^{m-1}} = A+B(y+z)+ C(y^2+yz+z^2)+D(y^3+y^2z+yz^2+z^3)+..$$

Setzt man in (6) $y=z$, so ist, weil $(1+y)^{\frac{1}{m}} = u$ und $(1+z)^{\frac{1}{m}} = v$, auch $u = v$; daher verwandelt sich der erste Theil der Gl. (6) in:

$$\frac{n\,.\,u^{n-1}}{m\,.\,u^{m-1}} \text{ oder in } \frac{n}{m}\cdot\frac{u^n}{u^m}.$$

Nun setze man für u^n seinen Werth $(1+y)^{\frac{n}{m}}$ oder $1+Ay+By^2+Cy^3+\ldots$ und für u^m seinen Werth $1+y$, so verwandelt sich der erste Theil der Gl. (6) in:

$$\frac{n}{m}\cdot\frac{1+Ay+By^2+Cy^3+Dy^4}{1+y}$$

und der zweite Theil reducirt sich durch Gleichstellung von $y=z$ auf:

$$A+2By+3Cy^2+4Dy^3+5Ey^4.$$

Daher erhalten wir, wenn wir die für beide Theile der Gl. (6) gefundenen Werthe einsetzen, folgende Gl.:

$$\frac{n}{m}\cdot\frac{1+Ay+By^2+Cy^3+Dy^4}{1+y} = A+2By+3Cy^2+4Dy^3+5Ey^4+..$$

Multipliciren wir beide Seiten dieser Gl. mit $1+y$, so wird:

$$\frac{n}{m}(1+Ay+By^2+Cy^3+Dy^4+..)$$

$$= A+(2B+A)y+(3C+2B)y^2+(4D+3C)y^3+(5E+4D)y^4+..$$

Soll nun eine Gleichung von vorstehender Form für jeden Werth von y erfüllt werden, so müssen die Coefficienten von gleich hohen Potenzen von y in beiden Theilen der Gleichung bezüglich einander gleich sein. Denn versetzt man alle Glieder der linken Seite in die rechte Seite der Gl., so erhält man:

$$0=\left\{\begin{matrix}A\\ -\frac{n}{m}\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}2B+A\\ -\frac{n}{m}A\end{matrix}\right\}y+\left\{\begin{matrix}3C+2B\\ -\frac{n}{m}B\end{matrix}\right\}y^2+\left\{\begin{matrix}4D+3C\\ -\frac{n}{m}C\end{matrix}\right\}y^3 +\left\{\begin{matrix}5E+4D\\ -\frac{n}{m}D\end{matrix}\right\}y^4+\ldots\ldots$$

Hieraus ergeben sich folgende Bestimmungsgleichungen:

Digitized by Google

$$A-\frac{n}{m}=0;$$

$$2B+A-\frac{n}{m}A=0;$$

$$3C+2B-\frac{n}{m}B=0;$$

$$4D+3C-\frac{n}{m}C=0;$$

$$5E+4D-\frac{n}{m}D=0.$$

Mithin ist:

$$A=\frac{n}{m}=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)$$

$$2B+A=\frac{n}{m}A;\ \text{also}\ B=\frac{A\left(\frac{n}{m}-1\right)}{2}=\frac{\frac{n}{m}\left(\frac{n}{m}-1\right)}{1.2}\left(\frac{\frac{n}{m}}{2}\right)$$

$$3C+2B=\frac{n}{m}B;\ \text{also}\ C=\frac{B\left(\frac{n}{m}-2\right)}{3}=\left(\frac{\frac{n}{m}}{2}\right).\frac{\frac{n}{m}-2}{3}=\left(\frac{\frac{n}{m}}{3}\right)$$

$$4D+3C=\frac{n}{m}C;\ \text{also}\ D=\frac{C\left(\frac{n}{m}-3\right)}{4}=\left(\frac{\frac{n}{m}}{3}\right).\frac{\frac{n}{m}-3}{4}=\left(\frac{\frac{n}{m}}{4}\right)$$

$$5E+4D=\frac{n}{m}D;\ \text{also}\ E=\frac{D\left(\frac{n}{m}-4\right)}{5}=\left(\frac{\frac{n}{m}}{4}\right).\frac{\frac{n}{m}-4}{5}=\left(\frac{\frac{n}{m}}{5}\right)$$

u. s. w. Hieraus geht das Bildungsgesetz der auf einander folgenden Coefficienten zur Genüge hervor.

Setzen wir nun in Gl. (1) die für die Coefficienten A, B, C, D, E... gefundenen Werthe ein, so wird:

$$(1+y)^{\frac{n}{m}}=1+\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)y+\left(\frac{\frac{n}{m}}{2}\right)y^2+\left(\frac{\frac{n}{m}}{3}\right)y^3+\left(\frac{\frac{n}{m}}{4}\right)y^4+\left(\frac{\frac{n}{m}}{5}\right)y^5+\ldots.$$

Mithin ist:

$$(a\pm b)^{\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{(a\pm b)^n}=a^{\frac{n}{m}}\pm\left(\frac{\frac{n}{m}}{1}\right)a^{\frac{n}{m}-1}b+\left(\frac{\frac{n}{m}}{2}\right)a^{\frac{n}{m}-2}b^2\pm$$

$$\left(\frac{\frac{n}{m}}{3}\right)a^{\frac{n}{m}-3}b^3+\left(\frac{\frac{n}{m}}{4}\right)a^{\frac{n}{m}-4}b^4\pm\ldots.$$

Digitized by Google

§. 467. Der für ganze positive Exponenten bewiesene Lehrsatz gilt auch für ganze negative Exponenten. Es sei $(a\pm b)^{-n}$ zu entwickeln. Man setze wieder $(a+b)^{-n} = a^{-n}(1+y)^{-n}$. Nun sei:

$$(1)\ (1+y)^{-n} = 1+Ay+By^2+Cy^3+Dy^4+\ldots$$

Um die Coefficienten A, B, C, D... zu bestimmen, setze man in (1) z für y, so ist:

$$(2)\ (1+z)^{-n} = 1+Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+\ldots$$

Die Differenz zwischen (1) und (2) gibt:

$$(3)\ (1+y)^{-n}-(1+z)^{-n} = A(y-z)+B(y^2-z^2)+C(y^3-z^3)+D(y^4-z^4)+\ldots$$

Setze $1+y=u$ und $(1+z)=v$, so ist $y-z=u-v$, alsdann ist:

$$(4)\ u^{-n}-v^{-n} = A(y-z)+B(y^2-z^2)+C(y^3-z^3)\ldots$$

Nun ist $u^{-n}-v^{-n} = \frac{1}{u^n}-\frac{1}{v^n} = -\frac{u^n-v^n}{u^nv^n}$ nach §. 262; daher ist auch:

$$(5)\ -\frac{u^n-v^n}{u^nv^n} = A(y-z)+B(y^2-z^2)+C(y^3-z^3)+\ldots$$

Dividire Gl. (5) durch $u-v=y-z$, so wird:

$$(6)\ -\frac{1}{u^nv^n}\cdot(u^{n-1}+vu^{n-2}+..v^{n-1}) = A+B(y+z)+C(y^2+yz+z^2)+\ldots$$

Jetzt setze $y=z$ und $u=v$, so wird:

$$(7)\ -n.\frac{u^{-n}}{u} = A+2By+3Cy^2+4Dy^3+5Ey^4+\ldots$$

Setze in (7) den Werth für u^{-n} aus (1) und für $u=1+y$, so ist:

$$-n.\frac{1+Ay+By^2+Cy^3+Dy^4..}{1+y} = A+2By+3Cy^2+4Dy^3+\ldots$$

oder $-n(1+Ay+By^2+Cy^3+Dy^4..) = A+(2B+A)y+(3C+2B)y^2+(4D+3C)y^3+(5E+4D)y^4+\ldots$

Vergleicht man beide Theile dieser Gleichung mit einander, so erhalten wir zur Bestimmung der Coefficienten A, B, C, D... folgende Gl.:

$$-n = A;\ \text{also}\ A = -n\ldots\ldots\binom{-n}{1}$$

$$2B+A = -nA;\ \text{also}\ B = \frac{A(-n-1)}{2} = \binom{-n}{2}$$

$$3C+2B = -nB;\ \text{also}\ C = \frac{B(-n-2)}{3} = \binom{-n}{3}$$

Digitized by Google

$$4D+3C=-nC;\ \text{also}\ D=\frac{C(-n-3)}{4}=\binom{-n}{4}$$

$$5E+4D=-nD;\ \text{also}\ E=\frac{D(-n-4)}{5}=\binom{-n}{5}$$

u. s. w. Daher ist: $a^{-n}(1+y)^{-n}=$

$$a^{-n}\left\{1+\binom{-n}{1}y+\binom{-n}{2}y^2+\binom{-n}{3}y^3+\binom{-n}{4}y^4+\binom{-n}{5}y^5+....\right\}$$

Mithin ist: $(a\pm b)^{-n}=$

$$a^{-n}\pm\binom{-n}{1}a^{-n-1}b+\binom{-n}{2}a^{-n-2}b^2\pm\binom{-n}{3}a^{-n-3}b^{-3}+$$

$$\binom{-n}{4}a^{-n-4}b^4\pm.....$$

Der Beweis für gebrochene negative Exponenten wird ganz auf dieselbe Weise geführt, wie für einen ganzen negativen Exponenten. Somit gilt der für ganze positive Exponenten bewiesene binomische Lehrsatz ebenso für ganze negative, für gebrochene positive und gebrochene negative Exponenten und daher allgemein.

Der polynomische Lehrsatz.

§. 468. Unter dem polynomischen Lehrsatz versteht man die Entwickelung eines Polynoms oder einer Polynomialgröße für einen gegebenen Exponenten. Man kann den polynomischen Lehrsatz auf den binomischen zurückführen. Setzt man nämlich in dem Polynom $a+b+c+d+e$ das erste Glied $a=a$ und die Summe der übrigen, nämlich $b+c+d+e=x$, so ist:

$$(a+b+c+d+e)^n=(a+x)^n=$$

$$a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}x+\binom{n}{2}a^{n-2}x^2+\binom{n}{3}a^{n-3}x^3+\binom{n}{4}a^{n-4}x^4+\ldots+x^n.$$

Setzt man hierin die Werthe für x, x^2, x^3, ... x^n, so erhält man die n^{te} Potenz des gegebenen Polynoms. Für $n=5$ ist:

$x=b+c+d+e.$

$$x^2=(b+c+d+e)^2=(b+(c+d+e))^2=b^2+2b(c+d+e)+(c+d+e)^2.$$

$$x^3=(b+(c+d+e))^3=b^3+\binom{3}{1}b^2(c+d+e)+\binom{3}{2}b(c+d+e)^2+\binom{3}{3}(c+d+e)^3.$$

Digitized by Google

$$x^4 = (b+(c+d+e))^4 = b^4 + \binom{4}{1} b^3(c+d+e) + \binom{4}{2} b^2(c+d+e)^2 + \binom{4}{3} b(c+d+e)^3 + \binom{4}{4} (c+d+e)^4.$$

$$x^5 = (b+(c+d+e))^5 = b^5 + \binom{5}{1} b^4(c+d+e) + \binom{5}{2} b^3(c+d+e)^2 + \binom{5}{3} b^2(c+d+e)^3 + \binom{5}{4} b(c+d+e)^4 + \binom{5}{5} (c+d+e)^5.$$

Es bleibt uns nun noch übrig, die 2., 3., 4. und 5. Potenz des Polynoms c+d+e zu entwickeln. Nun ist:

$$(c+d+e)^2 = (c+(d+e))^2 = c^2 + \binom{2}{1} c(d+e) + \binom{2}{2} (d+e)^2$$

$$(c+(d+e))^3 = c^3 + \binom{3}{1} c^2(d+e) + \binom{3}{2} c(d+e)^2 + \binom{3}{3} (d+e)^3.$$

$$(c+(d+e))^4 = c^4 + \binom{4}{1} c^3(d+e) + \binom{4}{2} c^2(d+e)^2 + \binom{4}{3} c(d+e)^3 + \binom{4}{4} (d+e)^4.$$

$$(c+(d+e))^5 = c^5 + \binom{5}{1} c^4(d+e) + \binom{5}{2} c^3(d+e)^2 + \binom{5}{3} c^2(d+e)^3 + \binom{5}{4} c(d+e)^4 + \binom{5}{5} (d+e)^5.$$

Entwickelt man jetzt das Binom d+e zur 2., 3., 4. und 5. Potenz und setzt alsdann die verschiedenen Werthe für die verschiedenen Potenzen von x in obige Reihe, so wird:

$$(a+b+c+d+e)^5 =$$

a^5	$+5a^4b$	$+10a^3b^2$	$+10a^2b^3$	$+5ab^4$	$+b^5$		
	$+5a^4c$	$+20a^3bc$	$+30a^2b^2c$	$+30ab^3c$	$+5b^4c$	$+10b^3c^2$	
	$+5a^4d$	$+20a^3bd$	$+30a^2b^2d$	$+30ab^3d$	$+5b^4d$	$+10b^3c^2$	
	$+5a^4e$	$+20a^3be$	$+30a^2b^2e$	$+30ab^3e$	$+5b^4e$	$+10b^3c^2$	
		$+10a^3c^2$	$+30a^2bc^2$	$+60a^2bcd$	$+30ab^2c^2$	$+10b^3c^2$	
		$+20a^3cd$	$+60a^2bcd$	$+30a^2ce^2$	$+60ab^2cd$	$+30b^3cd$	
		$+20a^3ce$	$+60a^2bce$	$+10a^2d^3$	$+60ab^2ce$	$+30b^3ce$	
		$+10a^3d^2$	$+30a^2bd^2$	$+30a^2d^2e$	$+30ab^2d^2$	$+10b^3d^2$	
		$+20a^3de$	$+60a^2bde$	$+30a^2de^2$	$+60ab^2de$	$+30b^3de$	
		$+10a^3e^2$	$+30a^2be^2$	$+10a^2e^3$	$+30ab^2e^2$	$+10b^3e^2$	

$+20abc^3$	$+5ac^4$	$+5ad^4$	$+c^5$	$+5c^4d$	$+5cd^4$	$+d^5$	$+5d^4e$	$+e^5$
$+60abc^2d$	$+20ac^3d$	$+20ad^3e$		$+5c^4e$	$+20cd^3e$		$+10d^3e^2$	
$+60abc^2e$	$+20ac^3e$	$+30ad^2e^2$		$+10c^3d^2$	$+30cd^2e^2$		$+10d^2e^3$	
$+60abcd^2$	$+30ac^2d^2$	$+20ade^3$		$+20c^3de$	$+20cde^3$		$+5de^4$	
$+120abcde$	$+60ac^2de$	$+5ae^4$		$+10c^3e^2$	$+5ce^4$			
$+60abce^2$	$+30ac^2e^2$			$+10c^2d^3$				
$+20abd^3$	$+20acd^3$			$+30c^2d^2e$				
$+60abd^2e$	$+60acd^2e$			$+30c^2de^2$				
$+60abde^2$	$+60acde^2$			$+10c^2e^3$				
$+20abe^3$	$+20ace^3$							

Digitized by Google

Hieraus läßt sich nun leicht $(a-b-c-d-e)^5$ ableiten dadurch, daß man allen Produkten, welche die negativen Faktoren b, c, d, e enthalten, das Zeichen + vorsetzt, wenn die Summe der Exponenten dieser Faktoren eine gerade Zahl ist; dagegen erhalten jene Produkte das Zeichen —, wenn diese Summe ungerade ist. Demgemäß müssen beispielsweise die Produkte $5a^4b$, $10a^2b^3$, $30a^2bd^2$ u. s. w. negativ werden, dagegen $10a^3b^2$, $60ab^2cd$ u. s. w. positiv.

§. 469. Aber dieser Satz läßt sich auch unabhängig von dem binomischen Satze nachweisen. Denn man erhält die zweite Potenz von $(a+b+c+d+e)$, wenn man jedes Glied dieser Reihe mit allen Gliedern derselben Reihe nach und nach multiplicirt, also wenn man alle Variationen zur zweiten Classe aus den Elementen a, b, c, d, e bildet. Man erhält alsdann $5^2 = 25$ Complexionen; es sind folgende:

aa ab ac ad ae
ba bb bc bd be
ca cb cc cd ce
da db dc dd de
ea eb ec ed ee.

Werden die Complexionen abermals mit allen Elementen der gegebenen Reihe verbunden, so erhält man die dritte Potenz, welche sonach die sämmtlichen Variationen zur dritten Classe enthält u. s. w. Folglich enthält die n^{te} Potenz alle Variationsformen zur n^{ten} Classe, welche aus den Elementen a, b, c, d, e gebildet werden können. Nun werden aber bei der Multiplication Produkte, die aus denselben Faktoren bestehen, aber verschieden geordnet vorkommen, nicht als verschieden betrachtet. Die sämmtlichen verschiedenen Theile von $(a+b+c+d+e)^n$ werden also erhalten, wenn die Elemente a, b, c, d, e, zur n^{ten} Classe mit Wiederholung combinirt werden. Weil aber das Produkt aus den sämmtlichen Variationen besteht, so muß jeder der durch die Combination erhaltenen Complexionen ein Coefficient vorgesetzt werden, welcher angibt, wie viele Permutationen diese Complexion gestattet.

Soll hiernach $(a+b+c+d+e)^5$ berechnet werden, so bilde man nach §. 456 aus den Elementen a, b, c, d, e die Variationen zur fünften Classe mit Wiederholung; hierauf bestimme man für jede Complexion, die alsdann als Produkt betrachtet wird, den zugehörigen Coefficienten. Hierbei verfahre man auf folgende Weise:

Jede der entstandenen Complexionen besteht entweder aus einem, oder aus zwei, oder aus drei, oder aus vier, oder endlich aus allen fünf Elementen.

Die aus einem Elemente bestehenden Complexionen sind die fünften Potenzen von a, b, c, d, e, nämlich aaaaa, bbbbb u. s. w. oder a^5, b^5, c^5, d^5, e^5; ihr Coefficient ist: $5!:5! = 1$.

Digitized by Google

Bei den aus zwei verschiedenen Elementen bestehenden Complexionen können die beiden Faktoren nur mit den Exponenten 1,4 oder 2,3 behaftet sein, wie $aaaab = a^4b^1$ und $aaacc = a^3c^2$; in jenem Falle ist der Coefficient $5! : 4! = 5$; in diesem $5! : (2!\,3!) = 10$.

In den aus drei verschiedenen Elementen bestehenden Produkten können die Exponenten der Faktoren 1, 1, 3 oder 1, 2, 2 sein, wie in $aaabc = a^3b^1c^1$ oder $aabbc = a^2b^2c^1$. Der Coefficient für Produkte ersterer Art ist: $5! : 3! = 20$, und für Produkte der zweiten Art $5! : (2!\,2!) = 30$.

Die Faktoren der aus vier verschiedenen Elementen bestehenden Produkte können nur die Exponenten 1, 1, 1, 2 haben, wie $aabcd = a^2b^1c^1d^1$; ihr Exponent ist $5! : 2! = 60$.

Für das aus allen fünf Elementen bestehende Produkt abcde endlich ist der Coefficient $5! = 120$.

Verbindet man nun die erhaltenen Complexionen mit ihren Coefficienten, so bildet die Summe derselben das bereits im vorigen §. auf anderm Wege gefundene Resultat für $(a+b+c+d+e)^5$.

§. 470. Man ist für jeden Werth von x und n berechtigt, anzunehmen, daß

(1) $(a+bx+cx^2+dx^3+\ldots)^n = A+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots$

mithin muß dieser Werth auch richtig sein, wenn man $x+z$ statt x setzt. Alsdann erhält man:

(2) $\{a+b(x+z)+c(x+z)^2+d(x+z)^3+\ldots\}^n$
$= A+B(x+z)+C(x+z)^2+D(x+z)^3+\ldots$ oder

(3) $\{(a+bx+cx^2+dx^3+\ldots)+(b+2cx+3dx^2+\ldots)z+\ldots\}^n$
$= (A+Bx+Cx^2+Dx^3\ldots.)+(B+2Cx+3Dx^2+\ldots)z+\ldots.$

Nun entwickele man die Anfangsglieder der n^{ten} Potenz, indem man $a+bx+cx^2+dx^3+\ldots$ als das erste und $(b+2cx+3dx^2+\ldots)z$ als das zweite Glied betrachtet. Hiernach erhalten wir:

(4) $(a+bx+cx^2+dx^3+\ldots)^n + \binom{n}{1}(a+bx+cx^2+\ldots)^{n-1}(b+2x$
$+3dx^2+\ldots)z+\ldots. = A+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots$
$+(B+2Cx+Dx^2+\ldots)z+\ldots.$

Da nun nach (1) das erste Glied der linken Seite dieser Gleichung dem ersten Gliede der zweiten Seite gleich ist, so müssen auch die zweiten Glieder einander gleich sein; daher ist:

(5) $\binom{n}{1}(a+bx+cx^2+\ldots)^{n-1}(b+2cx+3dx^2+\ldots)$
$= B+2Cx+3Dx^2+\ldots$

Nun dividire man Gl. (5) durch Gl. (1), so wird:

(6) $$\frac{n(a+bx+cx^2+\ldots)^{n-1}(b+2cx+3dx^2+\ldots)}{(a+bx+cx^2+dx^3+\ldots)^n}$$

Digitized by Google

$$= \frac{B+2Cx+3Dx^2+..}{A+Bx+Cx^2+Dx^3+...} \text{ oder}$$

$$(7)\quad \frac{n(b+2cx+3dx^2+..)}{a+bx+cx^2+dx^3+...} = \frac{B+2Cx+3Dx^2+...}{A+Bx+Cx^2+Dx^3+..}$$

Entwickelt man diese Gleichung, so erhält man:

$$\begin{array}{l|l|l|l|l} nbA+nbB & x+nbC & x^2+nbD & x^3+nbE & x^4+.... \\ \quad +2ncA & \quad +2ncB & \quad +2ncC & \quad +2ncD & \\ & \quad +3dnA & \quad +3ndB & \quad +3ndC & \\ & & \quad +4neA & \quad +4neB & \\ & & & \quad +5nfA & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l|l|l|l} = aB+2aC & x+3aD & x^2+4aE & x^3+5aF & x^4+.... \\ \quad +bB & \quad +2bC & \quad +3bD & \quad +4bE & \\ & \quad +cB & \quad +2cC & \quad +3cD & \\ & & \quad +dB & \quad +2dC & \\ & & & \quad +eB & \end{array}$$

Hieraus ergeben sich folgende Bestimmungsgleichungen:

$\alpha)$ $aB = nbA.$

$\beta)$ $2aC + bB = nbB + 2ncA.$

$\gamma)$ $3aD + 2bC + cB = nbC + 2ncB + 3ndA.$

$\delta)$ $4aE + 3bD + 2cC + dB = nbD + 2ncC + 3ndB + 4neA$ u. s. w.

Um den Werth für A zu erhalten, setze man in Gl. (1) $x = 0$; alsdann ist:

$A = a^n$. Setzt man diesen Werth für A in $\alpha)$, so wird

$$aB = n \,.\, a^n b; \text{ also } B = \binom{n}{1} a^{n-1} b.$$

$$C = \frac{(n-1)bB + 2ncA}{2a} = \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \binom{n}{1} a^{n-1} c.$$

$$D = \frac{(n-2)bC + (2n-1)cB + 3ndA}{3a} = \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 + 2\binom{n}{2} a^{n-2} bc + \binom{n}{1} a^{n-1} d.$$

$$E = \frac{(n-3)bD + (2n-2)cC + (3n-1)dB + 4neA}{4a} =$$

$$\binom{n}{4} a^{n-4} b^4 + 3\binom{n}{3} a^{n-3} b^2 c + 2\binom{n}{2}^{n-2} bd + \binom{n}{2} a^{n-2} c^2 + \binom{n}{1} a^{n-1} c$$

u. s. w. u. s. w. Daher ist:

$$(a + bx + cx^2 + dx^3 + ..)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} bx + \left\{ \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \binom{n}{1} a^{n-1} c \right\} x^2 +$$

Digitized by Google

$$\left\{\binom{n}{3}a^{n-3}b^3+2\binom{n}{2}a^{n-2}bc+\binom{n}{1}a^{n-1}d\right\}x^3+\left\{\binom{n}{4}a^{n-4}b^4\right.$$
$$\left.+3\binom{n}{3}a^{n-3}b^2c+2\binom{n}{2}a^{n-2}bd+\binom{n}{2}a^{n-2}c^2+\binom{n}{1}a^{n-1}c\right\}x^4+\ldots..$$

Setzt man $x=1$, so wird

$$(a+b+c+d+..)^n=a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}(b+c+d+..)$$
$$+\binom{n}{2}a^{n-2}(b+c+d+..)^2+\binom{n}{3}a^{n-3}b^3(b+c+d+..)^3$$
$$+\binom{n}{4}a^{n-4}b^4(b+c+d+..)^4+....$$

§. 471. Wenden wir die in den vorhergehenden §§. entwickelten Gesetze auf die Beispiele in Heis §. 92 an, so erhalten wir:

1. Nehmen wir die Multiplikation der hier gegebenen 6 binomischen Faktoren, worin das erste Glied überall dasselbe, die zweiten Glieder aber verschieden nach den gewöhnlichen algebraischen Regeln (§. 62 bis §. 70) vor, so erhält, wie aus §. 460 hervorgeht, das erste Glied des Produktes, nämlich x, eine Zahl zum Exponenten, welche der Anzahl der binomischen Faktoren gleich ist, also hier 6, weshalb das erste Glied x^6 ist und weil der Exponent von x in jedem folgenden Gliede um 1 abnimmt, so sind also die verschiedenen Potenzen

$$x^6,\ x^5,\ x^4,\ x^3,\ x^2,\ x^1,\ x^0.$$

Bestimmen wir jetzt die Coefficienten der verschiedenen Glieder, so ist derselbe für das erste Glied x^6 gleich 1. Der des zweiten Gliedes ist $a+b+c+d+e+f$. Derselbe bildet also die Combinationen zur ersten Classe aus den 6 zweiten Gliedern der binomischen Faktoren abcdef und wird bezeichnet durch $\overset{1}{\Sigma}C(abcdef)$, so daß also das zweite Glied des Produktes gleich ist $x^5\overset{1}{\Sigma}C(abcdef)$. Der Coefficient des dritten Gliedes ist $ab+ac+ad+\ldots$ Er bildet mithin die Combinationen zur zweiten Classe ohne Wiederholung aus den Elementen abcdef. Demnach heißt das dritte Glied $x^4\overset{2}{\Sigma}C(abcdef)$. Und weil ferner die Coefficienten der folgenden Glieder die Combinationen bezüglich zur driten, vierten, fünften und sechsten Classe ohne Wiederholung bilden (§. 455. 3.), so kann das Produkt der fraglichen sechs binomischen Faktoren auf folgende Weise dargestellt werden:

$$x^6+x^5\overset{1}{\Sigma}C(abcdef)+x^4\overset{2}{\Sigma}C(abcdef)+x^3\overset{3}{\Sigma}C(abcdef)$$
$$+x^2\overset{4}{\Sigma}C(abcdef)+x\overset{5}{\Sigma}C(abcdef)+x^0\overset{6}{\Sigma}C(abcdef).$$

Digitized by Google

Da das allgemeine Glied des fraglichen Produktes $x^{6-n}\sum_{n}C(abcdef)$ ist, aus welchem wir die einzelnen Glieder der Reihe nach herleiten können, wenn wir für n die Werthe 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 setzen, so kann dieses Produkt auch durch das Symbol

$$x^{6-n}\sum_{n}C(abcdef)$$

dargestellt werden.

2. Hier sollen α binomische Faktoren, worin wieder die ersten Glieder alle gleich, die zweiten aber verschieden sind, mit einander multiplicirt werden. Nach dem vorigen Beispiele wird also das fragliche Produkt gleich sein:

$$x^{\alpha}\pm x^{\alpha-1}\sum_{1}C(abcd..m)+x^{\alpha-2}\sum_{2}C(abcd..m)\pm x^{\alpha-3}\sum_{3}C(abcd..m)+..$$

oder, wenn die Summe der Combinationen zur ersten, zweiten, dritten Classe u. s. w. aus den Elementen a, b, c, d, e .. m bezüglich durch [a], [ab], [abc], [abcd] u. s. w. bezeichnet wird, so erhalten wir:

$$x^{\alpha}\pm[a]x^{\alpha-1}+[ab]x^{\alpha-2}\pm[abc]x^{\alpha-3}+[abcd]x^{\alpha-4}\pm.... \text{ oder}$$
$$= x^{\alpha-n}\sum_{n}C(abcd..m).(\pm 1)^{n}$$

wenn im letztern Ausdruck für $n = 0, 1, 2 \ldots$ bis α gesetzt werden. Dabei ist zu bemerken, daß für ein gerades n, das also von der Form 2m ist, das Zeichen + gilt und für ein ungerades n von der Form $2m \pm 1$ das Zeichen — gesetzt werden muß.

3. Setzen wir in das allgemeine Glied des vorigen Beispieles $\alpha = 5$, $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$; ferner $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$, $d = 5$, $e = 6$, so sind die Glieder des entwickelten Produktes der Reihe nach folgende:

$$+x^{5-0} = +x^5$$
$$-x^{5-1}\sum_{1}C(2,3,4,5,6) = -(2+3+4+5+6)x^4 = -20x^4$$
$$+x^{5-2}\sum_{2}C(2,3,4,5,6) = +(2.3+2.4+2.5+2.6+3.4+3.5+$$
$$3.6+4.5+4.6+5.6)x^3 = +155x^3$$
$$-x^{5-3}\sum_{3}C(2,3,4,5,6) = -(2.3.4+2.3.5+2.3.6+2.4.5+2.4.6+$$
$$2.5.6+3.4.5+3.4.6.+3.5.6+4.5.6)x^2 = -580x^2$$
$$+x^{5-4}\sum_{4}C(2,3,4,5,6) = +(2.3.4.5+2.3.4.6+2.3.5.6+2.4.5.6+$$
$$3.4.5.6)x = +1044x$$
$$-x^{5-5}\sum_{5}C(2,3,4,5,6) = -2.3.4.5.6x^0 = -720.$$

4. α) Da hier das erste Glied $abcdefgx^7$ ist, folglich die Combinationen gegen die vorhergehenden Beispiele in umgekehrter Reihenfolge erscheinen, so ist das Produkt der 7 binomischen Faktoren gleich:

Digitized by Google

$$x^7 \underset{7}{\Sigma C}(ab\,..\,g) \pm x^6 \underset{6}{\Sigma C}(ab\,..\,g) + x^5 \underset{5}{\Sigma C}(ab\,..\,g) \pm x^4 \underset{4}{\Sigma C}(ab\,..\,g)$$
$$+ x^3 \underset{3}{\Sigma C}(ab\,..\,g) \pm x^2 \underset{2}{\Sigma C}(ab\,..\,g) + x \underset{1}{\Sigma C}(ab\,..\,g) \pm x^0 \underset{0}{\Sigma C}(ab\,..\,g) =$$
$$x^{7-n} \underset{7-n}{\Sigma C}(abcdefg)(\pm 1)^n; \text{ für } n = 0,\ 1,\ 2 \ldots 7.$$

4. β) Das erste Glied x^7 des Produktes aus den 7 binomischen Faktoren hat zum Coefficienten die Summe der Combinationen zur 7. Classe aus den Elementen abcdefg. Das zweite Glied x^6 erhält als Coefficienten die Summe der Combinationen zur 6. Classe ohne Wiederholung aus den Elementen abcdefg, welche aber durch Multiplikation verbunden werden müssen mit der Summe der Combinationen zur ersten Classe aus den zweiten Gliedern der binomischen Faktoren $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta$ und zwar so, daß der in jeder Combination aus abcdefg fehlende Buchstabe durch den entsprechenden griechischen ergänzt wird. Man findet den Coefficienten des dritten Gliedes x^5, wenn man die Combinationen zur 5. Classe aus abcdefg mit den Combinationen zur 2. Classe aus $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta$ durch Multiplikation verbindet u. s. w. Verfahren wir hiernach und setzen zur bessern Veranschaulichung die jedesmaligen Combinationsformen aus den lateinischen und griechischen Buchstaben neben einander, so erhalten wir folgende Produkte:

$$(abcdefg)x^7 \pm \left|\begin{array}{l} abcdef.\eta \\ abcdeg.\zeta \\ abcdfg.\varepsilon \\ abcefg.\delta \\ abdefg.\gamma \\ acdefg.\beta \\ bcdefg.\alpha \end{array}\right| x^6 + \left|\begin{array}{lll} abcde.\zeta\eta & abdeg.\gamma\zeta & adefg.\beta\gamma \\ abcdf.\varepsilon\eta & abdfg.\gamma\varepsilon & bcdef.\alpha\eta \\ abcdg.\varepsilon\zeta & abefg.\gamma\delta & bcdeg.\alpha\zeta \\ abcef.\delta\eta & acdef.\beta\eta & bcdfg.\alpha\varepsilon \\ abceg.\delta\zeta & acdeg.\beta\zeta & bcefg.\alpha\delta \\ abcfg.\delta\varepsilon & acdfg.\beta\varepsilon & bdefg.\alpha\gamma \\ abdef.\gamma\eta & acefg.\beta\delta & cdefg.\alpha\beta \end{array}\right| x^5$$

$$\pm \left|\begin{array}{llllll} abcd.\varepsilon\zeta\eta & abef.\gamma\delta\eta & aceg.\beta\delta\zeta & bcdf.\alpha\varepsilon\eta & bdfg.\alpha\gamma\varepsilon & \\ abce.\delta\zeta\eta & abeg.\gamma\delta\zeta & acfg.\beta\delta\varepsilon & bcdg.\alpha\varepsilon\zeta & befg.\alpha\gamma\delta & \\ abcf.\delta\varepsilon\eta & abfg.\gamma\delta\varepsilon & adef.\beta\gamma\eta & bcef.\alpha\delta\eta & cdef.\alpha\beta\eta & \\ abcg.\delta\varepsilon\zeta & acde.\beta\zeta\eta & adeg.\beta\gamma\zeta & bceg.\alpha\delta\zeta & cdeg.\alpha\beta\zeta & x^4 \\ abde.\gamma\zeta\eta & acdf.\beta\varepsilon\eta & adfg.\beta\gamma\varepsilon & bcfg.\alpha\delta\varepsilon & cdfg.\alpha\beta\varepsilon & \\ abdf.\gamma\varepsilon\eta & acdg.\beta\varepsilon\zeta & aefg.\beta\gamma\delta & bdef.\alpha\gamma\eta & cefg.\alpha\beta\delta & \\ abdg.\gamma\varepsilon\zeta & acef.\beta\delta\eta & bcde.\alpha\zeta\eta & bdeg.\alpha\gamma\zeta & defg.\alpha\beta\gamma & \end{array}\right|$$

$$+ \left|\begin{array}{llllll} abc.\delta\varepsilon\zeta\eta & acf.\beta\delta\varepsilon\eta & afg.\beta\gamma\delta\varepsilon & bdg.\alpha\gamma\varepsilon\zeta & cef.\alpha\beta\delta\eta & \\ abd.\gamma\varepsilon\zeta\eta & acg.\beta\delta\varepsilon\zeta & bcd.\alpha\varepsilon\zeta\eta & bef.\alpha\gamma\delta\eta & ceg.\alpha\beta\delta\zeta & \\ abe.\gamma\delta\zeta\eta & ade.\beta\gamma\zeta\eta & bce.\alpha\delta\zeta\eta & beg.\alpha\gamma\delta\zeta & cfg.\alpha\beta\delta\varepsilon & \\ abf.\gamma\delta\varepsilon\eta & adf.\beta\gamma\varepsilon\eta & bcf.\alpha\delta\varepsilon\eta & bfg.\alpha\gamma\delta\varepsilon & def.\alpha\beta\gamma\eta & x^3 \\ abg.\gamma\delta\varepsilon\zeta & adg\,\beta\gamma\varepsilon\zeta & bcg.\alpha\delta\varepsilon\zeta & cde.\alpha\beta\zeta\eta & deg.\alpha\beta\gamma\zeta & \\ acd.\beta\varepsilon\zeta\eta & aef.\beta\gamma\delta\eta & bde.\alpha\gamma\zeta\eta & cdf.\alpha\beta\varepsilon\eta & dfg.\alpha\beta\gamma\varepsilon & \\ ace.\beta\delta\zeta\eta & aeg.\beta\gamma\delta\zeta & bdf.\alpha\gamma\varepsilon\eta & cdg.\alpha\beta\varepsilon\zeta & efg.\alpha\beta\gamma\delta & \end{array}\right|$$

Digitized by Google

$$\pm\begin{vmatrix} ab.\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta + bd.\alpha\gamma\varepsilon\zeta\eta + cg.\alpha\beta\delta\varepsilon\zeta \\ ac.\beta\delta\varepsilon\zeta\eta \quad be.\alpha\gamma\delta\zeta\eta \quad de.\alpha\beta\gamma\zeta\eta \\ ad.\beta\gamma\varepsilon\zeta\eta \quad bf.\alpha\gamma\delta\varepsilon\eta \quad df.\alpha\beta\gamma\varepsilon\eta \\ ae.\beta\gamma\delta\zeta\eta \quad bg.\alpha\gamma\delta\varepsilon\zeta \quad dg.\alpha\beta\gamma\varepsilon\zeta \\ af.\beta\gamma\delta\varepsilon\eta \quad cd.\alpha\beta\varepsilon\zeta\eta \quad ef.\alpha\beta\gamma\delta\eta \\ ag.\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta \quad ce.\alpha\beta\delta\zeta\eta \quad eg.\alpha\beta\gamma\delta\zeta \\ bc.\alpha\delta\varepsilon\zeta\eta \quad cf.\alpha\beta\delta\varepsilon\eta \quad fg.\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon \end{vmatrix} x^2 + \begin{vmatrix} a.\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta \\ b.\alpha\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta \\ c.\alpha\beta\delta\varepsilon\zeta\eta \\ d.\alpha\beta\gamma\varepsilon\zeta\eta \\ e.\alpha\beta\gamma\delta\zeta\eta \\ f.\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\eta \\ g.\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta \end{vmatrix} x \pm \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta.$$

Das vorstehend entwickelte Produkt kann symbolisch auf folgende Weise dargestellt werden:

$$[abcdefg]x^7 \pm [abcdef].[\alpha]x^6 + [abcde].[\alpha\beta]x^5 \pm [abcd].[\alpha\beta\gamma]x^4 + [abc].[\alpha\beta\gamma\delta]x^3 \pm [ab].[\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon]x^2 + [a].[\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta]x \pm [\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta].$$

5. Nach §. 460 erhalten wir hier als Produkt:

$$x^6 \pm \binom{6}{1}ax^5 + \binom{6}{2}a^2x^4 \pm \binom{6}{3}a^3x^3 + \binom{6}{4}a^4x^2 \pm \binom{6}{5}a^5x + \binom{6}{6}a^6 \text{ oder}$$

$$x^6 \pm 6ax^5 + 15a^2x^4 \pm 20a^3x^3 + 15a^4x^2 \pm 6a^5x + a^6.$$

6 und 7 finden ihre Erledigung in §. 460—465.

8. Setzt man in die Binomialformel 3a statt a und 7b statt b, so ist das entwickelte Produkt der verlangten Potenz:

$$(3a)^7 - \binom{7}{1}.(3a)^6.7b + \binom{7}{2}.(3a)^5.(7b)^2 - \binom{7}{3}(3a)^4.(7b)^3 +$$

$$\binom{7}{4}.(3a)^3.(7b)^4 - \binom{7}{5}.(3a)^2.(7b)^5 + \binom{7}{6}.3a.(7b)^6 - \binom{7}{7}.(7b)^7 \text{ oder:}$$

$$2187a^7 - 35721a^6b + 250047a^5b^2 - 972405a^4b^3 + 2268945a^3b^4 - 3176523a^2b^5 + 2470629ab^6 - 823543b^7.$$

9. α) Lösen wir das Beispiel nach §. 464 auf, so erhalten wir:

$$(5a)^9 = 1953125a^9 = A_1$$

$$-\frac{9}{1}\cdot\frac{4b}{5a}.A_1 = -\frac{9.4b.1953125a^9}{5a} = -14062500a^8b = A_2$$

$$+\frac{8}{2}\cdot\frac{4b}{5a}.A_2 = \frac{8.4b.14062500a^8b}{2.5a} = +45000000a^7b^2 = A_3$$

$$-\frac{7}{3}\cdot\frac{4b}{5a}.A_3 = -\frac{7.4b.45000000a^7b^2}{3.5a} = -84000000a^6b^3 = A_4$$

$$+\frac{6}{4}\cdot\frac{4b}{5a}.A_4 = \frac{6.4b.84000000a^6b^3}{4.5a} = +100800000a^5b^4 = A_5$$

$$-\frac{5}{5}\cdot\frac{4b}{5a}.A_5 = -\frac{5.4b.100800000a^5b^4}{5.5a} = -80640000a^4b^5 = A_6$$

$$+\frac{4}{6}\cdot\frac{4b}{5a}.A_6 = \frac{4.4b.80640000a^4b^5}{6.5a} = +43008000a^3b^6 = A_7$$

$$-\frac{3}{7}\cdot\frac{4b}{5a}.A_7 = -\frac{3.4b.430080000a^3b^6}{7.5a} = -14745600a^2b^7 = A_8$$

Digitized by Google

$$+\frac{2}{8}\cdot\frac{4b}{5a}\cdot A_8=\frac{2.4b.14745600a^2b^7}{8.5a}=+2949120ab^8=A_9$$

$$-\frac{1}{9}\cdot\frac{4b}{5a}\cdot A_9=-\frac{1.4b.2949120ab^8}{9.5a}=-262144b^9.$$

9. β) Setzen wir hier a^3 statt a und $3ab^2$ statt b in die Binomialformel, so wird:

$$(a^3)^8-\binom{8}{1}(a^3)^7.3ab^2+\binom{8}{2}(a^3)^6.(3ab^2)^2-\binom{8}{3}(a^3)^5.(3ab^2)^3+$$
$$\binom{8}{4}(a^3)^4.(3ab^2)^4-\binom{8}{5}(a^3)^3.(3ab^2)^5+\binom{8}{6}(a^3)^2.(3ab^2)^6-$$
$$\binom{8}{7}a^3.(3ab^2)^7+\binom{8}{8}(3ab^2)^8=$$
$$a^{24}-24a^{22}b^2+252a^{20}b^4-1512a^{18}b^6+5670a^{16}b^8-13608a^{14}b^{10}$$
$$+20412a^{12}b^{12}-17496a^{10}b^{14}+6561a^8b^{16}.$$

9. γ) $\left(\frac{3a^3b^2}{c}\right)^6-\binom{6}{1}\cdot\left(\frac{3a^3b^2}{c}\right)^5\cdot\frac{2c^3}{a^2b}+\binom{6}{2}\cdot\left(\frac{3a^3b^2}{c}\right)^4\cdot\left(\frac{2c^3}{a^2b}\right)^2-$
$\binom{6}{3}\cdot\left(\frac{3a^3b^2}{c}\right)^3\left(\frac{2c^3}{a^2b}\right)^3+\binom{6}{4}\cdot\left(\frac{3a^3b^2}{c}\right)^2\cdot\left(\frac{2c^3}{a^2b}\right)^4-\binom{6}{5}\frac{3a^3b^2}{c}\cdot\left(\frac{2c^3}{a^2b}\right)^5+$
$\binom{6}{6}\cdot\left(\frac{2c^3}{a^2b}\right)^6=729\frac{a^{18}b^{12}}{c^6}-2916\frac{a^{18}b^9}{c^2}+4860a^8b^6c^2-4320a^3b^3c^6$
$$+2160\frac{c^{10}}{a^2}-576\frac{c^{14}}{a^7b^3}+64\frac{c^{18}}{a^{12}b^6}.$$

10. α) $(\sqrt{x})^8\pm\binom{8}{1}(\sqrt{x})^7.\sqrt{y}+\binom{8}{2}(\sqrt{x})^6.(\sqrt{y})^2\pm\binom{8}{3}(\sqrt{x})^5.(\sqrt{y})^3$
$+\binom{8}{4}(\sqrt{x})^4.(\sqrt{y})^4\pm\binom{8}{5}(\sqrt{x})^3.(\sqrt{y})^5+\binom{8}{6}(\sqrt{x})^2.(\sqrt{y})^6$
$$\pm\binom{8}{7}\sqrt{x}.(\sqrt{y})^7+\binom{8}{8}(\sqrt{y})^8=$$
$$x^4\pm8x^3\sqrt{xy}+28x^2y\pm56x^2y\sqrt{xy}+70x^2y^2\pm56xy^2\sqrt{xy}$$
$$+28xy^3\pm8y^3\sqrt{xy}+y^4.$$

10. β) $(\sqrt{x:y})^9\pm\binom{9}{1}(\sqrt{x:y})^8.\sqrt{y:x}+\binom{9}{2}(\sqrt{x:y})^7.(\sqrt{y:x})^2$
$\pm\binom{9}{3}(\sqrt{x:y})^6.(\sqrt{y:x})^3+\binom{9}{4}(\sqrt{x:y})^5.(\sqrt{y:x})^4\pm$
$\binom{9}{5}(\sqrt{x:y})^4.(\sqrt{y:x})^5+\binom{9}{6}(\sqrt{x:y})^3.(\sqrt{y:x})^6\pm$
$\binom{9}{7}(\sqrt{x:y})^2.(\sqrt{y:x})^7+\binom{9}{8}(\sqrt{x:y}).(\sqrt{y:x})^8\pm(\sqrt{y:x})^9=$

Digitized by Google

$$\left\{\frac{x^4}{y^4} \pm 9\frac{x^3}{y^3} + 36\frac{x^2}{y^2} \pm 84\frac{x}{y} + 126\right\}\sqrt{\frac{x}{y}} \pm \left\{126 + 84\frac{y}{x}\right.$$
$$\left. \pm 36\frac{y^2}{x^2} + 9\frac{y^3}{x^3} \pm \frac{y^4}{x^4}\right\}\sqrt{\frac{y}{x}}.$$

11. α) Die n^{te} Potenz des Binoms $a+b$ hat $n+1$ Glieder. Subtrahirt man hiervon die Ordnungszahl des jedesmaligen Gliedes, so erhält man den Exponenten für a; die Differenz zwischen diesem und dem Potenzexponenten n gibt den Exponenten für b, weil sich die Exponenten von a und b immer zu einander ergänzen müssen. Hiernach ist der Exponent des r^{ten} Gliedes für $a = n-r+1$ und daher für $b = n-(n-r+1) = r-1$. Der Coefficient desselben ist $\frac{n!}{(n-r+1)!(r-1)!} = \binom{n}{r-1}$; folglich ist allgemein das r^{te} Glied $= (\pm 1)^{r-1} \cdot \binom{n}{r-1} a^{n-r+1} b^{r-1}$.

Ist nun $r = 4$ und $n = 17$, so ist das vierte Glied der gegebenen Potenz gleich:

$$+\binom{17}{3} m^{17-4+1} n^{4-1} = +680 m^{14} n^3.$$

11. β) Hier ist das vierzehnte Glied gleich

$$-\binom{19}{13} a^{19-14+1} b^{14-1} = -27132 a^6 b^{13}.$$

11. γ) $+\binom{30}{4} (3a^2)^{30-5+1} . (7ab^3)^{5-1} = +1015 . 3^{26} . 7^4 . a^{52} b^{12}$.

12. Nach §. 465 sind die beiden Mittelglieder

$$-\binom{19}{9} (5a)^{10} . (2b)^9 + \binom{19}{10} (4a)^9 . (2b)^{10} \text{ oder}$$
$$-92378 . 5^{10} . 2^9 . a^{10} b^9 + 92378 . 5^9 . 2^{10} . a^9 b^{10}.$$

13. Siehe §. 465.

14. α) $(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 + \ldots$ (A)

$$(a-b)^n = a^n - \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 - \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 + \ldots \text{(B)}$$

Die Summe von A+B ist gleich

$$2\left\{a^n + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \binom{n}{4} a^{n-4} b^4 + \binom{n}{6} a^{n-6} b^6 + \binom{n}{8} a^{n-8} b^8 + \ldots\right\}$$

Die Differenz A — B beträgt:

$$2\left\{\binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 + \binom{n}{5} a^{n-5} b^5 + \binom{n}{7} a^{n-7} b^7 + \ldots\right\}$$

Digitized by Google

Die Summe von A + B gibt also diejenigen Glieder der beiden entwickelten Binome, in welchen b mit geradem Exponenten vorkommt und ihre Differenz diejenigen, welche b mit ungeradem Exponenten enthalten.

14. β) Um die Formel des binomischen Satzes auf ein Binom $a+b\sqrt{-1}$ anzuwenden, welches aus einer reellen Größe a und einer imaginären $b\sqrt{-1}$ besteht, hat man zu berücksichtigen, daß die verschiedenen Potenzen von $\sqrt{-1}$ verschiedene zum Theil reelle, zum Theil imaginäre Werthe geben. Denn nach §. 301 ist:

$$(\sqrt{-1})^1 = (\sqrt{-1})^{4m+1} = +\sqrt{-1}$$
$$(\sqrt{-1})^2 = (\sqrt{-1})^{4m+2} = -1$$
$$(\sqrt{-1})^3 = (\sqrt{-1})^{4m+3} = -\sqrt{-1}$$
$$(\sqrt{-1})^4 = (\sqrt{-1})^{4m+4} = +1.$$

Setzen wir nun in den unter α) für $(a+b)^n$ und $(a-b)^n$ entwickelten Reihen $b = b\sqrt{-1}$, so wird:

$$b^2 = b^2(\sqrt{-1})^2 = -b^2;\quad b^3 = b^3(\sqrt{-1})^3 = -b^3\sqrt{-1};$$
$$b^4 = b^4(\sqrt{-1})^4 = +b^4;\quad b^5 = b^5(\sqrt{-1})^5 = +b^5\sqrt{-1};$$
$$b^6 = b^6(\sqrt{-1})^6 = -b^6;\quad b^7 = b^7(\sqrt{-1})^7 = -b^7\sqrt{-1};$$
$$b^8 = b^8(\sqrt{-1})^8 = +b^8;\quad b^9 = b^9(\sqrt{-1})^9 = +b^9\sqrt{-1}\ \text{u.s.w.}$$

Daher erhalten wir, wenn wir die durch die verschiedenen Potenzen von $\sqrt{-1}$ bedingten Zeichenänderungen vornehmen und die reellen von den imaginären Gliedern trennen:

$$A = a^n - \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{4}a^{n-4}b^4 - .. + \left\{\binom{n}{1}a^{n-1}b - \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \binom{n}{5}a^{n-5}b^5 - ..\right\}\sqrt{-1}$$

$$B = a^n - \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{4}a^{n-4}b^4 - .. - \left\{\binom{n}{1}a^{n-1}b - \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \binom{n}{5}a^{n-5}b^5 - ..\right\}\sqrt{-1}.$$

Die beiden Reihen A und B bestehen also aus einem reellen Theile und einem imaginären; bezeichnen wir jenen mit A_1 und diesen mit B_1, so ist:

$$(a+b\sqrt{-1})^n = A_1 + B_1\sqrt{-1} \text{ und } (a-b\sqrt{-1})^n = A_1 - B_1\sqrt{-1}.$$

Demnach ist die Potenz eines zum Theil reellen, zum Theil imaginären Binoms $a \pm b\sqrt{-1}$ ein Binom von derselben

Digitized by Google

Form $A_1 \pm B_1\sqrt{-1}$, dessen imaginärer Theil auch blos mit dem imaginären Zeichen $\sqrt{-1}$ behaftet ist. Es ist daher:

$$A+B = A_1+B_1\sqrt{-1}+A_1-B_1\sqrt{-1} = 2A_1 =$$

der Summe der reellen Glieder der beiden Reihen und

$$A-B = A_1+B_1\sqrt{-1}-(A_1-B_1\sqrt{-1}) = 2B_1\sqrt{-1} =$$

der Summe der imaginären Glieder derselben Reihen. Daher ist:

$$A+B = 2A_1 = 2\left(a^n-\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\binom{n}{4}a^{n-4}b^4-\binom{n}{6}a^{n-6}b^6+\ldots\right)$$

$$A-B=2B_1\sqrt{-1}=2\left\{\binom{n}{1}a^{n-1}b-\binom{n}{3}a^{n-3}b^3+\binom{n}{5}a^{n-5}b^5-\ldots\right\}\sqrt{-1}.$$

15. α) Bildet man aus den 3 Elementen a, b, c die Variationsformen zur ersten und zweiten Classe, so ist:

(1) a, b, c

(2) aa, ab, ac
ba, bb, bc
ca, cb, cc.

Da diese Complexionen als Produkte betrachtet werden und Produkte, welche dieselben Faktoren enthalten, einander gleich sind, so können alle Complexionen, die aus denselben Elementen bestehen, zusammen gezogen werden. Man erhält auf diese Weise noch so viele Glieder, als die Anzahl der Combinationen mit Wiederholung für die 3 Elemente zur zweiten Classe beträgt. Diese sind also:

aa, ab, ac
bb, bc
cc.

Gibt man jedem Gliede die Permutationszahl zum Coefficienten, so ist die zweite Potenz von $a+b+c$ gleich:

$$a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2.$$

15. β) Entwickelt man aus der zweiten Classe die Combinationen zur dritten, so wird:

aaa, aab, aac oder a^3, a^2b, a^2c
abb, abc „ ab^2, abc
acc „ ac^2
bbb, bbc „ b^3, b^2c
bcc „ bc^2
ccc „ c^3.

Gibt man jedem Gliede die Permutationszahl seiner Elemente zum Coefficienten, so erhält man unter Berücksichti-

Digitized by Google

gung, daß alle Produkte, worin c mit geradem Exponenten vorkommt, positiv werden, dagegen negativ sind, wenn dieser Exponent ungerade ist, folgende Entwickelung der dritten Potenz von a+b−c:

$a^3+3a^2b-3a^2c+3ab^2-6abc+3ac^2+b^3-3b^2c+3bc^2-c^3$.

15. γ) Bildet man aus den Combinationen zur dritten Classe die zur vierten, so hat man:

aaaa, aaab, aaac oder a^4, a^3b, a^3c
aabb, aabc „ a^2b^2, a^2bc
aacc „ a^2c^2
abbb, abbc „ ab^3, ab^2c
abcc „ abc^2
accc „ ac^3
bbbb, bbbc „ b^4, b^3c
bbcc „ b^2c^2
bccc „ bc^3
cccc „ c^4.

Verbindet man mit jedem Gliede die Permutationszahl seiner Elemente, so erhält man als vierte Potenz von a+b−c folgende Reihe:

$a^4+4a^3b-4a^3c+6a^2b^2-12a^2bc+6a^2c^2+4ab^3-12ab^2c+12abc^2-4ac^3+b^4-4b^3c+6b^2c^2-4bc^3+c^4$.

15. δ) Bildet man aus den Combinationen zur vierten Classe die zur fünften, so hat man:

aaaaa, aaaab, aaaac oder a^5, a^4b, a^4c
aaabb, aaabc, aaacc „ a^3b^2, a^3bc, a^3c^2
aabbb, aabbc, aabcc „ a^2b^3, a^2b^2c, a^2bc^2
aaccc, abbbb, abbbc „ a^2c^3, ab^4, ab^3c
abbcc, abccc, acccc „ ab^2c^2, abc^3, ac^4
bbbbb, bbbbc, bbbcc „ b^5, b^4c, b^3c^2
bbccc, bcccc, ccccc „ b^2c^3, bc^4, c^5.

Daher gibt die fünfte Potenz von $a-b\mp c$ folgende Reihe:

$a^5-5a^4b\mp5a^4c+10a^3b^2\pm20a^3bc+10a^3c^2-10a^2b^3\mp30a^2b^2c-30a^2bc^2\mp10a^2c^3+5ab^4\pm20ab^3c+30ab^2c^2\pm20abc^3+5ac^4-b^5\mp5b^4c-10b^3c^2\mp b^2c^3-5bc^4\mp c^5$.

16. Man sehe die §§. 468—470.

17. α) $a^2\pm2ab\pm2ac\pm2ad+b^2+2bc+2bd+c^2+2cd+d^2$.

17. β) $a^3\pm3a^2b\pm3a^2c\pm3a^2d+3ab^2+6abc+6abd+3ac^2+6acd+3ad^2\pm b^3\pm3b^2c\pm3b^2d\pm3bc^2\pm6bcd\pm3bd^2\pm c^3\pm3c^2d\pm3cd^2\pm d^3$.

17. γ) $a^4\pm4a^3b\pm4a^3c\pm4a^3d+6a^2b^2+12a^2bc+12a^2bd+6a^2c^2+12a^2cd+6a^2d^2\pm4ab^3\pm12ab^2c\pm12ab^2d\pm12abc^2\pm24abcd\pm12abd^2\pm4ac^3\pm12ac^2d\pm12acd^2\pm4ad^3+$

Digitized by Google

$b^4 + 4b^3c + 4b^3d + 6b^2c^2 + 12b^2cd + 6b^2d^2 + 4bc^3 + 12bc^2d + 12bcd^2 + 4bd^3 + c^4 + 4c^3d + 6c^2d^2 + 4cd^3 + d^4$.

17. δ) $a^5 \pm 5a^4b \pm 5a^4c \pm 5a^4d + 10a^3b^2 + 20a^3bc + 20a^3bd + 10a^3c^2 + 20a^3cd + 10a^3d^2 \pm 10a^2b^3 \pm 30a^2b^2c \pm 30a^2b^2d \pm 30a^2bc^2 \pm 60a^2bcd \pm 30a^2bd^2 \pm 10a^2c^3 \pm 30a^2c^2d \pm 30a^2cd^2 + 10a^2d^3 + 5ab^4 + 20ab^3c + 20ab^3d + 30ab^2c^2 + 60ab^2cd + 30ab^2d^2 + 20abc^3 + 60abc^2d + 60abcd^2 + 20abd^3 + 5ac^4 + 20a^3d + 30ac^2d^2 + 20acd^3 + 5ad^4 \pm b^5 \pm 5b^4c \pm 5b^4d \pm 10b^3c^2 + 20b^3cd \pm 10b^3d^2 \pm 10b^2d^3 \pm 30b^2c^2d \pm 30b^2cd^2 \pm 10b^2d^3 \pm 5bc^4 \pm 20bc^3d \pm 30bc^2d^2 \pm 20bcd^3 \pm 5bd^4 \pm c^5 \pm 5c^4d \pm 10c^3d^2 \pm 10c^2d^3 \pm 5cd^4 \pm d^5$.

17. ε) $a^n \pm \binom{n}{1}a^{n-1}b \pm \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 \pm \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + .. \pm b^n$

$\pm \binom{n}{1}(a+b)^{n-1}c + \binom{n}{2}(a+b)^{n-2}c^2 \pm \binom{n}{3}(a+b)^{n-3}c^3 + .. \pm c^n$

$\pm \binom{n}{1}(a+b+c)^{n-1}d + \binom{n}{2}(a+b+c)^{n-2}d^2 \pm .... \pm d^n$.

18. Das hier gegebene Polynom ist von der Form $a+bx+cx^2+dx^3+\ldots$ und es kommt bei der Entwickelung dieses Polynoms hauptsächlich darauf an, die Coefficienten der mit irgend einer Potenz von x behafteten Glieder zu bestimmen. Zu diesem Zwecke bilde man aus dem jedesmaligen Exponenten von x alle Combinationen zur so vielten Classe, als der Potenzexponent beträgt, für die mit den Zeigern 0, 1, 2, 3 ... versehenen Elemente a, b, c, d ... und multiplicire überdies jede Combination mit der ihr zugehörigen Permutationszahl. Die Summe der auf diese Weise erhaltenen Produkte ist der verlangte Coefficient. In dem der Bearbeitung vorliegenden Beispiel soll das erste Element 2 den Zeiger 0, die übrigen Elemente -5, -7, $+1$, $+3$ bezüglich die Zeiger 1, 2, 3, 4 erhalten. Das erste Glied des entwickelten Polynoms wird 2^5, das letzte $(3x^4)^5$ sein. Alle Zwischenglieder enthalten Potenzen von x in natürlicher Reihenfolge von x^1 bis x^{20}.

Um nun den Coefficienten von x^1 zu bestimmen, bilde man nach §. 457 aus den beiden Zeigern 0,1 die Combinationen zur 5. Classe zur Summe 1. Dies gibt die einzige Combination $1=0+0+0+0+1$. Werden nun statt der Zeiger die entsprechenden Elemente gesetzt, so erhalten wir: $-2^4.5$. Multipliciren wir dieses Produkt mit seiner Permutationszahl, nämlich mit $\frac{5!}{4!}=5$, weil unter 5 Elementen 4 gleiche sind, so erhalten wir als Coefficient für

Digitized by Google

das zweite Glied: $-5.2^4.5 = -400$, so daß dasselbe also heißt: $-400x$.

Zur Summe 2 erhalten wir aus den Zeigern die beiden Complexionen $2=0+0+0+0+2$ und $2=0+0+0+1+1$. Setzen wir hierin die Elemente statt der Zeiger und fügen zugleich die Permutationszahl hinzu, so wird:

$$2 = 0+0+0+0+2 \text{ oder } -\frac{5!}{4!}.2^4.7 = -560$$

$$= 0+0+0+1+1 \text{ oder } +\frac{5!}{2!\,3!}.2^3.5^2 = +2000.$$

Daher ist das dritte Glied $= (2000-560)x^2 = +1440x^2$. Der Combinationen zur Summe 3 sind drei. Werden hierin die Zeiger durch die Elemente ersetzt und die Producte mit ihren Permutationszahlen multiplicirt, so erhalten wir als Coefficienten des vierten Gliedes:

$$3 = 0+0+0+0+3 \text{ oder } +\frac{5!}{4!}.2^4.1 = +80.$$

$$= 0+0+0+1+2 \quad „ \quad +\frac{5!}{3!}.2^3.5.7 = +5600$$

$$= 0+0+1+1+1 \quad „ \quad -\frac{5!}{2!\,3!}.2^2.5^3 = -5000$$

Also ist das vierte Glied $= (5680-5000)x^3 = +680x^3$. Fahren wir nun in dieser Weise fort, so erhalten wir folgende Resultate:

$$4 = 0+0+0+0+4 \text{ oder } +\frac{5!}{4!}.2^4.3 = +240.$$

$$= 0+0+0+1+3 \quad „ \quad -\frac{5!}{3!}.2^3.5.1 = -800.$$

$$= 0+0+0+2+2 \quad „ \quad -\frac{5!}{3!\,2!}.2^3.7^2 = +3920$$

$$= 0+0+1+1+2 \quad „ \quad -\frac{5!}{2!\,2!}.2^2.5^2.7 = -21000$$

$$= 0+1+1+1+1 \quad „ \quad +\frac{5!}{4!}.2.5^4 = +6250$$

Das fünfte Glied ist $= (10410-21800)x^4 = -11390x^4$.

$$5 = 0+0+0+1+4 \text{ oder } -\frac{5!}{3!}.2^3.5.3 = -2400$$

$$= 0+0+0+2+3 \quad „ \quad -\frac{5!}{3!}.2^3.7.1 = -1120$$

$$= 0+0+1+1+3 \quad „ \quad +\frac{5!}{2!\,2!}.2^2.5^2.1 = +3000$$

Digitized by Google

$= 0+0+1+2+2$ oder $-\frac{5!}{2!\,2!}.2^2.5.7^2 = -29400$

$= 0+1+1+1+2$ „ $-\frac{5!}{3!}.2.5^3.7 = +35000.$

$= 1+1+1+1+1$ „ $-\frac{5!}{5!}.5^5 = -3125$

Sechstes Glied $= (38000 - 36045)x^5 = +1955x^5.$

$6 = 0+0+0+2+4$ oder $-\frac{5!}{3!}.2^3.7.3 = -3360$

$= 0+0+0+3+3$ „ $+\frac{5!}{3!\,2!}.2^3.1^2 = +80$

$= 0+0+1+1+4$ „ $+\frac{5!}{2!\,2!}.2^2.5^2.3 = +9000$

$= 0+0+1+2+3$ „ $+\frac{5!}{2!}.2^2.5.7.1 = +8400$

$= 0+0+2+2+2$ „ $-\frac{5!}{2!\,3!}.2^2.7^3 = -13720$

$= 0+1+1+1+3$ „ $-\frac{5!}{3!}.2.5^3.1 = -5000$

$= 0+1+1+2+2$ „ $+\frac{5!}{2!\,2!}.2.5^2.7^2 = +73500$

$= 1+1+1+1+2$ „ $-\frac{5!}{4!}.5^4.7 = -21875$

Siebentes Glied $= (90980 - 43955)x^6 = +47025x^6.$

$7 = 0+0+0+3+4$ oder $+\frac{5!}{3!}.2^3.1.3 = +480$

$= 0+0+1+2+4$ „ $+\frac{5!}{2!}.2^2.5.7.3 = +25200$

$= 0+0+1+3+3$ „ $-\frac{5!}{2!\,2!}.2^2.5.1^2 = -600$

$= 0+0+2+2+3$ „ $+\frac{5!}{2!\,2!}.2^2.7^2.1 = +5880$

$= 0+1+1+1+4$ „ $-\frac{5!}{3!}.2.5^3.3 = -15000$

$= 0+1+1+2+3$ „ $-\frac{5!}{2!}.2.5^2.7.1 = -21000$

$= 0+1+2+2+2$ „ $+\frac{5!}{3!}.2.5.7^3 = +68600$

Digitized by Google

$= 1+1+1+1+3$ oder $+\frac{5!}{4!}.5^4.1 = +3125$

$= 1+1+1+2+2$ „ $-\frac{5!}{3!\,2!}.5^3.7^2 = -61250$

Achtes Glied $= (103285 - 97850)x^7 = +5435x^7$

$8 = 0+0+0+4+4$ oder $+\frac{5!}{3!\,2!}.2^3.3^2 = +720$

$= 0+0+1+3+4$ „ $-\frac{5!}{2!}.2^2.5.1.3 = -3600$

$= 0+0+2+2+4$ „ $+\frac{5!}{2!\,2!}.2^2.7^2.3 = +17640$

$= 0+0+2+3+3$ „ $-\frac{5!}{2!\,2!}.2^2.7.1^2 = -840$

$= 0+1+1+2+4$ „ $-\frac{5!}{2!}.2.5^2.7.3 = -63000$

$= 0+1+1+3+3$ „ $+\frac{5!}{2!\,2!}.2.5^2.1^2 = +1500$

$= 0+1+2+2+3$ „ $-\frac{5!}{2!}.2.5.7^2.1 = -29400$

$= 0+2+2+2+2$ „ $+\frac{5!}{4!}.2.7^4 = +24010$

$= 1+1+1+1+4$ „ $+\frac{5!}{4!}.5^4.3 = +9375$

$= 1+1+1+2+3$ „ $+\frac{5!}{3!}.5^3.7.1 = +17500$

$= 1+1+2+2+2$ „ $-\frac{5!}{2!\,3!}.5^2.7^3 = -85750.$

Neuntes Glied $= (70745 - 182590)x^8 = -111845x^8.$

$9 = 0+0+1+4+4$ oder $-\frac{5!}{2!\,2!}.2^2.5.3^2 = -5400$

$= 0+0+2+3+4$ „ $-\frac{5!}{2!}.2^2.7.1.3 = -5040$

$= 0+0+3+3+3$ „ $+\frac{5!}{2!\,3!}.2^2.1^3 = +40$

$= 0+1+1+3+4$ „ $+\frac{5!}{2!}.2.5^2.1.3 = +9000$

$= 0+1+2+2+4$ „ $-\frac{5!}{2!}.2.5.7^2.3 = -88200$

Digitized by Google

$= 0+1+2+3+3$ oder $+\frac{5!}{2!}.2.5.7.1^2 = +4200$

$= 0+2+2+2+3$ „ $-\frac{5!}{3!}.2.7^3.1 = -13720$

$= 1+1+1+2+4$ „ $+\frac{5!}{3!}.5^3.7.3 = +52500$

$= 1+1+1+3+3$ „ $-\frac{5!}{3!\,2!}.5^3.1^2 = -1250$

$= 1+1+2+2+3$ „ $+\frac{5!}{2!\,2!}.5^2.7^2.1 = +36750$

$= 1+2+2+2+2$ „ $-\frac{5!}{4!}.5.7^4 = -60025$

Zehntes Glied $= (102490 - 173635)x^9 = -71145x^9$.

$10 = 0+0+2+4+4$ oder $-\frac{5!}{2!\,2!}.2^2.7.3^2 = -7560$

$= 0+0+3+3+4$ „ $+\frac{5!}{2!\,2!}.2^2.1^2.3 = +360$

$= 0+1+1+4+4$ „ $+\frac{5!}{2!\,2!}.2.5^2.3^2 = +13500$

$= 0+1+2+3+4$ „ $+\frac{5!}{1!}.2.5.7.1.3 = +25200$

$= 0+1+3+3+3$ „ $-\frac{5!}{3!}.2.5.1^3 = -200$

$= 0+2+2+2+4$ „ $-\frac{5!}{3!}.2.7^3.3 = -41160$

$= 0+2+2+3+3$ „ $+\frac{5!}{2!\,2!}.2.7^2.1^2 = +2940$

$= 1+1+1+3+4$ „ $-\frac{5!}{3!}.5^3.1.3 = -7500$

$= 1+1+2+2+4$ „ $+\frac{5!}{2!\,2!}.5^2.7^2.3 = +110250$

$= 1+1+2+3+3$ „ $-\frac{5!}{2!\,2!}.5^2.7.1^2 = -5250$

$= 1+2+2+2+3$ „ $+\frac{5!}{3!}.5.7^3.1 = +34300$

$= 2+2+2+2+2$ „ $-\frac{5!}{5!}.7^5 = -16807$

Digitized by Google

Eilftes Glied $= (186550 - 78477)x^{10} = +108073x^{10}$.

$11 = 0+0+3+4+4$ oder $+\frac{5!}{2!\,2!} \cdot 2^2 . 1 . 3^2 = +1080$

$= 0+1+2+4+4$ „ $+\frac{5!}{2!} . 2 . 5 . 7 . 3^2 = +37800$

$= 0+1+3+3+4$ „ $-\frac{5!}{2!} . 2 . 5 . 1^2 . 3 = -1800$

$= 0+2+2+3+4$ „ $+\frac{5!}{2!} . 2 . 7^2 . 1 . 3 = +17640$

$= 0+2+3+3+3$ „ $-\frac{5!}{3!} . 2 . 7 . 1^3 = -280$

$= 1+1+1+4+4$ „ $-\frac{5!}{3!\,2!} . 5^3 . 3^2 = -11250$

$= 1+1+2+3+4$ „ $-\frac{5!}{2!} . 5^2 . 7 . 1 . 3 = -31500$

$= 1+1+3+3+3$ „ $+\frac{5!}{2!\,3!} . 5^2 . 1^3 = +250$

$= 1+2+2+2+4$ „ $+\frac{5!}{3!} . 5 . 7^3 . 3 = +102900$

$= 1+2+2+3+3$ „ $+\frac{5!}{2!\,2!} . 5 . 7^2 . 1^2 = -7350$

$= 2+2+2+2+3$ „ $+\frac{5!}{4!} . 7^4 . 1 = +12005$.

Zwölftes Glied $= (171675 - 52180)x^{11} = +119495x^{11}$.

$12 = 0+0+4+4+4$ oder $+\frac{5!}{2!\,3!} . 2^2 . 3^3 \ldots = +1080$

$= 0+1+3+4+4$ „ $-\frac{5!}{2!} . 2 . 5 . 1 . 3^2 = -5400$

$= 0+2+2+4+4$ „ $+\frac{5!}{2!\,2!} . 2 . 7^2 . 3^2 = +26460$

$= 0+2+3+3+4$ „ $-\frac{5!}{2!} . 2 . 7 . 1^2 . 3 = -2520$

$= 0+3+3+3+3$ „ $+\frac{5!}{4!} . 2 . 1^4 = +10$

$= 1+1+2+4+4$ „ $-\frac{5!}{2!\,2!} . 5^2 . 7 . 3^2 = -47250$

$= 1+1+3+3+4$ „ $+\frac{5!}{2!\,2!} . 5^2 . 1^2 . 3 = +2250$

Digitized by Google

$12 = 1+2+2+3+4$ oder $-\frac{5!}{2!}.5.7^2.1.3 = -44100$

$= 1+2+3+3+3$ „ $+\frac{5!}{3!}.5.7.1^3 = +700.$

$= 2+2+2+2+4$ „ $+\frac{5!}{4!}.7^4.3 = +36015$

$= 2+2+2+3+3$ „ $-\frac{5!}{3!\,2!}.7^3.1^2 = -3430.$

Dreizehntes Glied $= (66515 - 102700)x^{12} = -36185x^{12}.$

$13 = 0+1+4+4+4$ oder $-\frac{5!}{3!}.2.5.3^3 = -5400$

$= 0+2+3+4+4$ „ $-\frac{5!}{2!}.2.7.1.3^2 = -7560$

$= 0+3+3+3+4$ „ $+\frac{5!}{3!}.2.1^3.3 = +120$

$= 1+1+3+4+4$ „ $+\frac{5!}{2!\,2!}.5^2.1.3^2 = +6750$

$= 1+2+2+4+4$ „ $-\frac{5!}{2!\,2!}.5.7^2.3^2 = -66150$

$= 1+2+3+3+4$ „ $+\frac{5!}{2!}.5.7.1^2.3 = +6300$

$= 1+3+3+3+3$ „ $-\frac{5!}{4!}.5.1^4 = -25$

$= 2+2+2+3+4$ „ $-\frac{5!}{3!}.7^3.1.3 = -20580$

$= 2+2+3+3+3$ „ $+\frac{5!}{2!\,3!}.7^2.1^3 = +490$

Vierzehntes Glied $= (13660 - 99715)x^{13} = -86055x^{13}.$

$14 = 0+2+4+4+4$ oder $-\frac{5!}{3!}.2.7.3^3 = -7560$

$= 0+3+3+4+4$ „ $+\frac{5!}{2!\,2!}.2.1^2.3^2 = +540$

$= 1+1+4+4+4$ „ $+\frac{5!}{2!\,3!}.5^2.3^3 = +6750$

$= 1+2+3+4+4$ „ $+\frac{5!}{2!}.5.7.1.3^2 = +18900$

$= 1+3+3+3+4$ „ $-\frac{5!}{3!}.5.1^3.3 = -300$

Digitized by Google

$14 = 2+2+2+4+4$ oder $-\frac{5!}{3!\,2!} \cdot 7^3 \cdot 3^2 = -30870$

$= 2+2+3+3+4$ „ $+\frac{5!}{2!\,2!} \cdot 7^2 \cdot 1^2 \cdot 3 = +4410$

$= 2+3+3+3+3$ „ $-\frac{5!}{4!} \cdot 7 \cdot 1^4 = -35.$

Fünfzehntes Glied $= (30600 - 38765)x^{14} = -8165x^{14}.$

$15 = 0+3+4+4+4$ oder $+\frac{5!}{3!} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3^3 = +1080$

$= 1+2+4+4+4$ „ $+\frac{5!}{3!} \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3^3 = +18900$

$= 1+3+3+4+4$ „ $-\frac{5!}{2!\,2!} \cdot 5 \cdot 1^2 \cdot 3^2 = -1350$

$= 2+2+3+4+4$ „ $+\frac{5!}{2!\,2!} \cdot 7^2 \cdot 1 \cdot 3^2 = +13230$

$= 2+3+3+3+4$ „ $-\frac{5!}{3!} \cdot 7 \cdot 1^3 \cdot 3 = -420$

$= 3+3+3+3+3$ „ $+\frac{5!}{5!} \cdot 1^5 = +1.$

Sechszehntes Glied $= (33211 - 1770)x^{15} = +31441x^{15}.$

$16 = 0+4+4+4+4$ oder $+\frac{5!}{4!} \cdot 2 \cdot 3^4 = +810$

$= 1+3+4+4+4$ „ $-\frac{5!}{3!} \cdot 5 \cdot 1 \cdot 3^3 = -2700$

$= 2+2+4+4+4$ „ $+\frac{5!}{2!\,3!} \cdot 7^2 \cdot 3^3 = +13230$

$= 2+3+3+4+4$ „ $-\frac{5!}{2!\,2!} \cdot 7 \cdot 1^2 \cdot 3^2 = -1890$

$= 3+3+3+3+4$ „ $+\frac{5!}{4!} \cdot 1^4 \cdot 3 = +15.$

Siebzehntes Glied $= (14055 - 4590)x^{16} = +9465x^{16}.$

$17 = 1+4+4+4+4$ oder $-\frac{5!}{4!} \cdot 5 \cdot 3^4 = -2025$

$= 2+3+4+4+4$ „ $-\frac{5!}{3!} \cdot 7 \cdot 1 \cdot 3^3 = -3780$

$= 3+3+3+4+4$ „ $+\frac{5!}{3!\,2!} \cdot 1^3 \cdot 3^2 = +90.$

Digitized by Google

Achtzehntes Glied $= (90 - 5805)x^{17} = -5715x^{17}$.

$18 = 2+4+4+4+4$ oder $-\frac{5!}{4!}.7.3^4 = -2835$

$= 3+3+4+4+4$ „ $+\frac{5!}{2!\,3!}.1^2.3^3 = +270$

Neunzehntes Glied $= (270 - 2835)x^{18} = -2565x^{18}$.

$19 = 3+4+4+4+4$ oder $+\frac{5!}{4!}.1.3^4 = +405$

Zwanzigstes Glied $= +405x^{19}$.
Letztes Glied $= (3x^4)^5 = +243x^{20}$.

19. Mit Bezug auf §. 470 ist, weil $a = a$, $b = -2$, $c = 3$, $d = -4$ und $n = 6$, das vierte Glied der hier gegebenen Potenz gleich:

$$-\left\{\binom{6}{3}a^3.2^3 + 2\binom{6}{2}a^4.2.3 + \binom{6}{1}a^5.4\right\}x^3 =$$
$$-(160a^3 + 180a^4 + 24a^5)x^3.$$

20. Dieses Beispiel findet seine Erledigung in den §§. 466 und 467.

21. Mit Hülfe des binomischen Lehrsatzes lassen sich auch folgende Ausdrücke $\frac{1}{a+b}$, $\frac{1}{(a+b)^2}$, $\frac{1}{(a+b)^3}$ u. s. w. in eine Reihe von Gliedern entwickeln, da $\frac{1}{a+b} = (a+b)^{-1}$, $\frac{1}{(a+b)^2} = (a+b)^{-2}$ u. s. w. ist, wenn man in der oben §. 467 entwickelten Reihe für n die Werthe 1, 2, 3 u. s. w. setzt.

$\alpha)$ $\frac{1}{a+b} = a^{-1}\left(1 + \binom{-1}{1}\frac{b}{a} + \binom{-1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \binom{-1}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^3 + \binom{-1}{4}\left(\frac{b}{a}\right)^4 + \binom{-1}{5}\left(\frac{b}{a}\right)^5 + \ldots\right)$

$= \frac{1}{a}\left(1 - \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^3}{a^3} + \frac{b^4}{a^4} - \frac{b^5}{a^5} + \frac{b^6}{a^6} - \ldots\right)$

$\beta)$ $\frac{1}{(a+b)^2} = a^{-2}\left\{1 + \binom{-2}{1}\frac{b}{a} + \binom{-2}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \binom{-2}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^3 + \binom{-2}{4}\left(\frac{b}{a}\right)^4 + \ldots\right\}$

$= \frac{1}{a^2}\left\{1 - 2\frac{b}{a} + 3\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 4\left(\frac{b}{a}\right)^3 + 5\left(\frac{b}{a}\right)^4 - 6\left(\frac{b}{a}\right)^5 + 7\left(\frac{b}{a}\right)^6 - \ldots\right\}$

Digitized by Google

$$\gamma)\ \frac{1}{(a-b)^3} = a^{-3}\left\{1-\binom{-3}{1}\frac{b}{a}+\binom{-3}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^2-\binom{-3}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^3 +\binom{-3}{4}\left(\frac{b}{a}\right)^4-\ldots.\right\}$$

$$=a^{-3}\left\{1+{}^3/_1\frac{b}{a}+{}^3/_{1}.{}^4/_2\left(\frac{b}{a}\right)^2+{}^3/_{1}.{}^4/_2.{}^5/_3\left(\frac{b}{a}\right)^3+{}^3/_{1}.{}^4/_2.{}^5/_3.{}^6/_4\left(\frac{b}{a}\right)^4+\ldots\right\}$$

$$=\frac{1}{a^3}\left\{1+{}^3/_1\frac{b}{a}+{}^4/_2\frac{b}{a}A_1+{}^5/_3\frac{b}{a}A_2+{}^6/_4\frac{b}{a}A_3+{}^7/_5\frac{b}{a}A_4+{}^8/_6\frac{b}{a}A_5\ldots\right\}$$

21. δ) Nach §. 466 ist:

$$\sqrt{a+b}=a^{1/2}\left\{1+\binom{1/2}{1}\frac{b}{a}+\binom{1/2}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^2+\binom{1/2}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^3+\binom{1/2}{4}\left(\frac{b}{a}\right)^4+\ldots\right\}$$

$$=a^{1/2}\left\{1+{}^1/_2\frac{b}{a}-{}^1/_2.{}^1/_4\left(\frac{b}{a}\right)^2+{}^1/_2.{}^1/_4.{}^3/_6\left(\frac{b}{a}\right)^3-{}^1/_2.{}^1/_4.{}^3/_6.{}^5/_8\left(\frac{b}{a}\right)^4+\ldots\right\}$$

$$=\sqrt{a}\left\{1+{}^1/_2\frac{b}{a}-{}^1/_4\frac{b}{a}A_1+{}^3/_6\frac{b}{a}A_2-{}^5/_8\frac{b}{a}A_3+{}^7/_{10}\frac{b}{a}A_4-{}^9/_{12}\frac{b}{a}A_5+{}^{11}/_{14}\frac{b}{a}A_6-\ldots\right\}$$

21. ε) $\sqrt[3]{(a-b)}=a^{1/3}\left\{1-{}^1/_3\frac{b}{a}-{}^1/_3.{}^2/_6\left(\frac{b}{a}\right)^2-{}^1/_3.{}^2/_6.{}^5/_9\left(\frac{b}{a}\right)^3 -{}^1/_3.{}^2/_6.{}^5/_9.{}^8/_{12}\left(\frac{b}{a}\right)^4-\ldots\right\}$

$$=\sqrt[3]{a}\left\{1-{}^1/_3\frac{b}{a}-{}^2/_6\frac{b}{a}A_1-{}^5/_9\frac{b}{a}A_2-{}^8/_{12}\frac{b}{a}A_3-{}^{11}/_{15}\frac{b}{a}A_4-\ldots\right\}$$

21. ζ) $\sqrt[3]{(a+b)^2}=a^{2/3}\left\{1+{}^2/_3\frac{b}{a}-{}^2/_3.{}^1/_6\left(\frac{b}{a}\right)^2+{}^2/_3.{}^1/_6.{}^4/_9\left(\frac{b}{a}\right)^3 -{}^2/_3.{}^1/_6.{}^4/_9.{}^7/_{12}\left(\frac{b}{a}\right)^4-\ldots\right\}$

$$=\sqrt[3]{a^2}\left\{1+{}^2/_3\frac{b}{a}-{}^1/_6\frac{b}{a}A_1+{}^4/_9\frac{b}{a}A_2-{}^7/_{12}\frac{b}{a}A_3+{}^{10}/_{15}\frac{b}{a}A_4-\ldots\right\}$$

21. η) $\sqrt[4]{(a-b)^3}=a^{3/4}\left\{1-{}^3/_4\frac{b}{a}-\frac{3.1}{4.8}\left(\frac{b}{a}\right)^2-\frac{3.1.5}{4.8.12}\left(\frac{b}{a}\right)^3 -\frac{3.1.5.9}{4.8.12.16}\left(\frac{b}{a}\right)^4-\ldots\right\}$

$$=\sqrt[4]{a^3}\left\{1-{}^3/_4\frac{b}{a}-{}^1/_8\frac{b}{a}A_1-{}^5/_{12}\frac{b}{a}A_2-{}^9/_{16}\frac{b}{a}A_3-{}^{13}/_{20}\frac{b}{a}A_4-\ldots\right\}$$

Digitized by Google

21. ϑ) $\frac{1}{\sqrt{a-b}} = a^{-1/2}\left\{1 + \frac{1}{2}\frac{b}{a} + \frac{1.3}{2.4}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{b}{a}\right)^3 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\left(\frac{b}{a}\right)^4 + \ldots\right\}$

$= \frac{1}{\sqrt{a}}\left\{1 + \frac{1}{2}\frac{b}{a} + \frac{3}{4}\frac{b}{a}A_1 + \frac{5}{6}\frac{b}{a}A_2 + \frac{7}{8}\frac{b}{a}A_3 + \frac{9}{10}\frac{b}{a}A_4 + \frac{11}{12}\frac{b}{a}A_5 + \ldots\right\}$

21. ι) $\frac{1}{\sqrt[3]{(a-b)^2}} = a^{-2/3}\left\{1 + \frac{2}{3}\frac{b}{a} + \frac{2.5}{3.6}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{2.5.8}{3.6.9}\left(\frac{b}{a}\right)^3 + \frac{2.5.8.11}{3.6.9.12}\left(\frac{b}{a}\right)^4 + \ldots\right\} =$

$\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}\left\{1 + \frac{2}{3}\frac{b}{a} + \frac{5}{6}\frac{b}{a}A_1 + \frac{8}{9}\frac{b}{a}A_2 + \frac{11}{12}\frac{b}{a}A_3 + \frac{14}{15}\frac{b}{a}A_4 + \frac{17}{18}\frac{b}{a}A_5 + \ldots\right\}$

Wenn man $(a \pm b)^n$ entwickelt, so bricht die Reihe, welche man erhält, nur in dem Falle ab, wenn n eine ganze und positive Zahl ist; alsdann ist die vollständige Reihe dem Werthe der zu entwickelnden Größe gleich. In den übrigen Fällen bricht die Reihe nicht ab, wie aus den vorstehenden Beispielen sich ergibt, und wenn sie sich dem Werthe der zu entwickelnden Größe um so mehr nähern soll, je mehr Glieder man von derselben nimmt, so muß $a > b$ sein.

22. α) Mit Hülfe vorstehender Reihen lassen sich die Wurzeln aus gegebenen Zahlen finden. Man zerlege nämlich die gegebene Zahl in das Binom zweier Zahlen, wovon die eine eine Potenz mit einem Exponenten ist, welcher dem Wurzelexponent gleich ist, und die zweite gegen die erste möglichst klein ist. Soll z. B. die Quadratwurzel aus 11 gezogen werden, so zerlege man 11 in $9 + 2$, so daß also $\sqrt{11} = \sqrt{9+2}$ wird. Nun ist $\sqrt{9+2} = 3\sqrt{1+\frac{2}{9}} = 3(1+\frac{2}{9})^{1/2}$. Daher muß das Binom $(1+\frac{2}{9})^{1/2}$ zuerst entwickelt werden. Mit Bezug auf Nr. 21. δ) ist hier $a = 9$, also $\sqrt{a} = 3$, $b = 2$, also $\frac{b}{a} = \frac{2}{9}$. Setzen wir diese Werthe in die dort gefundene Reihe, so erhalten wir für die ersten 8 Glieder folgende Werthe:

$1 + \frac{1}{2}\frac{b}{a} = +\frac{1}{2}.\frac{2}{9} = 1 + 0{,}1111111111 = A_1$

$-\frac{1}{4}.\frac{b}{a}A_1 = -\frac{1}{4}.\frac{2}{9}A_1 = -0{,}0061728395 = A_2$

$+\frac{3}{6}.\frac{b}{a}A_2 = +\frac{3}{6}.\frac{2}{9}A_2 = +0{,}0006858711 = A_3$

Digitized by Google

$$-{}^{5}/_{8}.\frac{b}{a}A_3 = -{}^{5}/_{8}.{}^{2}/_{9}A_3 = -0{,}0000952560 = A_4$$

$$+{}^{7}/_{10}.\frac{b}{a}A_4 = +{}^{7}/_{10}.{}^{2}/_{9}A_4 = +0{,}0000148182 = A_5$$

$$-{}^{9}/_{12}.\frac{b}{a}A_5 = -{}^{9}/_{12}.{}^{2}/_{9}A_5 = -0{,}0000024697 = A_6$$

$$+{}^{11}/_{14}.\frac{b}{a}A_6 = +{}^{11}/_{14}.{}^{2}/_{9}A_6 = +0{,}0000004312 = A_7$$

$$-{}^{13}/_{16}.\frac{b}{a}A_7 = -{}^{13}/_{16}.{}^{2}/_{9}A_7 = -0{,}0000000778 = A_8.$$

Werden nun hier die mit + und — versehenen Zahlen gehörig reducirt, so ist die Summe = 1,1055415886. Daher ist:

$\sqrt{11} = 3\sqrt{1+{}^{2}/_{9}} = 3.1{,}1055415886 = 3{,}3166247658.$

Der Decimalbruch ist in den 7 ersten Stellen ganz genau, da $\sqrt{11} = 3{,}316624790$ (§. 314).

22. β) Da $47 = 49 - 2$, so ist $\sqrt{47} = \sqrt{49-2} = 7\sqrt{1-{}^{2}/_{49}} = 7(1-{}^{2}/_{49})^{1/2}$. Es ist daher $a = 49$, also $\sqrt{a} = 7$, $b = 2$, also $\frac{b}{a} = {}^{2}/_{49}$. Nun ist:

$$\begin{aligned}
+1 - {}^{1}/_{2}.{}^{2}/_{49} &= 1 - 0{,}020408163265306 = A_1\\
-{}^{1}/_{4}.{}^{2}/_{49}A_1 &= -0{,}000208246563931 = A_2\\
-{}^{3}/_{6}.{}^{2}/_{49}A_2 &= -0{,}000004249929876 = A_3\\
-{}^{5}/_{8}.{}^{2}/_{49}A_3 &= -0{,}000000108416578 = A_4\\
-{}^{7}/_{10}.{}^{2}/_{49}A_4 &= -0{,}000000003097616 = A_5\\
-{}^{9}/_{12}.{}^{2}/_{49}A_5 &= -0{,}000000000094825 = A_6\\
-{}^{11}/_{14}.{}^{2}/_{49}A_6 &= -0{,}000000000003041 = A_7\\
-{}^{13}/_{16}.{}^{2}/_{49}A_7 &= -0{,}000000000000101 = A_8.
\end{aligned}$$

Daher ist $\sqrt{47} =$

$7(1 - 0{,}020620771371277) = 6{,}855654600401061.$

Der Decimalbruch ist in den ersten 13 Stellen ganz genau.

22. γ) Wollte man $\sqrt{2}$ bis auf mehrere Decimalstellen ganz genau finden, so könnte man zwar $\sqrt{2} = (1+1)^{1/2}$ setzen; allein die auf diese Weise entstehende Reihe würde sich dem Werthe von $\sqrt{2}$ nur langsam nähern. Daher multiplicire man 2 mit einer gehörig gewählten Quadratzahl, z. B. mit 25, so ist $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ und ${}^{1}/_{5}\sqrt{50} = \sqrt{2}$. Allein $\sqrt{50} = \sqrt{49+1} = 7\sqrt{1+{}^{1}/_{49}} = 7(1+{}^{1}/_{49})^{1/2}$. Es ist also $a = 49$, $\sqrt{a} = 7$, $b = 1$, daher $\frac{b}{a} = {}^{1}/_{49}$. Nun ist:

Digitized by Google

$$
\begin{aligned}
+\tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{49} &= +0{,}010204081632653 = A_1\\
-\tfrac{1}{4}.\tfrac{1}{49}A_1 &= -0{,}000052061640982 = A_2\\
+\tfrac{3}{6}.\tfrac{1}{49}A_2 &= +0{,}000000531241234 = A_3\\
-\tfrac{5}{8}.\tfrac{1}{49}A_3 &= -0{,}000000006776036 = A_4\\
+\tfrac{7}{10}.\tfrac{1}{49}A_4 &= +0{,}000000000096801 = A_5\\
-\tfrac{9}{12}.\tfrac{1}{49}A_5 &= -0{,}000000000001481 = A_6\\
+\tfrac{11}{14}.\tfrac{1}{49}A_6 &= +0{,}000000000000023 = A_7.
\end{aligned}
$$

Daher ist:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{2} &= \tfrac{7}{5}(1{,}010204612970711 - 0{,}000052068418499)\\
&= 1{,}414213562373096.
\end{aligned}
$$

Der Decimalbruch ist in den ersten 14 Stellen ganz genau.

Außer den bisherigen Entwickelungen von $(a+b)^n$ ist auch noch folgende zu merken:

$$
(a+b)^n = a^n\left\{1 + \frac{n}{1}\cdot\frac{b}{a+b} + \frac{n(n+1)}{1.2}\cdot\left(\frac{b}{a+b}\right)^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}\left(\frac{b}{a+b}\right)^3 + \ldots\right\} \text{(A)}.
$$

Denn wenn man $\frac{b}{a+b} = y$ setzt, so wird $b = a\frac{y}{1-y}$ und $(a+b) = a(1+\frac{y}{1-y}) = a.\frac{1}{1-y} = a(1-y)^{-1}$. Daher ist:

$$
(a+b)^n = a^n(1-y)^{-n}.
$$

Nun ist aber

$$
(1-y)^{-n} = 1 + \frac{n}{1}y + \frac{n(n+1)}{1.2}y^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}y^3 + \ldots.
$$

Wird nun in dieser Reihe $y = \frac{b}{a+b}$ gesetzt, so entsteht hieraus die Reihe A, deren Richtigkeit hiermit erwiesen ist.

Auf ähnliche Weise wird nun auch

$$
(a+b)^{-n} = a^{\frac{1}{n}}\left\{1 - \frac{n}{1}\frac{b}{a+b} + \frac{n(n+1)}{1.2}\left(\frac{b}{a+b}\right)^2 - \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}\left(\frac{b}{a+b}\right)^3 + \ldots\right\}
$$

Um nun $\sqrt{2}$ zu finden, setze man in Reihe A $n = \frac{1}{2}$ und suche nun $\sqrt{49+1}$, so ist hier $a = 49$, also $\frac{b}{a+b} = \frac{1}{50} = \frac{2}{100}$. Nun ist:

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}.\tfrac{2}{100} &= 0{,}010000000000000 = A_1\\
\tfrac{3}{4}.\tfrac{2}{100}.A_1 &= 0{,}000150000000000 = A_2\\
\tfrac{5}{6}.\tfrac{2}{100}.A_2 &= 0{,}000002500000000 = A_3
\end{aligned}
$$

Digitized by Google

$$^{7}/_{8}.{}^{2}/_{100}.A_3 = 0{,}000000043750000 = A_4$$
$$^{9}/_{10}.{}^{2}/_{100}.A_4 = 0{,}000000000787500 = A_5$$
$$^{11}/_{12}.{}^{2}/_{100}.A_5 = 0{,}000000000014438 = A_6$$
$$^{13}/_{14}.{}^{2}/_{100}.A_6 = 0{,}000000000000268 = A_7$$
$$^{15}/_{16}.{}^{2}/_{100}.A_7 = 0{,}000000050000005 = A_8.$$

Also ist:

$$\sqrt{2} = {}^{7}/_{5}.1{,}010152544552211 = 1{,}414213562373095.$$

22. δ) Soll aus einer Zahl die Cubikwurzel gezogen werden, so zerlege man dieselbe so in zwei Theile, daß der erste Theil ein vollständiger Cubus wird und dieser Theil größer wird, als der zweite; die Reihe nimmt um so schneller ab, je mehr der erste Theil den zweiten an Größe übersteigt. Soll nun die Cubikwurzel aus 388 gezogen werden, so setze man $388 = {}^{1}/_{27}(10648 - 172)$; alsdann wird:

$$\sqrt[3]{388} = \sqrt[3]{{}^{1}/_{27}(10648 - 172)} = {}^{1}/_{3}(10648 - 172)^{1/3} = {}^{22}/_{3}(1 - {}^{43}/_{2662})^{1/3}.$$

Daher ist $a = 10648$, also $\sqrt[3]{a} = 22$, $b = 172$, also $\frac{b}{a} = {}^{172}/_{10648} = {}^{43}/_{2662}$. Mit Bezug auf Nr. 21. ε) erhalten wir, wenn wir die sechs ersten Glieder berechnen, folgende Werthe:

$$-{}^{1}/_{3}.{}^{43}/_{2662} = -0{,}005384422739794 = A_1$$
$$-{}^{2}/_{6}.{}^{43}/_{2662}A_1 = -0{,}000028992008240 = A_2$$
$$-{}^{5}/_{9}.{}^{43}/_{2662}A_2 = -0{,}000000260175381 = A_3$$
$$-{}^{8}/_{12}.{}^{43}/_{2662}A_3 = -0{,}000000002801788 = A_4$$
$$-{}^{11}/_{15}.{}^{43}/_{2662}A_4 = -0{,}000000000033189 = A_5$$
$$-{}^{14}/_{18}.{}^{43}/_{2662}A_5 = -0{,}000000000000417 = A_6.$$

Daher ist:

$$\sqrt[3]{388} = {}^{22}/_{3}(1 - 0{,}005413677758809) = 7{,}293633029768734.$$

Diese Wurzel ist in den 13 ersten Decimalstellen ganz genau.

22. ε) Da $3 = {}^{1}/_{729}.2187 = {}^{1}/_{729}(2197 - 10)$, so ist:

$$\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{{}^{1}/_{729}(2197 - 10)} = {}^{1}/_{9}(2197 - 10)^{1/3}.$$

Es ist also $a = 2197$, daher $\sqrt[3]{a} = 13$, $b = 10$, also:

$$\frac{b}{a} = {}^{10}/_{2197}.$$ Nun ist:

$$-{}^{1}/_{3}.{}^{10}/_{2197} = -0{,}001517220452131 = A_1$$
$$-{}^{2}/_{6}.{}^{10}/_{2197}A_1 = -0{,}000002301957900 = A_2$$
$$-{}^{5}/_{9}.{}^{10}/_{2197}A_2 = -0{,}000000005820962 = A_3$$
$$-{}^{8}/_{12}.{}^{10}/_{2197}A_3 = -0{,}000000000017663 = A_4$$
$$-{}^{11}/_{15}.{}^{10}/_{2197}A_4 = -0{,}000000000000059 = A_5.$$

Daher ist:

Digitized by Google

$\sqrt[3]{3} = {}^{18}/_{9}(1-0{,}001519528248715) = 1{,}442249570307411.$
Der Decimalbruch ist bis zur 13. Stelle ganz genau.

23. α) Setzt man $10 = \frac{10^{10}}{8^{10}} \cdot \frac{8^{10}}{10^{10}} \cdot 10$, so wird:

$$\sqrt[10]{10} = {}^{10}/_{8}\sqrt[10]{\frac{8^{10}}{10^{10}} \cdot 10} = {}^{10}/_{8}\sqrt[10]{\frac{10737418240}{10^{10}}} =$$

$${}^{10}/_{8}\sqrt[10]{1+0{,}073741824} = {}^{10}/_{8}(1+0{,}073741824)^{1/10}.$$

Hier ist $n = 10$, $a = 1$, $b = 0{,}073741824$. Es ist daher:

$$\begin{aligned}
+{}^{1}/_{10}.b &= +0{,}007374182400000 = A_1\\
-{}^{9}/_{20}b.A_1 &= -0{,}000244703547308 = A_2\\
+{}^{19}/_{30}bA_2 &= +0{,}000011428429014 = A_3\\
-{}^{29}/_{40}bA_3 &= -0{,}000000610996071 = A_4\\
+{}^{39}/_{50}bA_4 &= +0{,}000000035143654 = A_5\\
-{}^{49}/_{60}bA_5 &= -0{,}000000002116438 = A_6\\
+{}^{59}/_{70}bA_6 &= +0{,}000000000131544 = A_7\\
-{}^{69}/_{80}bA_7 &= -0{,}000000000008367 = A_8\\
+{}^{79}/_{90}bA_8 &= +0{,}000000000000542 = A_9\\
-{}^{89}/_{100}bA_9 &= -0{,}000000000000035 = A_{10}.
\end{aligned}$$

Daher ist $\sqrt[10]{10} =$
${}^{10}/_{8}(1{,}007385646104754 - 0{,}000245316668219) =$
$1{,}25892541179567.$
Der Decimalbruch ist in den ersten 11 Stellen ganz genau.
Man sehe §. 347 im I. Theile IV. Aufl. S. 435.

23. β) $\sqrt[3]{68} = \sqrt[3]{64+4} = 4\sqrt[3]{1+{}^{1}/_{16}}$; daher ist:

$1 : \sqrt[3]{68} = 1 : 4\sqrt[3]{1+{}^{1}/_{16}} = {}^{1}/_{4}(1+{}^{1}/_{16})^{-1/3}$. Nun ist:

$$\begin{aligned}
-{}^{1}/_{3}.{}^{1}/_{16} &= -0{,}020833333333333 = A_1\\
+{}^{4}/_{6}.{}^{1}/_{16}A_1 &= +0{,}000868055555555 = A_2\\
-{}^{7}/_{9}.{}^{1}/_{16}A_2 &= -0{,}000042197145061 = A_3\\
+{}^{10}/_{12}.{}^{1}/_{16}A_3 &= +0{,}000002197767972 = A_4\\
-{}^{13}/_{15}.{}^{1}/_{16}A_4 &= -0{,}000000119045765 = A_5\\
+{}^{16}/_{18}.{}^{1}/_{16}A_5 &= +0{,}000000006613653 = A_6\\
-{}^{19}/_{21}.{}^{1}/_{16}A_6 &= -0{,}000000000373986 = A_7\\
+{}^{22}/_{24}.{}^{1}/_{16}A_7 &= +0{,}000000000021426 = A_8\\
-{}^{25}/_{27}.{}^{1}/_{16}A_8 &= -0{,}000000000000124 = A_9.
\end{aligned}$$

Daher ist $1 : \sqrt[3]{68} =$
${}^{1}/_{4}(1{,}000870259958606 - 0{,}020875649898269)$
$= 0{,}244998652512584.$

24. Da $(a+b\sqrt{-1})^{1/3} = a^{1/3}(1+\frac{b}{a}\sqrt{-1})^{1/3}$ und $(a-b\sqrt{-1})^{1/3}$

Digitized by Google

$= a^{1/3}(1-\frac{b}{a}\sqrt{-1})^{1/3}$, so brauchen wir blos $(1\pm\frac{b}{a}\sqrt{-1})^{1/3}$ zu entwickeln. Bezeichnen wir die beiden Binome bezüglich mit A und B, so ist:

$$A = a^{1/3}\Big\{1+\tfrac{1}{3}\tfrac{b}{a}\sqrt{-1}-\frac{1.2}{3.6}\Big(\frac{b}{a}\Big)^2(\sqrt{-1})^2+\frac{1.2.5}{3.6.9}\Big(\frac{b}{a}\Big)^3(\sqrt{-1})^3-$$
$$\frac{1.2.5.8}{3.6.9.12}\Big(\frac{b}{a}\Big)^4(\sqrt{-1})^4+\frac{1.2.5.8.11}{3.6.9.12.15}\Big(\frac{b}{a}\Big)^5(\sqrt{-1})^5-$$
$$\frac{1.2.5.8.11.14}{3.6.9.12.15.18}\Big(\frac{b}{a}\Big)^6(\sqrt{-1})^6+\frac{1.2.5.8.11.14.17}{3.6.9.12.15.18.21}\Big(\frac{b}{a}\Big)^7(\sqrt{-1})^7-$$
$$\frac{1.2.5.8.11.14.17.20}{3.6.9.12.15.18.21.24}\Big(\frac{b}{a}\Big)^8(\sqrt{-1})^8+..\Big\}$$

Mit Rücksicht auf das Nr. 14. β) über die verschiedenen Potenzen von $\sqrt{-1}$ Gesagte, erhalten wir hieraus:

$$A = a^{1/3}\Big\{1+\tfrac{1}{3}\frac{b}{a}\sqrt{-1}+\frac{1.2}{3.6}\Big(\frac{b}{a}\Big)^2-\frac{1.2.5}{3.6.9}\Big(\frac{b}{a}\Big)^3\sqrt{-1}-\frac{1.2.5.8}{3.6.9.12}\Big(\frac{b}{a}\Big)^4$$
$$+\frac{1.2.5.8.11}{3.6.9.12.15}\Big(\frac{b}{a}\Big)^5\sqrt{-1}+\frac{1.2..14}{3.6..18}\Big(\frac{b}{a}\Big)^6-\frac{1.2..17}{3.6..21}\Big(\frac{b}{a}\Big)^7\sqrt{-1}-$$
$$\frac{1.2..20}{3.6..24}\Big(\frac{b}{a}\Big)^8+\ldots\Big\}$$

Daher ist:

$$B = a^{1/3}\Big\{1-\tfrac{1}{3}\Big(\frac{b}{a}\Big)\sqrt{-1}+\frac{1.2}{3.6}\Big(\frac{b}{a}\Big)^2+\frac{1.2.5}{3.6.9}\Big(\frac{b}{a}\Big)^3\sqrt{-1}-$$
$$\frac{1.2.5.8}{3.6.9.12}\Big(\frac{b}{a}\Big)^4-\frac{1.2..11}{3.6..15}\Big(\frac{b}{a}\Big)^5\sqrt{-1}+\frac{1.2..14}{3.6..18}\Big(\frac{b}{a}\Big)^6+$$
$$\frac{1.2..17}{3.6..21}\Big(\frac{b}{a}\Big)^7\sqrt{-1}-\frac{1.2..20}{3.6..24}\Big(\frac{b}{a}\Big)^8-\ldots\Big\}$$

Folglich ist, wenn $a =$ oder $> b$

$$A+B = 2a^{1/3}\Big\{1+\frac{1.2}{3.6}\Big(\frac{b}{a}\Big)^2-\frac{1.2.5.8}{3.6.9.12}\Big(\frac{b}{a}\Big)^4+\frac{1.2..14}{3.6..18}\Big(\frac{b}{a}\Big)^6-$$
$$\frac{1.2..20}{3.6..24}\Big(\frac{b}{a}\Big)^8+\frac{1.2..26}{3.6..30}\Big(\frac{b}{a}\Big)^{10}-\ldots\Big\}$$

oder, wenn wir diesem Ausdruck eine für die Anwendung bequemere Form geben, so ist:

$$A+B = 2a^{1/3}\Big\{1+\frac{1.2}{3.6}\Big(\frac{b}{a}\Big)^2-\frac{5.8}{9.12}\Big(\frac{b}{a}\Big)^2A_1+\frac{11.14}{15.18}\Big(\frac{b}{a}\Big)^2A_2-$$
$$\frac{17.20}{21.24}\Big(\frac{b}{a}\Big)^2A_3+\frac{23.26}{27.30}\Big(\frac{b}{a}\Big)^2A_4-\ldots\Big\}$$

Wenn aber $b > a$, so forme man den gegebenen Ausdruck in folgenden um:

Digitized by Google

$$a+b\sqrt{-1}=b\sqrt{-1}(1-\frac{a}{b}\sqrt{-1}) \text{ und}$$

$$(a-b\sqrt{-1})=b\sqrt{-1}\left\{-(1+\frac{a}{b}\sqrt{-1})\right\}; \text{ alsdann wird}$$

$$(a+b\sqrt{-1})^{1/3}=(b\sqrt{-1})^{1/3}.(1-\frac{a}{b}\sqrt{-1})^{1/3} \text{ und}$$

$$(a-b\sqrt{-1})^{1/3}=(b\sqrt{-1})^{1/3}\left\{-(1+\frac{a}{b}\sqrt{-1})^{1/3}\right\}.$$

In diesem Falle ist:

$$A=(b\sqrt{-1})^{1/3}\left(1-1/3\frac{a}{b}\sqrt{-1}+\frac{1.2}{3.6}\left(\frac{a}{b}\right)^2+\frac{1.2.5}{3.6.9}\left(\frac{a}{b}\right)^3\sqrt{-1}-\frac{1.2.5.8}{3.6.9.12}\left(\frac{a}{b}\right)^4+\ldots\right)$$

$$B=(b\sqrt{-1})^{1/3}\left\{-\left(1+1/3\frac{a}{b}\sqrt{-1}+\frac{1.2}{3.6}\left(\frac{a}{b}\right)^2-\frac{1.2.5}{3.6.9}\left(\frac{a}{b}\right)^3\sqrt{-1}-\frac{1.2.5.8}{3.6.9.12}\left(\frac{a}{b}\right)^4+\ldots\right)\right\}$$

$$A+B=2(b\sqrt{-1})^{1/3}\left\{-1/3\frac{a}{b}\sqrt{-1}+\frac{1.2.5}{3.6.9}\left(\frac{a}{b}\right)^3\sqrt{-1}-\frac{1.2..11}{3.6..15}\left(\frac{a}{b}\right)^5\sqrt{-1}+\frac{1.2..17}{3.6..21}\left(\frac{a}{b}\right)^7\sqrt{-1}..\right\}$$

$$=-2(b\sqrt{-1})^{1/3}.(\sqrt{-1})\left\{1/3\frac{a}{b}-\frac{1.2.5}{3.6.9}\left(\frac{a}{b}\right)^3+\frac{1.2..11}{3.6..15}\left(\frac{a}{b}\right)^5+\frac{1.2..17}{3.6..21}\left(\frac{a}{b}\right)^7+\ldots\right\}$$

Nun ist $(\sqrt{-1})^{1/3}.(\sqrt{-1})^1=\sqrt[3]{(\sqrt{-1})^4}=\sqrt[3]{+1}=+1$; daher ist auch:

$$A+B=-2b^{1/3}\left\{1/3\frac{a}{b}-\frac{2.5}{6.9}\left(\frac{a}{b}\right)^2A_1+\frac{8.11}{12.15}\left(\frac{a}{b}\right)^2A_2-\frac{14.17}{18.21}\left(\frac{a}{b}\right)^2A_3+\frac{20.23}{24.27}\left(\frac{a}{b}\right)^2A_4\ldots\right\}$$

25. Aus jedem 1 eines zu p% auf Zinsen stehenden Capitals wird am Ende des ersten Jahres mit den Zinsen $1+\frac{p}{100}$; am Ende des zweiten Jahres $\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$, also am Ende des n^{ten} Jahres mit Zinseszinsen

Digitized by Google

$$\left(1+\frac{p}{100}\right)^n = 1+\frac{n}{100}p+\frac{n-1}{200}pA_1+\frac{n-2}{300}pA_2+\frac{n-3}{400}pA_3+\ldots.$$

Setzt man für p und n bestimmte Werthe, so kann die Berechnung nach vorstehender Formel geschehen, ohne sich der Logarithmen bedienen zu müssen. Für $n = 10$, $p = 5$ wird:

$$(1+0{,}05)^{10} = 1+0{,}5+0{,}1125+0{,}015+0{,}0013125+0{,}0000788 +0{,}0000033+\ldots = 1{,}6288946.$$

Hiernach würde also ein Capital von 1000 Mark in 10 Jahren zu 5 % mit Zinseszinsen auf 1628,89 Mark anwachsen.

Eigenschaften der Binomial-Coefficienten.

(Heis §. 93.)

§. 472. 1. Da die Zahlen 1, n, $\frac{n(n-1)}{1.2}$, $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ u. s. w., welche wir durch die Symbole

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}, \binom{n}{4}, \binom{n}{5} \text{ u. s. w.}$$

darzustellen pflegen, in der allgemeinen Entwickelung der Potenz eines Binoms, als Coefficienten der aus den Bestandtheilen des Binoms gebildeten Produkte auftreten, so führen sie auch den Namen: „Binomial-Coefficienten".

Da der Ausdruck $(a \pm b)^n$ ebenso aus b wie aus a zusammengesetzt ist, so muß dieses auch bei seiner Entwickelung der Fall sein; wenn diese Entwickelung also ein Glied von der Form $Ka^{n-r}b^r$ enthält, so muß sie auch ein anderes Glied von der Form $Ka^r b^{n-r}$ enthalten. Diese beiden Glieder sind aber offenbar von den beiden Endgliedern gleich weit entfernt; denn da die Anzahl der Glieder, welche irgend einem Gliede vorangehen, durch den Exponenten von b in diesem Gliede ausgedrückt wird, so folgt daraus, daß der dem Gliede $Ka^{n-r}b^r$ vorangehenden Glieder r sind, und daß $n - r$ Glieder dem Gliede $Ka^r b^{n-r}$ vorhergehen und r Glieder folgen, weil die Anzahl der Glieder $= n + 1$ ist. Mithin haben in der Entwickelung jeder Potenz eines Binoms zwei Glieder gleiche Coefficienten, wenn sie vom Anfangs- und Endgliede um eine gleiche Anzahl Glieder abstehen; und weil in diesem Falle ihre Zeigersummen sich zur Basis ergänzen, so kann man auch sagen: Binomial-Coefficienten von derselben Basis sind einander gleich, wenn

Digitized by Google

ihre Zeigersummen gleich der Basis sind. Dies ergibt sich auch schon aus §. 455. 9, wonach

$$C(n)_r = C(n)_{n-r} \text{ oder } \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \text{ ist.}$$

2. Nun wird $\binom{n}{r}$ der r^{te} Binomial-Coefficient genannt; er ist aber in der That der Coefficient des $(r+1)^{ten}$ Gliedes der Reihe, während der Coefficient des r^{ten} Gliedes $= \binom{n}{r-1}$ ist. Nach §. 464 kann jeder Binomial-Coefficient als ein Produkt betrachtet werden, dessen erster Faktor der zunächst vorhergehende ist. Demgemäß ist:

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{r-1} \cdot \frac{n-r+1}{r}; \text{ folglich ist:}$$

$$\binom{n}{r-1} = \binom{n}{r} : \frac{n-r+1}{r} = \binom{n}{r} \cdot \frac{r}{n-r+1}.$$

Hieraus ergibt sich, daß man den $(r-1)^{ten}$ Binomial-Coefficienten aus dem r^{ten} findet, indem man letztern durch $\frac{n-r+1}{r}$ dividirt oder mit dem reciproken Werthe von $\frac{n-r+1}{r}$ also mit $\frac{r}{n-r+1}$ multiplicirt.

3. Setzt man in $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ $r = 0$, so wird:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n}.$$

Nun ist: $\binom{n}{n} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1}{1.2.3\ldots(n-2)(n-1).n} = 1;$

folglich ist: $\alpha) \binom{n}{0} = 1.$

In der Binomialreihe ist $\binom{n}{0}$ der Coefficient des ersten Gliedes und wird derselbe der nullte Binomial-Coefficient genannt. Auch ist, wie aus vorstehendem sich ergibt

$$\beta) \binom{n}{n} = 1.$$

Bei der symbolischen Darstellung der Binomial-Coefficienten läßt man die Zeiger in der natürlichen Reihenfolge von 0, 1, 2 ... bis n fortschreiten. Da nun das erste Glied 0, das zweite 1, das dritte 2, also das r^{te} Glied $(r-1)$

Digitized by Google

zum Zeiger hat, so folgt hieraus, daß man, um den Zeiger eines beliebigen Gliedes zu finden, von der Ordnungszahl 1 zu subtrahiren hat.

Wie aus β) folgt, hat das Symbol $\binom{n}{n}$, wenn also der Zeiger der Basis gleich ist, den Werth 1; folglich muß, wenn der Zeiger größer ist, als die Basis, der Coefficient verschieden oder gleich 0 werden, weil alsdann im Dividend der Faktor Null vorkommt. Denn ist der n^{te} Binomial-Coefficient $\binom{n}{n}$, so muß der $(n+1)^{te}$ gleich

$$\binom{n}{n} \cdot \frac{n-n}{n+1} = 0 \text{ sein; daher ist:}$$

$$\gamma) \quad \binom{n}{n+1} = \binom{n}{n+2} = 0.$$

Hieraus folgt auch, daß es in der Binomialreihe kein $(n+2)^{tes}$ Glied geben kann.

4. Setzt man also den Zeiger $= n+m$, wobei $m > 0$ angenommen wird, so ist:

$$\alpha) \quad \binom{n}{n+m} = 0.$$

Weil nun nach Nr. 1

$$\binom{n}{n+m} = \binom{n}{-m},$$

so muß auch $\beta) \binom{n}{-m} = 0$ sein; d. h. der Binomial-Coefficient ist gleich Null, wenn der Zeiger negativ ist.

5. α) Für die Summen aller, einem ganzen positiven Exponenten angehörenden, Binomial-Coefficienten läßt sich ein einfacher Ausdruck angeben. Denn setzt man in der entwickelten Reihe

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \ldots$$

$a = 1$ und $b = 1$, so verwandelt sie sich in

$$(1+1)^n = 2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \binom{n}{4} + \ldots \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}.$$

Demnach ist die Summe aller Binomial-Coefficienten für den Exponenten n gleich 2^n, ein Satz, welcher zwar für jeden Werth von n gilt; allein sobald n keine ganze positive Zahl ist, die Summirung einer unendlichen Reihe darstellt.

Digitized by Google

5. β) Dagegen geben die Binomial-Coefficienten, nach der Reihe mit wechselnden Zeichen genommen, Null zur Summe. Denn es ist, wenn in obiger Formel a den Werth $+1$ und b den Werth -1 erhält

$$(1-1)^n = 0 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \binom{n}{4} - \ldots \pm \binom{n}{n}.$$

Beide Sätze α) und β) ergeben sich aber auch noch aus folgenden Gründen: Bildet man aus zwei Elementen die Variationen zur n^{ten} Classe mit Wiederholung, so ist nach §. 456. 20 die Zahl der auf diese Weise entstandenen Complexionen ${}^{w}V_{n}(2) = 2^n$.

Haben nun beide Elemente abwechselnde Zeichen, so ist die eine Hälfte der Complexionen positiv und die andere negativ; ihre Summe muß mithin $\frac{1}{2}2^n - \frac{1}{2}2^n = 0$ sein.

6. Nach §. 458:31. beträgt die Anzahl der Combinationen aller Classen aus den Elementen $a^m\, b^m\, c^o\, d^p\, e^q\, f^r \ldots$

$$(m+1)(n+1)(0+1)(p+1)(q+1)(r+1) - 1.$$

Da nun bei den Combinationen ohne Wiederholung in einer Form jedes Element nur einmal vorkommen darf, so muß für diese $m = n = o = p = q = r = 1$ sein. Ist also die Anzahl der Elemente n, so ist die Summe aller möglichen Formen, wenn wir dieselbe mit S bezeichnen:

$$S = \{(1+1)(1+1)(1+1)(1+1)\ldots.\}^n - 1$$
$$= (2.2.2.2\ldots)^n - 1 = 2^n - 1.$$

7. Nach §. 455. 8 und 10 ist:

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(r-1))}{1.2.3\ldots.r}$$

$$\binom{n}{r+1} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(r-1))(n-r)}{1.2.3\ldots.r(r+1)}.$$

Damit der Werth für $\binom{n}{r}$ denselben Divisor erhalte, wie derselbe für $\binom{n}{r+1}$ ist, multiplicire man ersteren im Dividend und Divisor mit $(r+1)$ und addire alsdann die beiden Gleichungen, so wird:

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \frac{\{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(r-1)\}\,\{(n-r)+(r+1)\}}{1.2.3\ldots.r(r+1)}$$
$$= \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)\ldots(n-(r-1))}{1.2.3.4\ldots.(r+1)}$$
$$= \binom{n+1}{r+1},$$

d. h. in Worten: Der $(r+1)^{te}$ Binomial-Coefficient der

Digitized by Google

$(n+1)^{ten}$ Potenz ist gleich der Summe des r^{ten} und des $(r+1)^{ten}$ Binomial-Coefficienten der n^{ten} Potenz. Die für jeden Werth von n geltende Gleichung

$$\binom{n+1}{r+1}=\binom{n}{r}+\binom{n}{r+1}$$

kann in dem Falle, wenn für n blos ganze positive Werthe gesetzt werden, zur Verfertigung einer Tabelle der Binomial-Coefficienten mit Vortheil gebraucht werden. Als Beispiel mag hier der Anfang einer solchen Tabelle dienen. Die römischen Ziffern deuten den Grad der Potenz an:

0						1						
I					1		1					
II				1		2		1				
III			1		3		3		1			
IV		1		4		6		4		1		
V	1		5		10		10		5		1	
VI		1		6		15		20		15		6		1
VII	1		7		21		35		35		21		7		1
VIII		1		8		28		56		70		56		28		8		1
IX	1		9		36		84		126		126		84		36		9		1
X		1		10		45		120		210		252		210		120		45		10		1
XI	1		11		55		165		330		462		462		330		165		55		11		1
XII	1	12		66		220		495		792		924		792		495		220		66		12		1

Jede Zahl dieser Tabelle entsteht, wenn man die über ihr stehende zu der dieser letztern vorangehenden addirt. Z. B. $66=55+11$; $220=165+55$ u. s. w.

8. Nach dem vorigen Satze ist:

$$\binom{n+1}{r+1}=\binom{n}{r}+\binom{n}{r+1}$$
$$\binom{n}{r+1}=\binom{n-1}{r}+\binom{n-1}{r+1}$$
$$\binom{n-1}{r+1}=\binom{n-2}{r}+\binom{n-2}{r+1}$$
$$\binom{n-2}{r+1}=\binom{n-3}{r}+\binom{n-3}{r+1}$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

Addirt man diese Gleichungen, so wird:

$$\binom{n+1}{r+1}+\binom{n}{r+1}+\binom{n-1}{r+1}+\binom{n-2}{r+1}+\ldots=\binom{n}{r}+\binom{n}{r-1}+$$
$$\binom{n-1}{r}+\binom{n-1}{r+1}+\binom{n-2}{r}+\binom{n-2}{r+1}+\ldots+\binom{n-n}{r}.$$

Digitized by Google

Subtrahire von beiden Seiten dieser Gleichung die gleichen Glieder, so resultirt:

$$\binom{n+1}{r+1}=\binom{n}{r}+\binom{n-1}{r}+\binom{n-2}{r}+\binom{n-3}{r}+\ldots+\binom{n-n}{r}.$$

Dieser Satz heißt in Worten: Der $(r+1)^{te}$ Binomial-Coefficient der $(n+1)^{ten}$ Potenz ist gleich der Summe aller r^{ten} Binomial-Coefficienten aller vorhergehenden niedrigeren Potenzen. Ist z. B. $n=9$, $r=3$, so ist:

$$\binom{10}{4}=\binom{9}{3}+\binom{8}{3}+\binom{7}{3}+\binom{6}{3}+\binom{5}{3}+\binom{4}{3}+\binom{3}{3} \text{ oder}$$

$$210=84+56+35+20+10+4+1.$$

9. Soll die Reihe

$$a^m+b^m+c^m+d^m+\ldots+p^m+q^m,$$

wo a, b, c, d ... p, q die verschiedenen Glieder einer arithmetischen Reihe sind, summirt werden, so hat man, wenn δ die Differenz je zweier auf einander folgenden Glieder dieser Reihe bezeichnet, nach dem binomischen Satze:

$$b^m=(a+\delta)^m=a^m+\binom{m}{1}a^{m-1}\delta+\binom{m}{2}a^{m-2}\delta^2+\ldots$$

$$c^m=(b+\delta)^m=b^m+\binom{m}{1}b^{m-1}\delta+\binom{m}{2}b^{m-2}\delta^2+\ldots$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$q^m=(p+\delta)^m=p^m+\binom{m}{1}p^{m-1}\delta+\binom{m}{2}p^{m-2}\delta^2+\ldots$$

Addirt man diese Gleichungen und bezeichnet die Summe der m^{ten}, $(m-1)^{ten}$ .... Potenzen bezüglich mit Σ_m, Σ_{m-1} ... Σ_2, Σ_1, so erhält man:

$$\Sigma_m-a^m=\Sigma_m-q^m+\binom{m}{1}\delta(\Sigma_{m-1}-q^{m-1})+$$

$$\binom{m}{2}\delta^2(\Sigma_{m-2}-q^{m-2})+\ldots$$

oder reducirt:

$$q^m-a^m=\binom{m}{1}\delta(\Sigma_{m-1}-q^{m-1})+\binom{m}{2}\delta^2(\Sigma_{m-2}-q^{m-2})+\ldots.(A).$$

Diese Gleichung (A) enthält die Summe der Potenzen von Σ_{m-r} bis Σ_0 einschließlich, wo $\Sigma_0=a^0+b^0+c^0+d^0+\ldots+p^0+q^0=n$ ist.

Setzen wir in A nach einander $m=1, 2, 3, 4\ldots$, so findet man für $m=1$:

Digitized by Google

1) $q-a=\delta(\Sigma_0-q^0)$; folglich $\Sigma_0=\frac{q-a}{\delta}+1$.

Weil nun $q=a+(n-1)\delta$ ist, so wird:

$$\Sigma_0=\frac{(n-1)\delta+\delta}{\delta}=n,$$

was schon bekannt war.

2) Für $m=2$ erhalten wir aus A:

$q^2-a^2=2\delta(\Sigma_1-q)+\delta^2(\Sigma_0-q^0)$; folglich

$$\Sigma_1-q=\frac{q^2-a^2}{2\delta}-\frac{\delta(q-a)}{2\delta};\text{ also}$$

$$\Sigma_1=\frac{q^2-a^2}{2\delta}+\frac{\delta(q+a)}{2\delta}=\frac{(q+a)(q-a+\delta)}{2\delta}\text{ oder}$$

wegen $q=a+(n-1)\delta$, also $q-a+\delta=n\delta$

$$\Sigma_1=\frac{(q+a)n\delta}{2\delta}=\frac{(q+a)n}{2},$$

was ebenfalls schon aus §. 405. 2 bekannt war.

3) Für $m=3$ resultirt aus A:

$$q^3-a^3=3\delta(\Sigma_2-q^2)+3\delta^2(\Sigma_1-q^1)+\delta^3(\Sigma_0-q^0).$$

4) Für $m=4$ erhält man aus A:

$$q^4-a^4=4\delta(\Sigma_3-q^3)+6\delta^2(\Sigma_2-q^2)+4\delta^3(\Sigma_1-q^1)+\delta^4(\Sigma_0-q^0).$$

5) Für $m=5$ ergibt sich aus A:

$$q^5-a^5=5\delta(\Sigma_4-q^4)+10\delta^2(\Sigma_3-q^3)+10\delta^3(\Sigma_2-q^2)+5\delta^4(\Sigma_1-q^1)+\delta^5(\Sigma_0-q^0).$$

Hieraus ergibt sich, daß die Summe der gleich hohen Potenzen einer bestimmten Anzahl von Gliedern immer vermittelst der Summe der niedrigeren Potenzen gefunden werden kann.

Soll nun die Summe der Quadrate, Cuben und Biquadrate der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ... n gesucht werden, so hat man nach den vorhergehenden Formeln, wenn $a=1$, $\delta=1$, $q=n$, $\Sigma_0=n$ gesetzt wird:

$$1)\ \Sigma_1=\frac{(n+1)n}{2}=\frac{n(n+1)}{1.2}.$$

2) $n^3-1=3(\Sigma_2-n^2)+3(\Sigma_1-n^1)+(\Sigma_0-n^0)$; folglich

$$\Sigma_2=n^2+\frac{n^3-1}{3}-\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n-1}{3}=\tfrac{1}{6}(2n^3+3n^2+n),\text{ oder}$$

$$\Sigma_2=\tfrac{1}{6}\{n(n+1)(2n+1)\}=\tfrac{1}{3}(2n+1).\Sigma_1.$$

3) $n^4-1=4(\Sigma_3-n^3)+6(\Sigma_2-n^2)+4(\Sigma_1-n^1)+(\Sigma_0-n^0)$; also

Digitized by Google

$$\Sigma_3 = n^3 + \frac{n^4-1}{4} - \frac{2n^3-3n^2+n}{4} - \frac{n(n-1)}{2} - \frac{n-1}{4}$$

$$= \frac{n^4+2n^3+n^2}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = (\Sigma_1)^2.$$

4) $n^5-1 = 5(\Sigma_4-n^4)+10(\Sigma_3-n^3)+10(\Sigma_2-n^2)+5(\Sigma_1-n^1)+(\Sigma_0-n^0)$;

$$\Sigma_4 = \frac{n^5-1}{5}+n^4+2n^3+2n^2+n-2\Sigma_3-2\Sigma_2-\Sigma_1-\frac{\Sigma_0-1}{5}$$

$$= \frac{n^5-1}{5}+n^4+2n^3+2n^2+n-\frac{2n^2(n+1)^2}{4}-\frac{2n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$-\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n-1}{5}$$

$$= {}^1/_{30}n(6n^4+15n^3+10n^2-1) = {}^1/_{30}(n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)$$

$$= {}^1/_{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$$

$$= {}^1/_5(3n^2+3n-1).\Sigma_2.$$

Figurirte Zahlen.

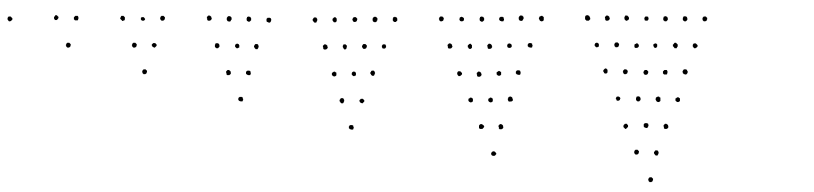
(Heis §. 93.)

§. 473. Wenn man aus der Reihe der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4... eine neue Reihe bildet und zwar so, daß man die ersten zwei, drei, vier, fünf Glieder u. s. w. summirt, so entsteht die Reihe

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78 u. s. w.,

worin die einzelnen Glieder dreieckige oder Trigonalzahlen heißen, weil sich so viele Punkte als eine solche Zahl Einheiten hat, durch ein Dreieck darstellen lassen

1 3 6 10 15 21 28



Die Anzahl der in einer Seitenreihe stehenden Punkte wird die Seite der dreieckigen Zahl genannt.

Werden in der Reihe, deren Differenz 2 ist, nämlich

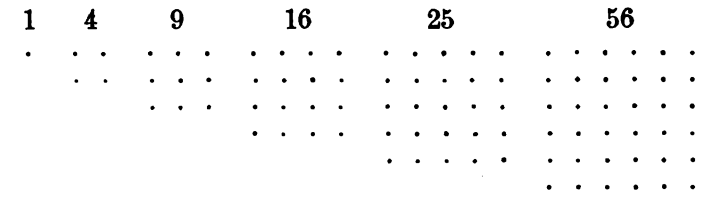
1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 ....

Digitized by Google

die ersten zwei, drei, vier, fünf Glieder u. s. w. addirt, so entsteht folgende Reihe (§. 67)

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 . . .,

worin die Glieder viereckige oder Tetragonalzahlen heißen, weil aus ihren Einheiten, als Punkte betrachtet, Quadrate gebildet werden können, z. B.



Die Quadratwurzeln dieser Zahlen heißen ihre Seiten.

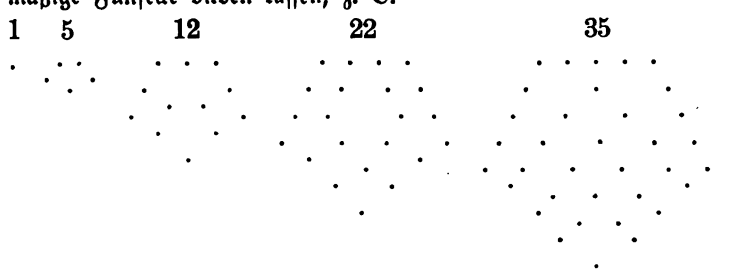
Nimmt man in der Reihe, worin die Differenz 3 ist,

1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25 . . .

dieselbe Operation der Summirung der Glieder vor, so erhalten wir die Reihe:

1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92 . . . .

worin die einzelnen Glieder fünfeckige oder Pentagonalzahlen heißen, weil aus der Anzahl ihrer Einheiten sich regelmäßige Fünfecke bilden lassen, z. B.



Auf gleiche Weise entsteht aus der Hauptreihe

1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33 . . . .,

worin die Differenz 4 beträgt, folgende abgeleitete Reihe:

1, 6, 15, 28, 45, 66, 91, 120, 153, 190 . . . .,

worin die Glieder sechseckige oder Hexagonalzahlen genannt werden, weil sich aus ihnen regelmäßige Sechsecke bilden lassen.

Wegen dieser, den bisherigen Zahlen gemeinsamen Eigenschaft, daß ihre Einheiten in die Form regelmäßiger Vielecke gestellt werden können, hat man ihnen den gemeinschaftlichen Namen: figurirte Zahlen oder Polygonalzahlen gegeben.

Digitized by Google

§. 474. Bestimmung des n^{ten} Gliedes und des Summengliedes in der Reihe der figurirten Zahlen. Ist die Seite $= n$, so ist die ihr angehörige Dreieckszahl $=$

$$1+2+3+4+5+\ldots+n$$

und die Summe dieser Zahlen, welche das Dreieck ausmachen, beträgt $\frac{1}{2}n(n+1)$ nach §. 405. 2.

Indessen läßt sich die Summe der natürlichen Zahlen auch auf folgende Weise finden. Es sei:

$$\Sigma_1 = 1+2+3+4+5+6+\ldots+n$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} 1&=1\\ 2&=1+1\\ 3&=1+1+1\\ 4&=1+1+1+1\\ &\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ &\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ n&=1+1+1+1\ldots+1. \end{aligned}$$

Daher ist:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= 1.n+1(n-1)+1(n-2)+1(n-3)+\ldots 1(n-(n-1))\\ &= n(1+1+1+\ldots+1)-(1+2+3+4+\ldots+(n-1))\\ &= n.n-(\Sigma_1-n) = n(n+1)-\Sigma_1;\ \text{daher}\\ 2\Sigma_1 &= n(n+1);\ \text{also}\ \Sigma_1 = \tfrac{1}{2}n(n+1)\ \text{wie oben.} \end{aligned}$$

§. 475. Um die Summe der Dreieckszahlen, deren n^{tes} Glied $\frac{1}{2}n(n+1)$ ist, zu finden, sei:

$$\Sigma_2 = 1+3+6+10+15+\ldots+\tfrac{1}{2}n(n+1).$$

Zerlegt man jede Dreieckszahl in die Summe der natürlichen Zahlen, deren Summe sie ist, so erhält man:

$$\begin{aligned} 1&=1\\ 3&=1+2\\ 6&=1+2+3\\ 10&=1+2+3+4\\ &\cdot\quad\cdot\\ &\cdot\quad\cdot \end{aligned}$$

$\frac{1}{2}n(n+1) = 1+2+3+4+5+6+\ldots+n$. Es ist also

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &= 1.n+2(n-1)+3(n-2)+4(n-3)+\ldots+n(n-(n-1))\\ &= n(1+2+3+4\ldots n)-\{1.2+2.3+3.4+4.5+\ldots+(n-1)n\}. \end{aligned}$$

Hierin ist die Reihe $1+2+3+4\ldots+n$ die Summe der n ersten natürlichen Zahlen oder die n^{te} Dreieckszahl. Der zweite Theil des Ausdrucks für Σ_2, der vom ersten subtrahirt werden muß, besteht aus den doppelten Dreieckszahlen von der ersten bis zur $(n-1)^{ten}$; mithin ist dieser zweite Theil $= 2(\Sigma_2 - \frac{1}{2}n(n+1))$; daher ist also:

Digitized by Google

$$\Sigma_2 = n.\tfrac{1}{2}n(n+1) - 2\{\Sigma_2 - \tfrac{1}{2}n(n+1)\}$$
$$= \tfrac{1}{2}n(n+1)(n+2) - 2\Sigma_2; \text{ daher}$$
$$3\Sigma_2 = \tfrac{1}{2}n(n+1)(n+2); \text{ also}$$
$$\Sigma_2 = \tfrac{1}{6}n(n+1)(n+2).$$

Die Summe der Dreieckszahlen heißen Pyramidalzahlen, weil aus ihren Einheiten, wenn diese gleich große Kugeln sind, pyramidenförmige Haufen gebildet werden können und zwar so, daß die Zahlen der in jeder Schichte befindlichen Kugeln von der Spitze an gerechnet wachsen, wie die Dreieckszahlen. Die Pyramidalzahlen bilden demnach die Reihe

$$1, 4, 10, 20, 35, 56 \ldots\ldots \tfrac{1}{6}n(n+1)(n+2).$$

§. 476. Nun sei Σ_3 die Summe der Pyramidalzahlen, deren Anzahl n ist, so daß

$$\Sigma_3 = 1 + 4 + 10 + 20 + 35 + \ldots + \tfrac{1}{6}n(n+1)(n+2).$$

Man zerlege jede Pyramidalzahl in die Dreieckszahlen, deren Summe sie ist, so hat man:

$$1 = 1$$
$$4 = 1 + 3$$
$$10 = 1 + 3 + 6$$
$$20 = 1 + 3 + 6 + 10$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$\tfrac{1}{6}n(n+1)(n+2) = 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + \ldots + \tfrac{1}{2}n(n+1); \text{ daher ist}$$
$$\Sigma_3 = 1.n + 3(n-1) + 6(n-2) + 10(n-3) + \ldots + \tfrac{1}{2}n(n+1)(n-(n-1))$$
$$= n\{1 + 3 + 6 + 10 + \ldots + \tfrac{1}{2}n(n+1)\} -$$
$$\{1.3 + 2.6 + 3.10 + 4.15 + \ldots + \tfrac{1}{2}(n-1).\tfrac{1}{2}n(n+1)\}.$$

Nun ist $1 + 3 + 6 + 10 + \ldots + \tfrac{1}{2}n(n+1)$ die Reihe der n ersten Dreieckszahlen, deren Summe die n^{te} Pyramidalzahl oder $\tfrac{1}{6}n(n+1)(n+2)$ ist. Die hiervon zu subtrahirende Reihe besteht aus dem Dreifachen der $(n-1)$ ersten Pyramidalzahlen, ihre Summe ist mithin $3\{\Sigma_3 - \tfrac{1}{6}n(n+1)(n+2)\}$; daher ist:

$$\Sigma_3 = n.\tfrac{1}{6}n(n+1)(n+2) - 3\{\Sigma_3 - \tfrac{1}{6}n(n+1)(n+2)\}$$
$$= \tfrac{1}{6}n(n+1)(n+2)(n+3) - 3\Sigma_3; \text{ daher}$$
$$4\Sigma_3 = \tfrac{1}{6}n(n+1)(n+2)(n+3); \text{ folglich}$$
$$\Sigma_3 = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}.$$

Diesen Zahlen entspricht nicht, wie den Dreiecks- und Pyramidalzahlen ein Schema in der Natur; man nennt sie figurirte Zahlen der vierten Ordnung. Nämlich die natürlichen Zahlen heißen figurirte Zahlen der ersten Ordnung. Die Dreieckszahlen, welche die Summen der natürlichen Zahlen sind, heißen figurirte

Digitized by Google

Zahlen der zweiten Ordnung. Die Pyramidalzahlen, welche die Summe der Dreieckszahlen sind, heißen figurirte Zahlen der dritten Ordnung. Die Zahlen, welche die Summen der Pyramidalzahlen oder der figurirten Zahlen der dritten Ordnung sind, heißen figurirte Zahlen der vierten Ordnung. Die Summen der figurirten Zahlen der vierten Ordnung machen die figurirten Zahlen der fünften Ordnung aus und im Allgemeinen machen die Summen der figurirten Zahlen der m^{ten} Ordnung die figurirten Zahlen der $(m+1)^{ten}$ Ordnung aus. Die figurirten Zahlen der 4ten Ordnung sind also:

$$1, 5, 15, 35, 70, 126, \ldots . \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}.$$

Auf ähnliche Weise findet man, daß der Ausdruck einer figurirten Zahl der fünften Ordnung $= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1.2.3.4.5}$ ist, so daß also die figurirten Zahlen der fünften Ordnung folgende sind:

$$1, 6, 21, 56, 126, 252, \ldots \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1.2.3.4.5}.$$

§. 477. Auflösungen der Beispiele in Heis §. 93 von Beisp. 11 bis 20.

11. Eine besondere interessante Anwendung hat die Lehre von den figurirten Zahlen auf die Berechnung der Menge der sich in regelmäßig geschichteten Kugelhaufen befindlichen Kugeln in den Zeughäusern. Die Kugeln werden gewöhnlich in Pyramiden oder in länglichen zeltförmigen Haufen aufgeschichtet. Im ersten Falle sind die Pyramiden entweder drei- oder vierseitig. Liegen in der obersten Schicht oder Spitze 1, in der zweiten 3, in der dritten 6, in der vierten Schicht 10 Kugeln u. s. w., so schreiten diese Zahlen als Dreiecks-zahlen für die folgenden Schichten fort und eine auf diese Weise gebildete Pyramide ist eine dreiseitige. Jede Schichte derselben bildet ein gleichseitiges Dreieck. Das Dreieck, welches die Spitze bildet, hat zur Seite 1, das zweite 2, das dritte 4, also das zwanzigste, welches die Grundfläche bildet, hat zur Seite 20 Kugeln. Es liegen daher von der Spitze nach der Grundfläche hin gerechnet, in jeder Seite des Dreiecks so viel Kugeln, als in der so vielten Schicht das Dreieck liegt. Berechnen wir nun den Inhalt jeder Schichte, so erhalten wir, da jede Schichte die Summe der natürlichen Zahlen bezüglich 1 bis 20, von 1 bis 19 u. s. w. ausmacht, für die einzelnen Schichten von der Spitze an gerechnet, folgende Dreieckszahlen:

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91, 105, 120, 136, 153, 171, 190, 210.

Digitized by Google

Folglich enthält die Grundfläche oder die 20. Schichte der Pyramide 210 Kugeln. Addiren wir nun die in allen 20 Schichten befindlichen Kugeln, so erhalten wir als Summe derselben 1540 Kugeln.

Nach der in §. 474 gefundenen Formel beträgt die Anzahl der Kugeln in der n^{ten} Schicht $\frac{1}{2}n(n+1)$ und nach §. 475 in allen n Schichten $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$. Setzen wir in erstere Formel für $n = 1, 2, 3 \ldots 20$, so erhalten wir obige Dreieckszahlen und setzen wir für $n = 20$ in die zweite Formel, so erhalten wir die Anzahl sämmtlicher Kugeln gleich $\frac{20.21.22}{1.2.3} = 1540$.

12. Hier ist die Kugelpyramide eine abgekürzte dreiseitige. Wäre dieselbe vollständig, so enthielten die m Schichten nach §. 475 in der ganzen Pyramide $\frac{1}{6}m(m+1)(m+2)$ Kugeln. Es fehlen aber diesem Kugelhaufen $(n-1)$ Schichten, weil auf jeder Seite in der höchsten Schicht n Kugeln liegen. Ein dreieckiger Kugelhaufen von $(n-1)$ Schichten enthält $\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)$ Kugeln, welche Formel man erhält, wenn man in die Summenformel für n Schichten, $(n-1)$ statt n setzt; daher enthält die abgestumpfte Pyramide:
$\frac{1}{6}m(m+1)(m+2) - \frac{1}{6}(n-1)n(n+1)$ Kugeln.
Z. B. für $m = 20$ und $n = 10$ beträgt die Anzahl der Kugeln in einem solchen Haufen
$\frac{20.21.22}{1.2.3} - \frac{9.10.11}{1.2.3} = 1540 - 165 = 1375$.

13. Folgen auf 1 Kugel an der Spitze in der zweiten Schicht 4, dann 16 u. s. w., so hat man eine vierseitige Kugelpyramide, deren einzelne Schichten die aufeinander folgenden Quadratzahlen der natürlichen von 1 anfangenden Zahlenreihe sind. Da also eine solche Pyramide in den von oben nach unten hin liegenden Schichten 1, 4, 9, 16, 25 ... Kugeln enthält, so ist ihr Inhalt der Summe der Quadratzahlen von 1 bis n^2 gleich. Nach §. 472. 9 ist $\Sigma n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$. Setzen wir hierin $n = 20$, so enthält die Pyramide:

$$\frac{1}{6} . 20 . 21 . 41 = 2870 \text{ Kugeln.}$$

Die Richtigkeit für den Werth von Σn^2 kann noch auf folgende Weise nachgewiesen werden:

Man denke sich die viereckige Pyramide in zwei dreieckige zerlegt, wovon die eine in ihrer Seite eine Kugel weniger hat, als die andere. Besteht jene aus den Schichten mit 1, 4, 9, 16 ... Kugeln, so hat die eine dreieckige eine Seite

Digitized by Google

von 5, die andere eine solche von 4 Kugeln. Wirklich ist auch:

$$1+4+9+16+25=(1+3+6+10+15)+(1+3+6+10) \text{ oder}$$
$$55=35+20$$

Ist also eine Seite der viereckigen Pyramide gleich n, so besteht sie aus 2 dreieckigen Pyramiden, deren Seiten n und $n-1$ sind. Der Inhalt der größern ist $=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$ und der Inhalt der kleinern ist gleich $\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)$; folglich ist der Inhalt der viereckigen gleich oder:

$$S=\tfrac{1}{6}n(n+1)(n+2)+\tfrac{1}{6}(n-1)n(n+1)$$
$$=\tfrac{1}{6}n(n+1)\{(n+2)+(n-1)\}$$
$$=\tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Für $n=20$ enthält die vierseitige Pyramide:

$$\frac{20.21.22}{1.2.3}+\frac{19.20.21}{1.2.3}=1540+1330=2870 \text{ Kugeln.}$$

14. α) Die dritte Art der in Haufen aufgeschichteten Kugeln ist die sogenannte zeltförmige, d. h. seine Grundfläche, als die unterste Schichte, bildet ein Rechteck; die über ihr liegenden Schichten haben je eine Kugel in der Länge und in der Breite weniger, als jede zunächst unter ihr liegende und die oberste Schichte bildet eine Reihe von einzeln neben einander liegenden Kugeln. Hat nun die unterste Schicht in der Länge $m=(m-n+1)+(n-1)$ und in der Breite n Kugeln, wobei $m>n$, so müssen wir die Länge und Breite, so wie den Inhalt der einzelnen Schichten von der untersten anfangend, zu bestimmen suchen. Wir erhalten alsdann, wenn wir vorläufig $m-n+1=x$ setzen.

Länge $x+(n-1)$; Breite n; Inhalt $nx+n(n-1)$
„ $x+(n-2)$; „ $n-1$; „ $(n-1)x+(n-1)(n-2)$;
„ $x+(n-3)$; „ $n-2$; „ $(n-2)x+(n-2)(n-3)$;
„ . . . .
„ . . . .
„ $x+(n-n)$; „ $n-(n-1)$; „ $1.x+1.0$.

Setzt man nun den Inhalt dieses zeltförmigen Kugelhaufens, dessen oberste Kugelreihe x und dessen Schichtenzahl n beträgt, gleich S, so ist derselbe der Summe aus dem Inhalte aller einzelnen Schichten gleich; es ist also:

$$S=\left\{\begin{array}{l}1.x+2x+3x+4x+5x+\ldots.nx\\ \quad +2+6+12+20+\ldots.+n(n-1)\end{array}\right\}$$

Der Werth für S besteht also aus 2 Reihen, wovon die erste aus n, die zweite aus $(n-1)$ Gliedern besteht. Die Summe der ersten Reihe ist nach §. 474 gleich $\frac{1}{2}n(n+1)x$ oder wenn wir den Werth für $x=m-n+1$ einsetzen:

$$\tfrac{1}{2}n(n+1)(m-n+1).$$

Digitized by Google

Um die Summe der zweiten Reihe zu finden, zerlege man dieselbe in:

$$2\{1+3+6+10+..+{}^1/_2n(n-1)\},$$

so ergibt sich, daß die in Klammern stehenden Zahlen die Dreieckszahlen sind, deren hier $(n-1)$ summirt werden sollen. Nach §. 475 beträgt die Summe für n solcher Zahlen ${}^1/_6n(n+1)(n+2)$, also für $n-1$ Zahlen ${}^1/_6(n-1)n(n+1)$, folglich ist der Inhalt des zeltförmigen Kugelhaufens oder

$$\begin{aligned} S &= {}^1/_2n(n+1)(m-n+1)+2.{}^1/_6(n-1)n(n+1)\\ &= {}^1/_6n(n+1)\{3(m-n+1)+2(n-1)\}\\ &= {}^1/_6n(n+1)(3m-n+1). \end{aligned}$$

Der zeltförmig geschichtete Kugelhaufen läßt sich auch in ein schiefes dreieckiges Prisma und in eine viereckige Pyramide zerlegen und nach diesen beiden Bestandtheilen berechnen. Eine dreieckige Seitenfläche des Kugelhaufens enthält ${}^1/_2n(n+1)$ Kugeln. Da nun das Prisma in seiner Länge $(m-n+1)-1=m-n$ Kugeln hat, so ist sein Inhalt ${}^1/_2n(n+1)(m-n)$.

Die übrig bleibende viereckige Pyramide besteht aus n Schichten, welche ${}^1/_6n(n+1)(2n+1)$ Kugeln nach §. 472. 9 enthält; folglich ist die Anzahl aller Kugeln, also:

$$\begin{aligned} S &= {}^1/_2n(n+1)(m-n)+{}^1/_6n(n+1)(2n+1)\\ &= {}^1/_6n(n+1)\{3(m-n)+(2n+1)\}\\ &= {}^1/_6n(n+1)(3m-n+1) \text{ wie oben.} \end{aligned}$$

14. *β*) Denken wir uns die 3 Kugelhaufen als einen einzigen, so erhalten wir einen zeltförmigen Haufen, auf dessen Grundfläche jetzt $m+n+n=m+2n$ und daher auf dessen Rücken $(m-n+1)+2n=m+n+1$ Kugeln liegen. Verfahren wir jetzt bei der Berechnung wie vorher und subtrahiren alsdann die beiden viereckigen Haufen, so erhalten wir

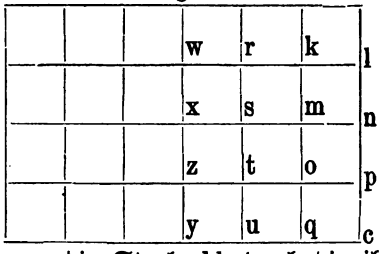
$$\begin{aligned} S &= {}^1/_2n(n+1)(m+n)+{}^1/_6n(n+1)(2n+1)-2.{}^1/_6n(n+1)(2n+1)\\ &= {}^1/_6n(n+1)\{3(m+n)-(2n+1)\}\\ &= {}^1/_6n(n+1)(3m+n-1). \end{aligned}$$

14. *γ*) Der Kugelhaufen bildet ein Prisma von m Schichten, wovon jede ${}^1/_2n(n+1)$ Kugeln enthält, so daß also in dem ganzen Kugelhaufen $m.{}^1/_2n(n+1)={}^1/_2mn(n+1)$ Kugeln sind.

14. *δ*) Denkt man sich, nachdem p Kugeln vom Rücken weggenommen, den übrig gebliebenen Haufen in ein schiefes dreieckiges Prisma und in eine viereckige Pyramide zerlegt, so erhalten wir nach *α*), wenn S die Anzahl der Kugeln bezeichnet

$$\begin{aligned} S &= {}^1/_2n(n+1)(m-p)+{}^1/_6n(n+1)(2n+1)\\ &= {}^1/_2n(n+1)\{3(m-p)+2n+1\}. \end{aligned}$$

Digitized by Google



15. Den Weg von a nach c über b kann ich nur auf eine Weise machen. Lege ich von ab nur die Strecke ai zurück, so kann ich statt ib die ihr gleichen Strecken kl, mn, op, qc abmachen, wodurch ich auf vier verschiedene Arten nach c gelangen kann. Gehe ich auf ab nur bis h, so kann die Strecke hb durch die ihr gleichen Strecken rl, sn, tp, uc oder durch rk+mn, rk+op, rk+qc oder durch sm+mn, sm+op, sm+qc oder endlich durch to+qc ersetzt werden. Daher kann ich von a über h nach c in der Richtung nach r zu auf 10 verschiedene Arten gelangen. Lege ich von ab nur ag zurück, so kann gb ersetzt werden durch wl, wk+mn, wk+op, wk+qc, wr+sn, wr+tp, wr+uc, wr+sm+op, wr+sm+qc, wr+to+qc oder durch xn, xs+tp, xs+uc, xm+qc, xm+op, xs+to+qc oder durch zp, zt+uc, zo+qc, yc. In dieser Weise kann der Weg auf 20 verschiedene Weisen abgemacht werden. Verfährt man nun so weiter, so ergibt sich, daß sich die Anzahl der verschiedenen Arten, sowohl durch die Combinationen der Zahlen 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 bezüglich zur Classe 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, als auch durch die dreieckigen Pyramidalzahlen der ersten Ordnung ausdrücken läßt. Daher erhalten wir, wenn wir die Summe mit S bezeichnen:

$$S=\binom{3}{0}+\binom{4}{1}+\binom{5}{2}+\binom{6}{3}+\binom{7}{4}+\binom{8}{5}+\binom{9}{6}.$$

Nach §. 472. 8 kann der Werth für S auch auf folgende Weise dargestellt werden:

$$S=\binom{10}{4}=210.$$

Bestimmen wir S vermittelst der Pyramidalzahlen, so haben wir nach §. 474 und §. 475, da das allgemeine Glied $=\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$ und die Summenformel $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}$ ist, wenn wir für n die Werthe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 setzen:

$$S=1+4+10+20+35+56+84=\frac{7.8.9.10}{1.2.3.4}=210.$$

16. Bei der Auflösung dieses Beispiels, das ähnlich dem vorhergehenden ist, können wir auch noch auf folgende Weise verfahren: Die Stadt, welche in Form eines Rechtecks ge-

Digitized by Google

baut ist, wird der Länge nach durch 19 und der Breite nach durch 13 Straßen durchschnitten, wodurch in der Länge $19+1=20$ und in der Breite $13+1=14$ Straßen entstehen, welche alle die Form von Rechtecken haben. Auf diese Weise sind $20+14=34$ Straßen entstanden. Betrachtet man dieselben als Elemente, so geben sie 34! Permutationen. Weil aber unter denselben 20 Elemente einer Art und 14 Elemente einer andern Art einander gleich sind, so kann der fragliche Weg von einer Ecke der Stadt bis zur andern gegenüberliegenden Ecke auf $34! : (20!\ 14!)$ verschiedene Arten zurückgelegt werden. Bezeichnen wir die Summe dieser Arten durch S, so ist also:

$$S = \frac{34!}{20!\ 14!} = 4 . 347993910.$$

Soll nun der angegebene Weg täglich 4 mal gemacht werden, so kann das Vorhaben in 347993910 Tagen ausgeführt werden.

17. Das Rechteck soll durch m horizontale und n vertikale Linien durchschnitten werden. Durch jene wird das Rechteck in $m+1$ und durch diese in $n+1$, also im Ganzen durch $m+n+2$ kleinere Rechtecke getheilt, unter denen $m+1$ gleiche einer Art und $n+1$ gleiche einer andern Art sich befinden. Daher können die verschiedenen Arten, um von a nach b zu gelangen, gefunden werden, wenn man $m+n+2$ permutirt und diese Permutationen durch das Produkt aus den Permutationen von $m+1$ und $n+1$ dividirt. Daher ist, wenn wir diese verschiedenen Arten durch S bezeichnen:

$$S = \frac{(m+n+2)!}{(m+1)!\ (n+1)!} = \binom{m+n+2}{m+1} = \binom{m+n+2}{n+1} \text{ (§. 455. 9).}$$

18. Durch die angegebene Operation wird der Würfel durch die 3 Ebenen in 4, durch die 4 Ebenen in 5, und durch die 5 Ebenen in 6 Parallelepipeden zerlegt. Nach den in der vorigen Auflösung entwickelten Gründen wird also der Punkt den angegebenen Weg machen können auf:

$$\frac{(4+5+6)!}{4!\ 5!\ 6!} = 630630 \text{ verschiedene Arten.}$$

Allgemein ist daher β)

$$\frac{\{(m+1)+(n+1)+(p+1)\}!}{(m+1)!\ (n+1)!\ (p+1)!} = \frac{(m+n+p+3)!}{(m+1)!\ (n+1)!\ (p+1)!}$$

19. Vom ersten A aus kann man das Wort nur einmal in horizontaler Richtung lesen. Vom zweiten A aus kann dies so oft geschehen, als sich 10 Elemente zur ersten Classe combiniren lassen, vom dritten A so oft, als 10 Elemente

Digitized by Google

zur 3. Classe combinirt werden können. Schließt man so weiter, so erhalten wir die Reihe der Coefficienten für $(a+b)^{10}$ und weil die Summe derselben nach §. 472. 5. α) gleich 2^{10} ist, so kann das Wort $2^{10} = 1024$ mal in der vorgeschriebenen Weise gelesen werden.

20. Denkt man sich den Grabstein durch 2 sich in S schneidende gerade Linien parallel zu den Gegenseiten gezogen, so wird die Inschrift in vier gleiche rechtwinkelige Felder eingetheilt. In jedem derselben sind der Länge nach 9 und der Breite nach 7 Reihen; mithin kann von S aus die Inschrift in einem Felde:

$$\frac{(9+7)!}{9!\,7!} = \binom{16}{9} = \binom{16}{7} = 11440 \text{ mal},$$

also in den 4 Feldern $4.11440 = 45760$mal gelesen werden.

Digitized by Google

Siebenter Abschnitt.

Gleichungen von höheren Graden und transcendente Gleichungen.

A. Eigenschaften der Gleichungen in Bezug auf ihre Wurzeln.

(Heis §. 94.)

§. 478. Jede, in einem mathematischen Ausdrucke vorkommende allgemeine Größe, welche während einer Rechnungsoperation ihren Werth nicht ändert, sondern denselben Werth unverändert beibehält, wird in der Analysis eine beständige Größe genannt, und man bedient sich zu ihrer Bezeichnung der Anfangsbuchstaben des Alphabets a, b, c u. s. w. Jede Größe aber, die beliebig verschiedene Werthe in einer und derselben Operation annehmen kann, ist eine veränderliche oder variabele Größe und wird durch die Buchstaben x, y, z u. s. w. bezeichnet. Jeden analytischen Ausdruck, in welchem beständige und veränderliche Größen auf irgend eine Art mathematisch mit einander verbunden vorkommen, wird eine Funktion genannt, und es wird gewöhnlich die Funktion nach der veränderlichen Größe benannt, welche in ihr enthalten ist. So ist x^3+ax^2+bx+c eine Funktion von x und wird durch f(x) bezeichnet. Also $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$; ferner $f(y)=y^n+ay^{n-1}+by^{n-2}+\ldots+t$ u. s. w.

§. 479. 1. Unter Wurzel einer Gleichung versteht man im Allgemeinen jeden Zahlen- oder algebraischen reellen oder imaginären Ausdruck, welcher für die Unbekannte in die Gleichung substituirt, den ersten Theil derselben dem zweiten identisch gleich macht. Sind nun die Wurzeln einer cubischen Gleichung α, β, γ und nimmt man sie alle als positiv an, so muß $x-\alpha=0$, $x-\beta=0$ und $x-\gamma=0$ sein und die Gleichung selbst besteht aus dem Produkte der binomischen Wurzelfaktoren $x-\alpha$, $x-\beta$ und $x-\gamma$. Entwickelt man dieses Produkt, so wird:

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)x-\alpha\beta\gamma=0.$$

Digitized by Google

2. Sind die Wurzeln einer Gleichung vom vierten Grade α, β, γ, δ, so ist $x-\alpha=0$, $x-\beta=0$, $x-\gamma=0$, $x-\delta=0$; multipliciren wir diese vier Wurzelfaktoren mit einander, so erhalten wir folgende Gleichung vom vierten Grade:

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)=x^4-(\alpha+\beta+\gamma+\delta)x^3+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta)x^2-(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)x+\alpha\beta\gamma\delta=0.$$

§. 480. Nimmt man an, daß in der Funktion

$$(1)\quad x^n+ax^{n-1}+bx^{n-2}+cx^{n-3}+\ldots+t=0.$$

ein Werth von $x=\alpha$ existire, durch dessen Substitution $f(x)=0$ wird, so ist $f(x)$ durch $x-\alpha$ ohne Rest theilbar und $x-\alpha$ ein Faktor von $f(x)$. Sind ferner β, γ, $\delta\ldots$ Wurzeln von $f(x)$, so ist dieselbe auch durch $x-\beta$, $x-\gamma$, $x-\delta$, u. s. w. ohne Rest theilbar. Zum Beweise braucht man nur die Division nach der Regel über die Division der Polynome (§. 108 I. Th.) auszuführen. Dividirt man die Gl. durch $x-\alpha$, so erhält man als Rest, wenn man denselben mit R bezeichnet:

$$\alpha^n+a\alpha^{n-1}+\ldots+s\alpha+t=R.$$

Es ist also dieser Rest derselbe Werth der Gleichung in α, wie vorher der Werth der Gleichung in x und da dieser der Annahme gemäß für $x=a$ Null wird, so muß auch $R=0$ sein und die Division geht ohne Rest auf. Da nun ferner β, γ, $\delta\ldots$ Wurzeln der Gl. (1) sind, so ergibt sich auf dieselbe Weise, daß $f(x)$ ebenfalls durch $x-\beta$, $x-\gamma$, $x-\delta\ldots$ theilbar sein muß, weshalb man auch der Gl. (1) folgende Form geben kann:

$$(2)\quad (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots(x-\mu)(x-\nu)=0.$$

Die linke Seite der Gl. (1) läßt sich nur in der Weise, wie es in Gl. (2) geschehen ist, in Faktoren zerlegen, weil jede Gl. des n^{ten} Grades, wie später gezeigt wird, gerade n Wurzeln hat. Führt man jetzt die Multiplikation in (2) aus, so geht (2) über in:

$$(3)\quad x^n-(\alpha+\beta+\gamma..+\nu)x^{n-1}+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta..+\alpha\nu..)x^{n-2}-(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\ldots)x^{n-3}+\ldots\pm\alpha\beta\gamma\delta\ldots\nu=0.$$

Die Coefficienten dieser Gleichung sind identisch mit denen der Gl. (1); daher ergeben sich folgende Relationen zwischen den Coefficienten und Wurzeln einer Gleichung:

$$\begin{aligned}
\alpha+\beta+\gamma+\delta+..+\mu+\nu&=-a\\
\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\ldots+\mu\nu&=+b\\
\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\ldots+\lambda\mu\nu&=-c\\
&\cdots\\
\alpha\beta\gamma\delta\ldots\mu\nu\ldots.&=(-)^nt
\end{aligned}$$

Hieraus folgen zwei wichtige Sätze:

1) In jeder Gleichung vom n^{ten} Grade ist der Coefficient des zweiten Gliedes die mit entgegengesetztem Zeichen genommene algebraische Summe aller Wurzeln der Gleichung. Der Coefficient des dritten Gliedes ist die Summe aller Produkte von je 2 Wurzeln mit eigenem Vorzeichen. Der Coefficient des vierten Gliedes

Digitized by Google

ist die Summe aller Produkte von je 3 Wurzeln der Gleichung mit entgegengesetztem Vorzeichen u. s. w. Das letzte Glied ist endlich dem Produkte aller Wurzeln gleich mit eigenem oder entgegengesetztem Vorzeichen, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist. Alles dies ergibt sich auch schon aus §. 479 und §. 460.

2) Sind alle Wurzeln einer Gleichung positiv, so müssen die Zeichen + und — regelmäßig abwechseln und zwar hat sie dann so viele Zeichenwechsel als sie positive Wurzeln hat. Sind aber sämmtliche Wurzeln einer Gleichung negativ, also $x=-\alpha$ oder $x+\alpha=0$ u. s. w. dann müssen alle ihre Coefficienten positiv sein (§. 63), und sie hat dann so viele Zeichenfolgen, als sie negative Wurzeln hat.

§. 481. Jede Gleichung vom n^{ten} Grad hat n Wurzeln, d. h. es gibt n Werthe für x, die alle den Bedingungen der Gleichung genügen. Bezeichnet man die Gl.

$$(1)\quad x^n+ax^{n-1}+bx^{n-2}+cx^{n-3}+\ldots+t=0$$

durch f(x), so muß es irgend einen Werth für $x=\alpha$ geben, für welchen $f(x)=0$ wird, und es ist alsdann $x-\alpha$ ein Faktor und der andere Faktor ist ein Ausdruck vom $(n-1)^{ten}$ Grade. Bezeichnet man diesen durch Y, so ist:

$$Y=x^{n-1}+a_1x^{n-2}+b_1x^{n-3}+\ldots+s_1x+t_1 \text{ und}$$

$$(2)\quad f(x)=(x-\alpha)Y=0.$$

Weil aber ein Produkt zweier Faktoren $=0$ wird, wenn einer der Faktoren $=0$ ist, so wird den Bedingungen der Aufgabe nicht nur Genüge geleistet, wenn man $x-\alpha=0$ setzt, sondern auch für $Y=0$. Man kann also auch annehmen

$$Y=x^{n-1}+a_1x^{n-2}+b_1x^{n-3}+c_1x^{n-4}+..s_1x+t_1=0.$$

Dies kann aber nur für einen Werth $x=\beta$ stattfinden; folglich ist $x-\beta$ ein Faktor von Y und der andere Faktor ist ein Ausdruck vom $(n-2)^{ten}$ Grade, den wir mit Z bezeichnen wollen. Daher ist:

$$(3)\quad f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)Z=0.$$

Es ist folglich $x=\beta$ eine Wurzel von f(x) und weil Z ein Faktor von f(x) ist, so wird auch $f(x)=0$ für $Z=0$, wodurch eine Gleichung vom $(n-2)^{ten}$ Grade erhalten wird, die ebenfalls eine Wurzel $=\gamma$ haben muß. Argumentirt man so weiter, so erhält man, nachdem $(n-1)$ Wurzeln von der Gl. (1) durch Division mit $x-\alpha$, $x-\beta$, $x-\gamma\ldots$ getrennt worden sind, die Gleichung

$$(4)\quad x\pm t_{n-1}=0$$

welche ebenfalls eine Wurzel haben wird, da sie vom ersten Grade ist, nämlich $x=\pm t_{n-1}$. Folglich hat die Gl. (1) n Wurzeln, was hiemit erwiesen ist. Es bleibt aber noch zu zeigen übrig, daß sie nur n Wurzeln haben kann. Denn angenommen, die Gl. (1) habe außer den n Wurzeln $\alpha, \beta, \gamma, \delta\ldots\nu$ noch eine weitere davon verschiedene Wurzel φ, so wäre auch

$$f(x)=(x-\varphi)P$$

Digitized by Google

für jeden Werth von x, also auch für $x = \varphi$ und man hätte also auch

$$(\varphi - \alpha)(\varphi - \beta)(\varphi - \delta)\ldots(\varphi - \nu) = 0$$

was aber ungereimt ist, da φ von $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots \nu$ verschieden sein soll.

Hieraus folgt nun weiter, daß sich die Gl. (1) umformen läßt in die folgende:

$$f(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\ldots(x-\nu) = 0.$$

Eine Gleichung vom n^{ten} Grade hat n Wurzeln, bedeutet so viel, als es gibt n Größen, die alle den Bedingungen der Gleichung Genüge leisten, wenn sie statt x gesetzt werden, nicht aber, daß der unbekannten Größe x alle diese Werthe zu gleicher Zeit zukommen.

§. 482. Wenn $f(x) = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + cx^{n-3} + \ldots + t$ für $x = p$ den positiven Werth $= +P$ und für $x = q$ den negativen Werth $= -Q$ erhält, so liegt zwischen p und q eine reelle Wurzel der Gleichung, so daß entweder diese Wurzel $w > p$ und $w < q$ oder $w < p$ und $w > q$, je nachdem $p <$ oder $> q$ ist.

Es sei $p < q$. Nun ist nach der Annahme,

$$f(x) = +P \text{ für } x = p \text{ und}$$
$$f(x) = -Q \text{ für } x = q.$$

Substituirt man nun aber nach und nach für x Werthe, die zwischen p und q liegen und allmählig zunehmen, so wird man für f(x) Werthe erhalten, die zwischen +P und −Q liegen und gleichfalls allmählig den Uebergang von einem dieser Werthe zum andern bilden. Einer sehr kleinen Aenderung des Werthes von x wird auch eine sehr kleine Aenderung des Werthes von f(x) entsprechen, ja es läßt sich behaupten, daß jedem zwischen +P und −Q liegenden Werthe von f(x) ein zwischen p und q liegender Werth von x entsprechen muß.

Da nun der Uebergang vom Positiven zum Negativen nur durch Null stattfinden kann, so befindet sich unter den zwischen +P und −Q liegenden Werthen auch der Werth 0, also muß auch diesem ein zwischen p und q liegender Werth von x entsprechen, d. h. zwischen p und q liegt eine Wurzel der Gleichung. Nimmt man $p > q$ an, so ist die Schlußweise dieselbe. Hieraus folgt also, daß, wenn man in einer Funktion zwei reelle Größen an die Stelle der Unbekannten setzt und dadurch zwei Resultate mit entgegengesetztem Vorzeichen erhält, so liegt zwischen jenen beiden Größen wenigstens *eine* reelle Wurzel der Gleichung.

§. 483. In jeder Gleichung läßt sich immer ein Werth von x angeben, wodurch die höchste Potenz von x größer wird,

Digitized by Google

als die Summe aller folgenden Glieder positiv genommen. Es sei die Gleichung:

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c.$$

Soll nun $x^3 > ax^2 + bx + c$ werden, so wird diese Bedingung erfüllt, wenn a der größte Coefficient und $x^3 > ax^2 + ax + a$ ist, d. h. wenn $x^3 > a(x^2 + x + 1)$ oder

$$x^3 > a \cdot \frac{x^3 - 1}{x - 1};$$ also auch, wenn

$$x^3 \gtreqless a \cdot \frac{x^3}{x - 1},$$ oder, wenn

$$1 \gtreqless \frac{a}{x - 1};$$ also wenn

$$x \gtreqless a + 1.$$

Hieraus folgt unmittelbar, daß die positiven Wurzeln der vorgelegten Gl. zwischen 0 und dem um 1 vermehrten größten Coefficienten, also a+1 liegen müssen, wenn a den größten Coefficienten bezeichnet.

Ebenso kann man eine Grenze finden für die negativen Wurzeln, wenn man $-y$ für x in die Gl. substituirt und das erste Glied positiv macht, wenn es, wie bei den cubischen Gleichungen und bei allen höhern Gleichungen von ungeradem Grade negativ geworden ist. Nach dieser Umformung sind offenbar die positiven Werthe von y den negativen von x gleich. Wenn nun nach diesen Veränderungen der größte Coefficient P ist, so wird P+1 eine Grenze für die positiven Werthe von y und folglich $-(P+1)$ die der negativen Werthe von x sein.

Vermittelst dieses Satzes sind wir nun im Stande nachzuweisen, daß jede cubische Gleichung immer mindestens eine reelle Wurzel habe. In der Gl.

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

sei a der größte Coefficient, so ist für $x \gtreqless a+1$

$$x^3 > ax^2 + bx + c$$

folglich erhält die Gleichung, wenn auch alle Coefficienten negativ sind, für $x \gtreqless a+1$ einen positiven Werth $= +P$ und für $x \gtreqless -(a+1)$ ist x^3 negativ; also wird für diesen Werth von x, wenn auch alle Coefficienten positiv sind, der Werth der Gleichung negativ $= -Q$. Es ist also

für $x = +(a+1)$ $f(x) = +P$ und
für $x = -(a+1)$ $f(x) = -Q$

folglich muß ein Werth für $x = p < (a+1)$ und $p > -(a+1)$ vorhanden sein, für welchen $f(x) = 0$ wird, d. h. p ist eine reelle Wurzel.

Jede cubische Gleichung hat daher entweder eine reelle Wurzel

Digitized by Google

und zwei imaginäre, oder drei reelle Wurzeln. Denn eine reelle Wurzel $x=\pm\alpha$ ist nach dem vorigen immer vorhanden; man erhält also den einfachen Faktor $(x\mp\alpha)$ und durch Division mit demselben entsteht eine quadratische Gl., deren Wurzeln die beiden andern Wurzeln der cubischen Gl. geben; die Wurzeln der quadratischen Gl. sind aber entweder beide reell oder beide imaginär.

§. 484. Setzt man in der Gleichung

$$(1)\quad x^3+ax^2+bx+c=0$$

$x=y+\alpha$, so ist:

$$(y+\alpha)^3+a(y+\alpha)^2+b(y+\alpha)+c=0 \text{ oder}$$

$$(2)\quad y^3+(a+3\alpha)y^2+(3\alpha^2+2a\alpha+b)y+\alpha^3+a\alpha^2+b\alpha+c=0$$

eine Gleichung, in welcher die Wurzeln um α größer oder kleiner sind, als die in der gegebenen Gleichung, je nachdem α negativ oder positiv genommen wird.

Setzt man nun den Coefficienten von y^2, nämlich $a+3\alpha=0$, so ist $\alpha=-\frac{a}{3}$ und die Form der abgeleiteten Gleichung

$$(3)\quad y^3+py+q=0$$

ist eine unreine vollständige Gleichung, in welcher das zweite Glied der vollständigen Gl. fehlt.

Man kann daher aus jeder vollständigen cubischen Gl. das zweite Glied derselben fortschaffen und eine solche Operation nennt man eine Gleichung reduciren.

§. 485. Je weniger Potenzen der unbekannten Größen eine Gleichung enthält, desto einfacher und leichter ist sie aufzulösen. So gibt die Gl. $x^2=a^2$ sofort $x=\pm a$, während die vollständige quadratische Gleichung $x^2+ax+b=0$ zu ihrer Auflösung einer Vorbereitung bedarf.

Nun kann man nicht allein jede quadratische und cubische Gl., in eine andere umformen, d. h. ihre Auflösung auf die einer andern Gleichung zurückführen, sondern überhaupt jede Gl. von jedem beliebigen Grade. Es sei gegeben die Gl.:

$$x^n+ax^{n-1}+bx^{n-2}+cx^{n-3}+\ldots t=0$$

so verwandelt sie sich, wenn $x=y+\alpha$ gesetzt wird, wo y eine neue Unbekannte und α eine unbestimmte Größe ist, deren Werth man beliebig annehmen kann, in folgende:

$$(y+\alpha)^n+a(y+\alpha)^{n-1}+b(y+\alpha)^{n-2}+\ldots s(y+\alpha)+t=0,$$

oder, wenn man nach der Binomialformel entwickelt und nach den abnehmenden Potenzen von y ordnet:

$$y^n+\left\{\binom{n}{1}\alpha+a\right\}y^{n-1}+\left\{\binom{n}{2}\alpha^2+\binom{n-1}{1}a\alpha+b\right\}y^{n-2}+\left\{\binom{n}{3}\alpha^3+\binom{n-1}{2}a\alpha^2+\binom{n-2}{1}\alpha b+c\right\}y^{n-3}$$
$$+\ldots.+\alpha^n+a\alpha^{n-1}+b\alpha^{n-2}+\ldots.+s\alpha+t=0.$$

Digitized by Google

Da nun α völlig willkührlich ist, so können wir es so nehmen, daß $n\alpha+a=0$ ist, woraus $\alpha=-\frac{a}{n}$ folgt. Setzt man diesen Werth in die vorhergehende Gl. ein, so erhält man die transformirte Gleichung von der Form:

$$y^n+b_1y^{n-2}+c_1y^{n-3}+\ldots+s_1y+t_1=0$$

in welcher das zweite Glied fehlt. Löst man diese Gl. auf, so erhält man die den Werthen von y entsprechenden Werthe von x, wenn man für y jeden seiner Werthe in die Relation $x=y+\alpha$ oder $x=y-\frac{a}{n}$ setzt.

Hieraus ergibt sich folgende Regel: Um aus einer Gleichung das zweite Glied fortzuschaffen, setze man für die Unbekannte eine neue, um den mit entgegengesetztem Zeichen genommenen und durch den Grad der Gleichung dividirten Coefficienten des zweiten Gliedes vermehrte Unbekannte. Daß man durch diese Substitution den gewünschten Zweck erreicht, ergibt sich aus folgendem: Denn es seien α, β, γ, $\delta\ldots$ die n Wurzeln der gegebenen Gl., so ergeben sich aus der Relation $x=y-\frac{a}{n}$ oder $y=x+\frac{a}{n}$ folgende Werthe für y:

$$y=\alpha+\frac{a}{n},\ \beta+\frac{a}{n},\ \gamma+\frac{a}{n},\ \delta+\frac{a}{n}\ldots$$

Die Summe der neuen Wurzeln ist folglich$=\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots+n\frac{a}{n}$.

Nun ist nach §. 480.

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots=-a.$$

folglich ist:

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots+a=-a+a=0;$$

also ist der Coefficient des zweiten Gliedes der reducirten Gl. an und für sich gleich Null.

B. Direkte Auflösungen der Gleichungen vom dritten Grade. Besondere Fälle der Gleichungen des dritten Grades.

(Heis §. 95a.)

§. 486. 1. Setzt man in der Gleichung

$$x^3+ax^2+bx+c=0$$

$a=b=0$ und $c=\mp1$, so hat man als einfachste Formen der cubischen Gl.

1. $x^3-1=0.$
2. $x^3+1=0.$

Digitized by Google

Die einfache cubische Gl. $x^3-1=0$ wird dadurch aufgelöst, daß man 1 auf die andere Seite des Gleichheitszeichens bringt und dann aus beiden Theilen der Gl. die Cubikwurzel auszieht. Hienach erhalten wir:

$$x_1=1.$$

Da nun jede cubische Gleichung 3 Wurzeln hat, so findet man die beiden andern Wurzeln aus der quadratischen Gleichung, die man erhält, wenn man die gegebene Gl. durch den Wurzelfaktor $x-1$ dividirt. Hienach erhält man:

$$\frac{x^3-1}{x-1}=x^2+x+1=0$$

Aus der quadratischen Gl. $x^2+x+1=0$ findet man

$x_2=-\frac{1}{2}(1-\sqrt{-3})$ und $x_3=-\frac{1}{2}(1+\sqrt{-3})$

Setzt man zur Abkürzung: $-\frac{1}{2}(1-\sqrt{-3})=J_1$ und $-\frac{1}{2}(1+\sqrt{-3})=J_2$, so hat man für die drei Cubikwurzeln der positiven Einheit

$$x_1=1,\ x_2=J_1,\ x_3=J_2.$$

2. Verfährt man in Betreff der cubischen Gl. $x^3+1=0$ ebenso, so ergibt sich $x_1=-1.$

Und hieraus, weil

$$\frac{x^3+1}{x+1}=x^2-x+1=0$$

$x_2=\frac{1}{2}(1+\sqrt{-3})$ und $x_3=\frac{1}{2}(1-\sqrt{-3})$

oder, wenn man die Werthe für x_2 und x_3 gleich $-J_1$ und $-J_2$ setzt, so ist: $x_1=-1,\ x_2=-J_1,\ x_3=-J_2.$

3. α) Setzt man in der Gleichung:

$$x^3+ax^2+bx+c=0$$

$$a=b=0,$$

so hat man als allgemeine Form der reinen cubischen Gleichungen:

(1) $x^3-c=0$; (2) $x^3+c=0$,

oder wenn $c=n^3$ gesetzt wird:

(3) $x^3-n^3=0$; (4) $x^3+n^3=0.$

Aus (3) folgt: $x^3=n^3$; also $x_1=n.$

Aus (4) folgt: $x^3=-n^3$; also $x_1=-n.$

Daraus ergibt sich ferner:

$$\frac{x^3-n^3}{x-n}=x^2+nx+n^2=0$$

$$\frac{x^3+n^3}{x+n}=x^2-nx+n^2=0.$$

Aus diesen beiden quadratischen Gleichungen folgt dann weiter:

Digitized by Google

$x_2 = -\frac{1}{2}n(1+\sqrt{-3})$ und $x_3 = -\frac{1}{2}n(1-\sqrt{-3})$, sowie:
$x_2 = \frac{1}{2}n(1+\sqrt{-3})$ und $x_3 = \frac{1}{2}n(1-\sqrt{-3})$.

Die Gleichung $x^3+n^3=0$ hat demnach die 3 Wurzeln:
$-n$, $\frac{1}{2}n(1+\sqrt{-3})$, $\frac{1}{2}n(1-\sqrt{-3})$ oder
$-n$, $-nJ_1$ und $-nJ_2$
und die Gl. $x^3-n^3=0$ hat die 3 Wurzeln:
n, nJ_1 und nJ_2.

Aus dem Bisherigen folgt, daß jede reine cubische Gleichung 3 Wurzeln hat, wovon eine reell, die beiden andern aber imaginär sind.

3. β) Zieht man aus den beiden Theilen dieser Gl. die Cubikwurzel, so wird:
$a-x=x-b$; folglich $x_1 = \frac{1}{2}(a+b)$.
Entwickelt man die gegebene Gl., so findet man:
$x^3-\frac{3}{2}(a+b)x^2+\frac{3}{2}(a^2+b^2)x-\frac{1}{2}(a^3+b^3)=0$.
Dividirt man diese Gl. durch den gefundenen Wurzelfaktor $x-\frac{1}{2}(a+b)$, so erhält man die quadratische Gleichung:
$x^2-(a+b)x+(a^2-ab+b^2)=0$.
Hieraus folgt: x_2 und $x_3 = \frac{1}{2}(a+b)\pm(a-b)\sqrt{-3}$.

4. Die Auflösung der vollständigen cubischen Gleichung erfordert eine andere Methode, als die der quadratischen Gleichungen. Es ist nämlich in einem einzigen Falle möglich bei der Gleichung:
$$(1)\quad x^3+Ax^2+Bx=C$$
durch Ergänzung aus dem ersten Theile einen vollständigen Cubus zu bilden und dieser Fall ist, wenn x^3+Ax^2+Bx die drei ersten Glieder des vollständigen Cubus von
$$(x+a)^3=x^3+3ax^2+3a^2x+a^3$$
sind; alsdann muß:
$A=3a$
$B=3a^2$, also
$a=\frac{1}{3}A$ und
$B=\frac{1}{3}A^2$ sein.

In allen andern Fällen werden zur Ergänzung des Cubus Größen erfordert, die mit x verbunden sind, und da dieselben auch zum zweiten Theile addirt werden müssen, so würden auch in diesem Theile unbekannte Größen eingeführt, deren Elimination die Lösung der gegebenen Gleichung erfordert. Auf diese Weise wäre es nicht möglich, zu einem erwünschten Ziele zu gelangen. Wenn aber $B=\frac{1}{3}A^2$ ist, d. h. wenn die drei ersten Glieder der cubischen Gl. x^3+Ax^2+Bx die Glieder eines vollständigen Cubus eines Binoms sind, so läßt sich eine solche cubische Gleichung, wie die quadratischen, durch Ergänzung des Cubus auflösen.

Digitized by Google

5. Ist also:

$$x^3+Ax^2+{}^1/_3A^2x=C,$$

so addire man zu beiden Seiten dieser Gl. $({}^1/_3A)^3$ und wir haben:

$$x^3+Ax^2+{}^1/_3A^2x+{}^1/_{27}A^3={}^1/_{27}A^3+C \text{ oder}$$
$$(x+{}^1/_3A)^3={}^1/_{27}A^3+C; \text{ daher}$$
$$x=-{}^1/_3A+\sqrt[3]{{}^1/_{27}A^3+C}.$$

Dividire die Gl. $x^3+Ax^2+{}^1/_3A^2x=C$ durch den Wurzelfaktor $x+{}^1/_3A-\sqrt[3]{{}^1/_{27}A^3+C}$, so resultirt die quadratische Gleichung:

$$x^2+({}^2/_3A+\sqrt[3]{{}^1/_{27}A^3+C})x+{}^1/_9A^2+{}^1/_3A\sqrt[3]{{}^1/_{27}A^3+C}+$$
$$\sqrt[3]{({}^1/_{27}A^3+C)^2}=0.$$

Hieraus erhalten wir:

$$\{x+{}^1/_3A+{}^1/_2\sqrt[3]{{}^1/_{27}A^3+C}\}^2=-{}^3/_4\sqrt[3]{{}^1/_{27}A^3+C}; \text{ daher}$$
$$x=-{}^1/_3A-{}^1/_2(1+\sqrt{-3})\sqrt[3]{{}^1/_{27}A^3+C} \text{ oder}$$
$$x_2=-{}^1/_3A+J_1\sqrt[3]{{}^1/_{27}A^3+C} \text{ und } x_3=-{}^1/_3A-J_2\sqrt[3]{{}^1/_{27}A^3+C}.$$

6. Da in der hier gegebenen Gl. $B={}^1/_3A^2$ ist, so hat man, wenn für A und C die entsprechenden Werthe mit Rücksicht auf die Vorzeichen der Coefficienten gesetzt werden:

$$x_1=-{}^1/_3.(-12)+\sqrt[3]{-{}^1/_{27}.12^3+189}=4+\sqrt[3]{125}=4+5=9$$
$$x_2=4-{}^1/_2(1+\sqrt{-3})5=1{}^1/_2-2{}^1/_2\sqrt{-3}$$
$$x_3=4-{}^1/_2(1-\sqrt{-3})5=1{}^1/_2+2{}^1/_2\sqrt{-3}.$$

7. Gibt man der hier gegebenen Gleichung die Form eines Produktes aus zwei Faktoren, so wird:

$$x(x^2-a^2)=0,$$

folglich $x_1=0$; ferner ist: $x^2-a^2=0$ oder $(x-a)(x+a)=0$; daher

$x-a=0$; $x_2=a$ und $x+a=0$, also $x_3=-a$.

Wenn also in der Gl. $x^3+Ax^2+Bx+C=0$ der Coefficient B und das Absolutglied C jede einzeln $=0$ werden, so erhält man $x^3+Ax^2=0$, eine Gleichung, die sich in das Produkt von zwei Faktoren zerlegen läßt, oder die, wenn sie durch x dividirt wird, auf eine reine quadratische Gl. führt, welche, wenn A eine rationale Größe und negativ ist, jedesmal reelle Wurzeln liefert.

8. Um die Gleichung auf die verlangte Form zu bringen, setze man $x=y+\alpha$, so wird:

Digitized by Google

$x^3 = (y+\alpha)^3 \ldots = y^3 + 3y^2\alpha + 3y\alpha^2 + \alpha^3$
$-3mx^2 = -3m(y+\alpha)^2 = -3my^2 - 6my\alpha - 3m\alpha^2$
$+nx = n(y+\alpha) = +ny + n\alpha$
$-p = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots -p.$

Daher ist: (1) $y^3 + 3y^2(\alpha - m) - y(6m\alpha - 3\alpha^2 - n) + (\alpha^3 - 3\alpha^2 m + n\alpha - p) = 0.$

Soll nun das zweite und letzte Glied aus dieser Gleichung verschwinden, so setze man:

(2) $\alpha - m = 0$; also $\alpha = m$
(3) $\alpha^3 - 3\alpha^2 m + n\alpha - p = 0$; also
(4) $\alpha^3 - 3\alpha^2 m + n\alpha = p.$

Um den Werth für p durch m und n auszudrücken, setze man aus (2) den Werth für α in (4) und wir haben:

(5) $p = m^3 - 3m^3 + mn = m(n - 2m^2).$

Nun soll ferner der Coefficient von y im dritten Gliede der Gl. (1) q betragen, daher ist:

$q = 6m\alpha - 3\alpha^2 - n,$

oder, wenn wir den Werth für α einsetzen:

$q = 3m^2 - n.$

Ist nun $y^3 - qy = 0$ oder $y(y^2 - q) = 0$, so ist:

$y_1 = 0,\ y_2 = +\sqrt{q},\ y_3 = -\sqrt{q}$ oder

$y_1 = 0,\ y_2 = +\sqrt{3m^2 - n};\ y_3 = -\sqrt{3m^2 - n}.$

Da nun $x = y + \alpha$ angenommen wurde und $\alpha = m$ ist, so erhalten wir endlich:

$x_1 = 0 + m = m,\ x_2 = m + \sqrt{3m^2 - n},\ x_3 = m - \sqrt{3m^2 - n}.$

9. Verfährt man hier, wie in der vorigen Aufgabe und setzt $x = y + \alpha$, so ist:

(1) $(y+\alpha)^3 - 3b(y+\alpha)^2 + (3b^2 - a^2)(y+\alpha) - b(b^2 - a^2) = 0.$

Entwickelt man diese Gl. und ordnet sie nach den Potenzen von y, so hat man:

(2) $y^3 + 3y^2(\alpha - b) - y(a^2 + 6b\alpha - 3b^2 - 3\alpha^2) + (\alpha^3 - 3\alpha^2 b + 3\alpha b^2 - a^2\alpha) - b(b^2 - a^2) = 0.$

Soll nun das zweite Glied verschwinden, so setze man:

(3) $\alpha - b = 0$; also $\alpha = b.$

Substituirt man den für α gefundenen Werth in (2) und reducirt die Gl., so wird:

$y^3 - a^2 y = 0$; daher:
$y(y^2 - a^2) = 0$; folglich:
$y_1 = 0,\ y_2 = +a,\ y_3 = -a$; daher ist:
$x_1 = 0 + b = b,\ x_2 = b + a,\ x_3 = b - a.$

10. Reducirt man auch die hier gegebene Gl. auf die Form:

$y^3 - qy = 0$

und setzt wieder $x = y + \alpha$, entwickelt dann diese Gl. und ordnet sie nach den Potenzen von y, so wird:

Digitized by Google

$y^3+3y^2(\alpha-(m+n))-y\{6\alpha(m+n)-3\alpha^2-3(m+n)^2+n^2\}+$
$\alpha^3-3\alpha^2(m+n)+\alpha(3m^2+6mn+2n^2)\}-m(m^2+3mn+2n^2)=0.$

Setze $\alpha-(m+n)=0$, so wird $\alpha=m+n$.

Substituirt man diesen Werth für α in obige Gl., entwickelt und reducirt dieselbe, so ist:

$y^3-n^2y=0$; daher $y(y^2-n^2)=0$ oder:

$y(y-n)(y+n)=0$, folglich:

$y_1=0,\ y_2=+n,\ y_3=-n$; daher:

$x_1=m+n,\ x_2=m+2n,\ x_3=m+n-n=m.$

I. Cardanische Formel und Formeln von Clausen und Hulbe.

(Heis §. 95 b.)

§. 487. Fehlt in der allgemeinen Form der vollständigen cubischen Gleichung das zweite Glied, welches man nach §. 484 beseitigen kann, so hat man die unreine unvollständige cubische Gleichung:

$$(1)\quad x^3+px+q=0,$$

eine Form, welche daher auch als allgemeine Form jeder cubischen Gleichung angesehen werden kann.

Man setze nun zur Bestimmung von x:

$$(2)\quad x=\sqrt[3]{P}+\sqrt[3]{Q}.$$

Erhebe diese Gl. in den Cubus, so wird:

$$(3)\quad x^3=P+Q+3\sqrt[3]{PQ}(\sqrt[3]{P}+\sqrt[3]{Q}),$$

oder, wenn man aus (2) den Werth für $\sqrt[3]{P}+\sqrt[3]{Q}$ in (3) einsetzt:

$$(4)\quad x^3=P+Q+3x\sqrt[3]{PQ}.$$

Subtrahire (4) von (1) und ordne die Gl., so wird:

$$(5)\quad (p+3\sqrt[3]{PQ})x+q+P+Q=0.$$

Dieser Gl. geschieht Genüge, wenn man setzt:

$$(6)\quad p+3\sqrt[3]{PQ}=0 \text{ und}$$
$$(7)\quad q+P+Q=0.$$

Aus (6) folgt:

$$(8)\quad PQ=-\tfrac{1}{27}p^3 \text{ und aus (7):}$$
$$(9)\quad P+Q=-q.$$

In den beiden Gleichungen (8) und (9) ist das Produkt und die Summe der beiden Unbekannten P und Q gegeben. Nach §. 399. 15 ist die Differenz derselben:

$$(10)\quad P-Q=\sqrt{q^2+\tfrac{4}{27}p^3}.$$

Aus (9) und (10) folgt nun weiter:

Digitized by Google

$$P = -{}^1/_2 q + {}^1/_2\sqrt{q^2 + {}^4/_{27}p^3}$$
$$Q = -{}^1/_2 q - {}^1/_2\sqrt{q^2 + {}^4/_{27}p^3}.$$

Setzt man die für P und Q gefundenen Werthe in (2), so wird:

$$x = \sqrt[3]{-{}^1/_2 q + \sqrt{{}^1/_4 q^2 + {}^1/_{27}p^3}} + \sqrt[3]{-{}^1/_2 q - \sqrt{{}^1/_4 q^2 + {}^1/_{27}p^3}}.$$

Dieser Ausdruck der Wurzeln einer cubischen Gleichung durch die Coefficienten derselben heißt die Cardanische Formel.

§. 488. Setzt man $\sqrt[3]{P} = u$ und $\sqrt[3]{Q} = v$, so ist $u+v$ eine Wurzel der Gl. (1) des vorigen §. und daher $x-(u+v)$ ein Wurzelfaktor derselben. Nun ist:

$$\frac{x^3+px+q}{x-(u+v)} = x^2+(u+v)x+(u+v)^2+p.$$

Also:

$$x^3+px+q = (x-(u+v))\{x^2+(u+v)x+(u+v)^2+p\} = 0.$$

Daher ist auch:

$$x^2+(u+v)x+(u+v)^2+p = 0.$$

Hieraus folgt:

$$x = -{}^1/_2(u+v) \pm \sqrt{{}^1/_4(u+v)^2 - (u+v)^2 - p}$$
$$= -{}^1/_2(u+v) \pm \sqrt{-p - {}^3/_4(u+v)^2}.$$

Nun ist nach §. 487. (8)

$PQ = -{}^1/_{27}p^3$; folglich:
$uv = -{}^1/_3 p$ oder:
$3uv = -p$.

Setzt man den Werth für $-p$ in den für x gefundenen Werth, so wird:

$$x = -{}^1/_2(u+v) \pm \sqrt{3uv - {}^3/_4(u+v)^2}$$
$$= -{}^1/_2(u+v) \pm \sqrt{3\{uv - {}^1/_4(u+v)^2\}}$$
$$= -{}^1/_2(u+v) \pm {}^1/_2\sqrt{-3(u-v)^2} \text{ oder endlich:}$$
$$= -{}^1/_2(u+v) \pm {}^1/_2(u-v)\sqrt{-3}.$$

Die 3 Wurzeln der cubischen Gleichung $x^3+px+q=0$ sind also:

$$x_1 = u+v$$
$$x_2 = -{}^1/_2(u+v) + {}^1/_2(u-v)\sqrt{-3}$$
$$x_3 = -{}^1/_2(u+v) - {}^1/_2(u-v)\sqrt{-3}.$$

§. 489. Die allgemeine cubische Gleichung kann folgende vier Formen haben:

1. $x^3+px+q = 0$
2. $x^3+px-q = 0$
3. $x^3-px+q = 0$
4. $x^3-px-q = 0$.

Was die erste derselben betrifft, so ist diese bei der Entwickelung der Cardanischen Formel zu Grunde gelegt worden und hienach ist:

Digitized by Google

1. $x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$.

In der zweiten ist q negativ, dadurch geht in der Formel $-\frac{1}{2}q$ in $+\frac{1}{2}q$ über und in diesem Falle wird, weil q^2 immer positiv ist:

2. $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$.

Hat die cubische Gleichung die Form 3, worin p negativ ist, so geht $+\frac{1}{27}p^3$ in $-\frac{1}{27}p^3$ über und es ist alsdann:

3. $x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3}}$.

Sind endlich, wie in der Form 4, p und q negativ, so muß $+\frac{1}{2}q$ statt $-\frac{1}{2}q$ und $-\frac{1}{27}p^3$ statt $+\frac{1}{27}p^3$ gesetzt werden; für diesen Fall haben wir also:

4. $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3}}$.

§. 490. Nach §. 483 hat jede cubische Gleichung entweder eine reelle und zwei imaginäre oder drei reelle Wurzeln. Es fragt sich nun, welchen Bedingungen die Coefficienten der Gl. entsprechen müssen, um aus ihrer Beschaffenheit beurtheilen zu können, ob die Gleichung nur eine reelle und zwei imaginäre oder drei reelle Wurzeln habe.

1. Zunächst leuchtet ein, daß u und v und folglich $u+v=x$ reell sind, wenn $\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3$ positiv ist. Dies ist aber immer der Fall, wenn p positiv ist, denn q^2 ist immer positiv, auch wenn q negativ ist. Es ist aber auch dann noch der Fall, wenn p negativ ist, aber $\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3>0$ oder $\frac{1}{4}q^2>\frac{1}{27}p^3$. Sind nun aber u und v reell, so sind die beiden andern Wurzeln x_2 und x_3 nach §. 488 imaginär.

   Die Gleichung also:

   $$x^3+px\pm q=0$$

   hat stets eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln.

   Ebenso die Gleichung:

   $$x^3-px\pm q=0,$$

   wenn $\frac{1}{4}q^2>\frac{1}{27}p^3$ ist.

2. Ist aber $\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3=0$ d. h. ist p negativ und $\frac{1}{4}q^2=\frac{1}{27}p^3$, so hat die Gleichung drei reelle Wurzeln, worunter zwei einander gleich sind.

   In diesem Falle ist $u=v=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q}$; also:

$$x_1 = u+v = 2\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q} = \sqrt[3]{-4q}$$

$$x_2 = -\tfrac{1}{2}(u+v)+\tfrac{1}{2}(u-v)\sqrt{-3} = -u = -\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q}$$

$$x_3 = -\tfrac{1}{2}(u+v)-\tfrac{1}{2}(u-v)\sqrt{-3} = -u = -\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q}.$$

Digitized by Google

3. Ist $^1/_4q^2+^1/_{27}p^3<0$, d. h. negativ, so muß p negativ und $^1/_4q^2<^1/_{27}p^3$ sein. Da in diesem Falle $\sqrt{^1/_4q^2-^1/_{27}p^3}$ imaginär ist, so sind auch u und v und somit alle Wurzeln der cubischen Gleichung in der Cardanischen Formel unter einer imaginären Form ausgedrückt. Der Werth für x ist aber dennoch nur scheinbar imaginär und es läßt sich, wie später geschehen wird, beweisen, daß dann alle 3 Werthe für x reell sind. Dieser Fall ist bekannt unter dem Namen des Casus irreducibilis.

In der Gl.:

$x^3-px-q=0$ sei α eine reelle Wurzel, also:

$\alpha^3-p\alpha-q=0$; folglich $\alpha^3-p\alpha=q$.

Daher ist:

$$x^3-px-q=x^3-px-(\alpha^3-p\alpha)=0$$
$$=-(x-\alpha)p+x^3-\alpha^3=0 \text{ oder:}$$
$$x^3-px-q=(x-\alpha)(x^2+\alpha x+\alpha^2-p)=0.$$

Aus $x^2+\alpha x+\alpha^2-p=0$

folgt: $x=-^1/_2\alpha\pm\sqrt{-^3/_4\alpha^2+p}$.

Ist daher $p>^3/_4\alpha^2$, so ist x reell.

Es sei $p=^3/_4\alpha^2+\beta$, wo β positiv ist.

Nun ist $q=\alpha^3-p\alpha$. Daher ist, wenn wir hierin den Werth für p einsetzen:

$$q=\alpha^3-^3/_4\alpha^3-\alpha\beta=\alpha(^1/_4\alpha^2-\beta).$$

Hiernach wird:

$$^1/_4q^2-^1/_{27}p^3=^1/_4\alpha^2(^1/_4\alpha^2-\beta)^2-^1/_{27}(^3/_4\alpha^2+\beta)^3.$$

Entwickelt und reducirt man die rechte Seite dieser Gl., so wird:

$$^1/_4q^2-^1/_{27}p^3=-3\beta(^1/_4\alpha^2-^1/_9\beta)^2<0,$$ d. h. negativ.

Die 3 Wurzeln der Gl. $x^3-px-q=0$ sind daher:

$$x_1=\alpha$$
$$x_2=-^1/_2\alpha+\sqrt{\beta}$$
$$x_3=-^1/_2\alpha-\sqrt{\beta}.$$

Es ist also unter der Voraussetzung, daß jede cubische Gl. wenigstens eine reelle Wurzel hat, bewiesen, daß:

I. β positiv oder $^1/_4q^2-^1/_{27}p^3<0$ ist, wenn alle 3 Wurzeln reell sind, und umgekehrt;

II. daß alle 3 Wurzeln möglich sind, wenn β positiv oder $^1/_4q^2-^1/_{27}p^3<0$ ist.

§. 491. Die Beispiele 1 bis 3 finden ihre Erledigung in den vorhergehenden §§. Die Lösung der folgenden in Heis §. 95b ist folgende:

4. Diese Gl. ist von der ersten Form und hat daher eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln. Nun ist $p=48$, $q=504$;

Digitized by Google

daher $^1/_2q = 252$, $^1/_4q^2 = 63504$; $^1/_{27}p^3 = 4096$;
$\sqrt{^1/_4q^2 + ^1/_{27}p^3} = 260$; daher $u = \sqrt[3]{-252+260} = 2$
und $v = \sqrt[3]{-252-260} = -8$; also $u+v = 2-8 = -6$; $u-v = 2+8 = 10$; daher:

$$x_1 = -6,\ x_2 = 3+5\sqrt{-3};\ x_3 = 3-5\sqrt{-3}.$$

5. Die Entwickelung der vorhergehenden Gesetze über die höhern Gleichungen geschah immer unter der Voraussetzung, daß der Coefficient von x^n gleich 1 war. Ist dies nicht der Fall, so muß man die ganze Gleichung durch den Coefficienten von x^n dividiren. Demnach erhalten wir hier:

$$x^3 + ^4/_3x + ^7/_3 = 0.$$

Nun ist $p = ^4/_3$, $q = ^7/_3$, $^1/_2q = ^7/_6$, $^1/_4q^2 = ^{49}/_{36}$, $^1/_{27}p^3 = \frac{64}{27^2}$; $\sqrt{^1/_4q^2 + ^1/_{27}p^3} = ^{65}/_{54}$; mithin $u = \sqrt[3]{-^7/_6 + ^{65}/_{54}} = ^1/_3$, $v = \sqrt[3]{-^7/_6 - ^{65}/_{54}} = -^4/_3$, $u+v = -1$, $u-v = ^5/_3$; daher:

$$x_1 = -1,\ x_2 = -^1/_2 + ^5/_6\sqrt{-3},\ x_3 = -^1/_2 - ^5/_6\sqrt{-3}.$$

Man kann hierbei auch noch auf folgende Weise verfahren. Da 3 kein Faktor von den Coefficienten 4, 7 ist, so erhält man durch Division mit 3:

$$x^3 + ^4/_3x + ^7/_3 = 0$$

eine Gleichung, deren Coefficienten Brüche sind. Um dieselben zu beseitigen, setze man $3x = y$, so wird $x = ^1/_3y$. Auf diese Weise erhält man:

$$y^3 + 12y + 63 = 0;$$

also $p = 12$, $q = 63$, $^1/_2q = ^{63}/_2$, $^1/_4q^2 = ^{3969}/_4$, $^1/_{27}p^3 = 64$,
$\sqrt{^1/_4q^2 + ^1/_{27}p^3} = ^{65}/_2$, $u = \sqrt[3]{-^{63}/_2 + ^{65}/_2} = 1$,
$v = \sqrt[3]{-^{63}/_2 - ^{65}/_2} = -4$; daher:
$u+v = 1-4 = -3$, $u-v = 1+4 = 5$; folglich:

$$y = -3;\ \text{daher } x_1 = ^1/_3y = -1 \text{ u. s. w.}$$

6. Diese Gleichung ist von der Form 4 und es ist $p = 21$, $q = 344$, $^1/_2q = 172$, $^1/_4q^2 = 29584$, $^1/_{27}p^3 = 343$, $\sqrt{^1/_4q^2 - ^1/_{27}p^3} = 171$; daher:

$$u = \sqrt[3]{172+171} = 7,\ v = \sqrt[3]{172-171} = 1,$$
$$u+v = 8,\ u-v = 6;\ \text{folglich:}$$
$$x_1 = 8,\ x_2 = -4+3\sqrt{-3},\ x_3 = -4-3\sqrt{-3}.$$

7. Diese Gleichung ist von der Form 3. Es ist $p = 3$, $q = 2$, $^1/_2q = 1$, $^1/_4q^2 = 1$, $^1/_{27}p^3 = 1$; also $\sqrt{^1/_4q^2 - ^1/_{27}p^3} = 0$; mithin findet hier der §. 490. 2 angegebene Fall statt, wo-

Digitized by Google

nach $^1/_4q^2 = {}^1/_{27}p^3$ ist; daher hat die Gleichung drei reelle Wurzeln, wovon zwei einander gleich sind, nämlich:

$$u = v = \sqrt[3]{-1} = -1; \text{ folglich ist:}$$

$x_1 = 2.(-1) = -2$, $x_2 = -(-1) = +1$, $x_3 = -(-1) = +1$.

Es ist also: $f(x) = (x+2)(x-1)(x-1) = 0$.

8. Hier ist $p = 12$, $q = 16$, $^1/_2q = 8$, $^1/_4q^2 = 64$, $^1/_{27}p^3 = 64$; also wieder $\sqrt{^1/_4q^2 - {}^1/_{27}p^3} = 0$; mithin hat diese Gl. wie die vorhergehende ebenfalls drei reelle Wurzeln, wovon zwei einander gleich sind; daher:

$x_1 = 2\sqrt[3]{-8} = -4$, x_2 und $x_3 = -\sqrt[3]{-8} = +2$. Es ist also:

$$f(x) = (x+4)(x-2)(x-2) = 0.$$

9. Es ist $p = 9$, $q = 28$, $^1/_2q = 14$, $^1/_4q^2 = {}^1/_4.28^2 = 196$, $^1/_{27}p^3 = {}^1/_{27}.9^3 = 27$, $\sqrt{^1/_4q^2 - {}^1/_{27}p^3} = 13$; daher $u = \sqrt[3]{-14+13} = -1$, $v = \sqrt[3]{-27} = -3$; also $u+v = -4$, $u-v = 2$; folglich:

$$x_1 = -4,\ x_2 = 2+\sqrt{-3},\ x_3 = 2-\sqrt{-3}.$$

10. Hier hat man $p = 60$, $q = 671$, $^1/_2q = 335^1/_2$, $^1/_4q^2 = {}^1/_4.671^2$, $^1/_{27}p^3 = {}^1/_{27}.60^3$, $\sqrt{^1/_4q^2 - {}^1/_{27}p^3} = \frac{646{,}715}{2}$; daher:

$$u = \sqrt[3]{-\frac{671}{2}+\frac{646{,}715}{2}} = -2{,}3,\ v = \sqrt[3]{-\frac{671}{2}-\frac{646{,}715}{2}}$$

$= -8{,}7$; also $u+v = -(2{,}3+8{,}7) = -11$, $u-v = 6{,}4$; folglich:

$x_1 = -11$, $x_2 = 5^1/_2 + 3^1/_5\sqrt{-3}$, $x_3 = 5^1/_2 - 3^1/_5\sqrt{-3}$.

11. Hier ist $p = 2$, $q = 4$, $^1/_2q = 2$, $^1/_4q^2 = 4$, $^1/_{27}p^3 = {}^8/_{27}$, $\sqrt{^1/_4q^2 - {}^1/_{27}p^3} = {}^{10}/_3\sqrt{^1/_3}$; daher $u = \sqrt[3]{2+{}^{10}/_3\sqrt{^1/_3}}$ und $v = \sqrt[3]{2-{}^{10}/_3\sqrt{^1/_3}}$; daher $u+v = \sqrt[3]{2+{}^{10}/_3\sqrt{^1/_3}} + \sqrt[3]{2-{}^{10}/_3\sqrt{^1/_3}}$. Um zu untersuchen, ob sich die Cubikwurzel aus $2 \pm {}^{10}/_3\sqrt{^1/_3}$ angeben läßt, verfahre man auf folgende Weise.

Es ist nämlich:

$(a \pm \sqrt{b})^3 = (a^3+3ab) \pm (3a^2+b)\sqrt{b}$; folglich ist:

$$a \pm \sqrt{b} = \sqrt[3]{(a^3+3ab) \pm (3a^2+b)\sqrt{b}}.$$

Vergleicht man die rechte Seite dieser analytischen Gleichung mit $\sqrt[3]{2 \pm {}^{10}/_3\sqrt{^1/_3}}$, so kann man setzen:

Digitized by Google

$a^3+3ab=2$ und
$(3a^2+b)\sqrt{b}={}^{10}/_3\sqrt{{}^1/_3}$. Ist nun $b={}^1/_3$, so ist:
$3a^2+b=3a^2+{}^1/_3$; daher auch:
$3a^2+{}^1/_3={}^{10}/_3$; also $a=1$. Da nun:
$a^3+3ab=1^3+3.1.{}^1/_3=2$ ist, so ist wirklich:

$$\sqrt[3]{2+{}^{10}/_3\sqrt{{}^1/_3}}+\sqrt[3]{2-{}^{10}/_3\sqrt{{}^1/_3}}=(1+\sqrt{{}^1/_3})+(1-\sqrt{{}^1/_3})=2$$

eine rationale Wurzel. Folglich:

$$x_1=u+v=2,\ x_2=-1+\sqrt{{}^1/_3}.\sqrt{-3}=-1+\sqrt{-1}$$

und $x_3=-1-\sqrt{-1}$.

12. Da hier $p=26$ und $q=60$, so findet man:

$$u=\sqrt[3]{30+{}^{82}/_3\sqrt{{}^1/_3}},\ v=\sqrt[3]{30-{}^{82}/_3\sqrt{{}^1/_3}}.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem im vorigen Beispiele für $a\pm\sqrt{b}$ gefundenen, so ist:

$a^3+3ab=30$ und
$(3a^2+b)\sqrt{b}={}^{82}/_3\sqrt{{}^1/_3}$.

Setzt man hierin $b={}^1/_3$, so ist:
$3a^2+{}^1/_3={}^{82}/_3$; also $a=3$.

Da nun $a^3+3ab=3^3+3.3.{}^1/_3=30$ ist, so ist:

$$\sqrt[3]{30+{}^{82}/_3\sqrt{{}^1/_3}}+\sqrt[3]{30-{}^{82}/_3\sqrt{{}^1/_3}}=(3+\sqrt{{}^1/_3})+(3-\sqrt{{}^1/_3})=6.$$

Es ist also:
$u=3+\sqrt{{}^1/_3}$, $v=3-\sqrt{{}^1/_3}$; also $u-v=2\sqrt{{}^1/_3}$.

Demnach wird:

$$x_1=6,\ x_2=-3+\sqrt{{}^1/_3}.\sqrt{-3}=-3+\sqrt{-1},\ x_3=-3-\sqrt{-1}.$$

13. Es ist $p={}^{11}/_4$, $q={}^{75}/_4$, ${}^1/_4q^2=({}^{75}/_8)^2$, ${}^1/_{27}p^3={}^1/_{27}.({}^{11}/_4)^3$; daher: $\sqrt{{}^1/_4q^2-{}^1/_{27}p^3}={}^1/_8.74{,}670634$; folglich:

$$u={}^1/_2\sqrt[3]{-75+74{,}670634}=-{}^1/_2.0{,}6905,$$

$$v={}^1/_2\sqrt[3]{-75-74{,}670634}=-{}^1/_2.5{,}3095;$$ folglich:

$u+v=-3$, $u-v=2{,}3095$; daher:

$$x_1=-3,\ x_2=1{}^1/_2+2\sqrt{-1}\text{ und }x_3=1{}^1/_2-2\sqrt{-1}.$$

14. Es ist $p=7$, $q=36$, $\sqrt{{}^1/_4q^2-{}^1/_{27}p^3}={}^{41}/_3\sqrt{{}^5/_3}$. Hier ist also:

$a^3+3ab=18$ und
$(3a^2+b)\sqrt{b}={}^{41}/_3\sqrt{{}^5/_3}$. Setze $b={}^5/_3$, so ist:
$3a^2+{}^5/_3={}^{41}/_3$; also $a^2=4$; daher $a=2$ und weil:
$2^3+3.2.{}^5/_3=18$ ist, so wird hiernach:

$$u=\sqrt[3]{18+{}^{41}/_3\sqrt{{}^5/_3}}=2+\sqrt{{}^5/_3},\ v=\sqrt[3]{18-{}^{41}/_3\sqrt{{}^5/_3}}=2-\sqrt{{}^5/_3};$$

Digitized by Google

daher: $u+v=(2+\sqrt{5/8})+(2-\sqrt{5/8}=4$; $u-v=2\sqrt{5/8}$;
folglich:

$x_1=4$, $x_2=-2+\sqrt{5/8}.\sqrt{-3}=-2+\sqrt{-5}$, $x_3=-2-\sqrt{-5}$.

15. Es ist $p=3$, $q=14$, $\sqrt{1/4q^2+1/27p^3}=5\sqrt{2}$. Nun ist: $a^3+3ab=-7$ und
$3a^2+b=5$. Setze hierin $b=2$, so wird $a^2=1$; also $a=-1$, weil hier der zweite Werth von a genommen werden muß, da $(-1)^3+3.(-1).2=-7$ ist; folglich:

$$u=\sqrt[3]{-7+5\sqrt{2}}=(-1+\sqrt{2})\Big|\begin{matrix}u+v=-2\\u-v=2\sqrt{2}\end{matrix}$$
$$v=\sqrt[3]{-7-5\sqrt{2}}=(-1-\sqrt{2})\Big|$$

folglich $x_1=-2$; $x_2=-1+\sqrt{2}.\sqrt{-3}$
$=-1+\sqrt{-6}$; $x_3=-1-\sqrt{-6}$.

16. Es ist $p=3$, $q=5$, $\sqrt{1/4q^2+1/27p^3}=1/2\sqrt{29}$
$=2{,}692582403567259492$; also:

$$u=\sqrt[3]{2{,}5+2{,}692582403567259492}=1{,}731654$$

$v=\sqrt[3]{-0{,}192582403567259492}=-0{,}577482$;
folglich $x_1=1{,}154172$. Dividirt man $f(x)$ durch $x-1{,}154172$, so erhält man die quadratische Gleichung $x^2+1{,}154172x+4{,}332108=0$; hieraus folgt x_2 und $x_3=-0{,}577086\pm\sqrt{-3{,}9990801375}=-0{,}577086\pm1{,}99977\sqrt{-1}$.

17. Weil $p=7$ und $q=3$, so wird:

$$x_1=\sqrt[3]{-1{,}5\pm\sqrt{(5/2)^2+(7/3)^3}}=\sqrt[3]{2{,}367001603}+$$
$$\sqrt[3]{-5{,}367001603}=+1{,}332701-1{,}750829=-0{,}418128.$$

Dividirt man die gegebene Gl. durch den Wurzelfaktor $x+0{,}418128$, so resultirt die quadratische Gleichung:

$$x^2-0{,}418128x+7{,}174831=0.$$

Hieraus folgt x_2 und $x_3=0{,}209064\pm2{,}67042\sqrt{-1}$.

18. Weil $p=7$, $q=11$, so ist $\sqrt{1/4q^2-1/27p^3}=\sqrt{(11/2)^2-(7/3)^3}$
$=4{,}1888292$; also:

$$u=\sqrt[3]{-5{,}5+4{,}1888292}=-1{,}094511$$
$$v=\sqrt[3]{-5{,}5-4{,}1888292}=-2{,}131851;$$

folglich $x_1=-1{,}094511-2{,}131851=-3{,}226362$.
Die beiden andern Werthe für x ergeben sich aus der Gleichung:

$$x^2-3{,}226362x+3{,}409412=0;$$

Digitized by Google

folglich x_2 und $x_3 = 1{,}613181 \pm \sqrt{-0{,}807058}$
$= 1{,}613181 \pm 0{,}0898364\sqrt{-1}$.

19. Hier ist $p = 4$, $q = 5$, $\sqrt{{}^1/_4 q^2 - {}^1/_{27} p^3} = \sqrt{({}^5/_2)^2 - ({}^{24}/_3)^3}$
$= 1{,}969677551$; also:

$$u = \sqrt[3]{2{,}5 + 1{,}969677551} = 1{,}647246$$

$$v = \sqrt[3]{2{,}5 - 1{,}969677551} = 0{,}809432;$$

folglich $x_1 = 1{,}647246 + 0{,}809432 = 2{,}456678$.
Aus der quadratischen Gl. $x^2 + 2{,}456678x + 2{,}035267 = 0$
folgt x_2 und $x_3 = -1{,}228339 \pm 0{,}725568\sqrt{-1}$.

20. Um das zweite Glied $-6x^2$ zu beseitigen, setze man $x = y + {}^6/_3$ und löse die erhaltene Gl. nach y auf. Setzen wir den Werth für x ein, so erhalten wir die transformirte Gleichung:
$(y+2)^3 - 6(y+2)^2 - 12(y+2) + 112 = 0$ oder:

$$y^3 - 24y + 72 = 0.$$

Es ist also $p = 24$, $q = 72$, $\sqrt{{}^1/_4 q^2 - {}^1/_{27} p^3} = \sqrt{({}^{72}/_2)^2 - ({}^{24}/_3)^3} = 28$; also

$$u = \sqrt[3]{-36 + 28} = \sqrt[3]{-8} = -2$$

$$v = \sqrt[3]{-36 - 28} = \sqrt[3]{-64} = -4;$$

folglich $y = -2 - 4 = -6$; daher $x_1 = -6 + 2 = -4$.
Aus der Gl. $x^2 - 10x + 28 = 0$ folgt x_2 und $x_3 = 5 \pm \sqrt{-3}$.

21. Setze hier zur Fortschaffung des zweiten Gliedes $x = y - {}^{12}/_3 = y - 4$ und wir erhalten die Gl.

$$y^3 - 3y - 2 = 0.$$

Da hier $p = 3$, und $q = 2$, so ist $\sqrt{{}^1/_4 q^2 - {}^1/_{27} p^3} = \sqrt{({}^2/_2)^2 - ({}^3/_3)^3} = 0$. Weil also ${}^1/_4 q^2 = {}^1/_{27} p^3$ ist, so hat diese Gl. nach §. 490. 2 drei reelle Wurzeln, wovon zwei gleiche. Es ist nämlich:

$u = \sqrt[3]{1+0} = \sqrt[3]{1}$; $v = \sqrt[3]{1-0} = \sqrt[3]{1}$; folglich $y_1 = \sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{1} = 2$, $y_2 = -1$, $y_3 = -1$; daher $x_1 = 2 - 4 = -2$; x_2 und $x_3 = -1 - 4 = -5$.

22. Setze $x = y + {}^{21}/_3 = y + 7$, so erhalten wir die Gleichung:

$$y^3 + 12y - 63 = 0.$$

Es ist also $p = 12$, $q = 63$; also $\sqrt{{}^1/_4 q^2 + {}^1/_{27} p^3} = \sqrt{({}^{63}/_2)^2 + ({}^{12}/_3)^3} = 32{,}5$; daher:

$$u = \sqrt[3]{31{,}5 + 32{,}5} = 4;\quad v = \sqrt[3]{31{,}5 - 32{,}5} = -1;$$

$$u + v = 3;\quad u - v = 5;\quad \text{also:}$$

Digitized by Google

$y_1 = 3$; $y_2 = -{}^3/_2 + {}^5/_2\sqrt{-3}$; $y_3 = -{}^3/_2 - {}^5/_2\sqrt{-3}$; folglich:
$x_1 = y + 7 = 10$; $x_2 = 5{,}5 + 2{,}5\sqrt{-3}$; $x_3 = 5{,}5 - 2{,}5\sqrt{-3}$.

23. Setze $x = \frac{y-2}{3}$, so erhalten wir die cubische Gl. in y:

$$y^3 + 15y + 70 = 0.$$

Es ist also hier $p = 15$, $q = 70$; daher:

$$\sqrt{{}^1/_4 q^2 + {}^1/_{27} p^3} = \sqrt{({}^{70}/_2)^2 + ({}^{15}/_3)^3} = 36{,}74234547;$$

$$u = \sqrt[3]{-35 + 36{,}74234547} = 1{,}203312$$

$$v = \sqrt[3]{-35 - 36{,}74234547} = -4{,}155199$$

$$u + v = 1{,}203312 - 4{,}155199 = -2{,}951887 = y;$$

folglich $x_1 = \frac{y-2}{3} = -1{,}650630$.

Aus der quadratischen Gl. $x^2 + 0{,}349370x + 2{,}423319 = 0$ folgt:

$$x_2 \text{ und } x_3 = -0{,}174685 \pm 1{,}54687\sqrt{-1}.$$

24. Hier ist $p = b^2 - 3a^2$, $q = 2a(a^2 + b^2)$; daher:

$$\sqrt{{}^1/_4 q^2 + {}^1/_{27} p^3} = \sqrt{(a(a^2+b^2))^2 + \left(\frac{b^2 - 3a^2}{3}\right)^3} =$$

$${}^1/_3 b(9a^2 + b^2)\sqrt{{}^1/_3};$$

also: $u = \sqrt[3]{a(a^2+b^2) + {}^1/_3 b(9a^2+b^2)\sqrt{{}^1/_3}}$

$$v = \sqrt[3]{a(a^2+b^2) - {}^1/_3 b(9a^2+b^2)\sqrt{{}^1/_3}}.$$

Nach Beisp. 11 ist:

$$\sqrt[3]{(z^3 + 3zy) \pm (3z^2 + y)\sqrt{y}} = z \pm \sqrt{y}.$$

Nun ist:

$$z^3 + 3zy = a(a^2 + b^2)$$

$$(3z^2 + y)\sqrt{y} = {}^1/_3(9a^2 + b^2)b\sqrt{{}^1/_3}.$$

Setzt man nun $y = {}^1/_3 b^2$, so ist $\sqrt{y} = b\sqrt{{}^1/_3}$; alsdann ist ferner:

$$3z^2 + {}^1/_3 b^2 = 3a^2 + {}^1/_3 b^2 \text{ oder:}$$

$$3z^2 = 3a^2; \text{ also } z = a, \text{ daher:}$$

$$z^3 + 3zy = a^3 + ab^2 = a(a^2 + b^2); \text{ folglich:}$$

$$\sqrt[3]{a(a^2+b^2) \pm {}^1/_3(9a^2+b^2)b\sqrt{{}^1/_3}} = a \pm b\sqrt{{}^1/_3}; \text{ also:}$$

$$u = a + b\sqrt{{}^1/_3},\ v = a - b\sqrt{{}^1/_3}$$

$$u + v = (a + b\sqrt{{}^1/_3}) + (a - b\sqrt{{}^1/_3}) = 2a$$

$$u - v = (a + b\sqrt{{}^1/_3}) - (a - b\sqrt{{}^1/_3}) = 2b\sqrt{{}^1/_3}.$$ Daher ist:

$$x_1 = 2a;\ x_2 \text{ und } x_3 = -a \pm b\sqrt{{}^1/_3}.\sqrt{-3} = -a \pm b\sqrt{-1}.$$

Digitized by Google

24. β) Ist in der Gleichung $x^3+px+q=0$ der Ausdruck $^1/_4q^2=-^1/_{27}p^3$, so ist $q^2=-^4/_{27}p^3=^4/_9p^2.(-^1/_3p)$; folglich $q=^2/_3p\sqrt{-^1/_3p}$. Setzt man diesen Werth für q in die gegebene Gleichung, so hat man:

$$x^3+px+^2/_3p\sqrt{-^1/_3p}=0.$$

Nun suche man nach §. 172. b diese Summe in das Produkt dreier Faktoren zu zerlegen. Man wird sich leicht überzeugen, daß:

$$x^3+px+^2/_3p\sqrt{-^1/_3p}=x^3+2x^2\sqrt{-^1/_3p}-2x^2\sqrt{-^1/_3p}+$$
$$^4/_3px-^1/_3px+^2/_3p\sqrt{-^1/_3p}=0 \text{ oder}$$
$$x(x^2+2x\sqrt{-^1/_3p}-^1/_3p)-2\sqrt{-^1/_3p}(x^2+2x\sqrt{-^1/_3p}-^1/_3p)=0;$$

daher: $(x^2+2x\sqrt{-^1/_3p}-^1/_3p)(x-2\sqrt{-^1/_3p})=0$ oder:

$$(x+\sqrt{-^1/_3p})^2(x-2\sqrt{-^1/_3p})=0; \text{ folglich:}$$
$$(x+\sqrt{-^1/_3p})^2=0; \text{ also } x_1 \text{ und } x_2=-\sqrt{-^1/_3p}$$
$$x-2\sqrt{-^1/_3p}=0; \text{ also } x_3=2\sqrt{-^1/_3p}.$$

25. Ist in der Gl. $x^3-px+q=0$

$$^1/_4q^2<^1/_{27}p^3,$$

so wird die Wurzelgröße $\sqrt{^1/_4q^2-^1/_{27}p^3}$ imaginär und sowohl $^1/_2q+\sqrt{^1/_4q^2-^1/_{27}p^3}$ als auch $^1/_2q-\sqrt{^1/_4q^2-^1/_{27}p^3}$ sind ebenfalls imaginär, weil jeder dieser beiden Ausdrücke einen imaginären Theil enthält, der das Ganze imaginär macht. Daraus darf aber nicht der Schluß gezogen werden, daß keine der Wurzeln reell sei; sie sind im Gegentheil alle drei reell (§. 490. 3), wie aus Folgendem hervorgeht. Setzen wir nämlich zur Abkürzung die imaginären Wurzelgrößen $\sqrt{^1/_4q^2-^1/_{27}p^3}$ oder $\sqrt{(^1/_{27}p^3-^1/_4q^2).(-1)}=\sqrt{-b^2}=b\sqrt{-1}$, wo b eine reelle Größe $=\sqrt{^1/_{27}p^3-^1/_4q^2}$ ist und setzen wir ferner $^1/_2q=a$, so wird:

$$x=-(a+b\sqrt{-1})^{1/3}-(a-b\sqrt{-1})^{1/3}.$$

Nach §. 471. 24 drückt sich der Werth für x, wenn $a>b$, alsdann aus durch folgende Reihe:

$$1.\ x=2a^{1/3}\left\{1+\frac{1.2}{3.6}\left(\frac{b}{a}\right)^2-\frac{5.8}{9.12}\left(\frac{b}{a}\right)^2A_1+\frac{11.14}{15.18}\left(\frac{b}{a}\right)^2A_2-\right.$$
$$\left.\frac{17.20}{21.24}\left(\frac{b}{a}\right)^2A_3+\frac{23.26}{27.30}\left(\frac{b}{a}\right)^2A_4-\ldots\right\}$$

Wenn aber $b>a$ ist, so erhalten wir:

$$2.\ x=-2b^{1/3}\left\{^1/_3\frac{a}{b}-\frac{2.5}{6.9}\left(\frac{a}{b}\right)^2A_1+\frac{8.11}{12.15}\left(\frac{a}{b}\right)^2A_2-\frac{14.17}{18.21}\left(\frac{a}{b}\right)^2A_3\right.$$
$$\left.+\frac{20.23}{24.27}\left(\frac{a}{b}\right)^2A_4-\ldots\right\}$$

Digitized by Google

26. Hier ist $p = 19$, $q = 30$; also:

$$\sqrt{{}^1/_4 q^2 - {}^1/_{27} p^3} = \sqrt{\left(\frac{30}{2}\right)^2 - \left(\frac{19}{3}\right)^3} = \sqrt{-\frac{784}{27}} = {}^1/_9 \sqrt{2352}\sqrt{-1}.$$

Es ist daher:

$$x = \sqrt[3]{-15 + {}^1/_9\sqrt{2352}\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{-15 - {}^1/_9\sqrt{2352}\sqrt{-1}}.$$

Setzen wir $a = -15$, $b = {}^1/_9\sqrt{2352}$, also $a > b$, so ist der Werth für x nach 25. 1:

$$x_1 = -2\sqrt[3]{15}\left\{1 + \frac{1.2.2352}{3.6.9^2.15^2} - \frac{5.8.2352}{9.12.9^2.15^3}A_1 + \right.$$

$$\left. \frac{11.14.2352}{15.18.9^2.15^2}A_2 - \frac{17.20.2352}{21.24.9^2.15^2}A_3 + \frac{23.26.2352}{27.30.9^2.15^2}A_4 - \ldots\right\}$$

$$= -4{,}9324242(1 + 0{,}0143392775 - 0{,}0006853829 + 0{,}0000504498 - 0{,}0000043921 + 0{,}0000004184 - 0{,}0000000421)$$

$$= -4{,}9324242 \times 1{,}0137003286 = -5.$$

Die beiden andern Wurzelwerthe ergeben sich aus der quadratischen Gleichung:

$$x^2 - 5x + 6 = 0;$$

daher: $x_2 = 3$ und $x_3 = 2$.

27. Verwandelt man nach den §§. 200 und 415 die Coefficienten der Gleichung in gewöhnliche Brüche, so erhält man, weil beide gemischte periodische Decimalbrüche sind:

$$3611\ldots = \frac{36^1/_9}{100} = {}^{13}/_{36} \text{ und } 0{,}055\ldots = \frac{{}^5/_9}{10} = {}^1/_{18}.$$

Dadurch entsteht die Gl.:

$$x^3 - {}^{13}/_{36}x + {}^1/_{18} = 0.$$

Setzt man zur Fortschaffung der Brüche $x = \frac{y}{36}$, so wird:

$$y^3 - 468y + 2592 = 0.$$

Es ist also: $p = 468$, $q = 2592$, $\sqrt{{}^1/_4 q^2 - {}^1/_{27} p^3} = \sqrt{({}^{2592}/_2)^2 - ({}^{468}/_3)^3} = \sqrt{-2116800}$.

Es ist daher:

$$x = \sqrt[3]{-1296 + \sqrt{-2116800}} + \sqrt[3]{-1296 - \sqrt{-2116800}}.$$

Nun ist ferner $a = -1296$, $b = 1454{,}922672\sqrt{-1}$, also $b > a$; daher berechnet sich der Werth für $a \pm b\sqrt{-1}$ nach Nr. 25. 2 und wir erhalten:

$$2\sqrt[3]{1454{,}922672}\{0{,}2969072 - 0{,}04362253 + 0{,}0169201 - 0{,}0084522 + 0{,}0047603 - 0{,}0028764 + 0{,}0018205 - 0{,}0011906 + 0{,}0007999 - 0{,}0005464 + 0{,}0003792 - 0{,}0002666 +$$

Digitized by Google

$$+0{,}0001891 - 0{,}0001353 + 0{,}0000975 - 0{,}0000708 + 0{,}0000517 - 0{,}0000376 + 0{,}0000276 \ldots .\} =$$
$$22{,}662.0{,}2647548 = 5{,}99987 = 6.$$

Folglich ist $y = 6$; daher $x_1 = {}^6/_{36} = {}^1/_6 = 0{,}16666\ldots$

Die beiden andern Wurzelwerthe ergeben sich aus:

$$x^2 + {}^1/_6 x - {}^1/_3 = 0.$$

Hieraus folgt: $x = -{}^1/_{12} \pm {}^7/_{12}$; daher:

$$x_2 = \frac{-1+7}{12} = {}^1/_2 = 0{,}5; \quad x_3 = \frac{-1-7}{12} = -{}^2/_3 = -0{,}666\ldots.$$

28. Man setze $\sqrt[4]{x} = y$, so wird $x = y^2$ und $x^3 = (y^2)^3 = y^6$; daher: $\sqrt{x^3} = \sqrt{y^3}$.

Wir haben also die Gleichung:

$$\sqrt{y^3} = 12 - y.$$

Erhebe diese Gleichung ins Quadrat, so wird:

$$y^3 - y^2 + 24y - 144 = 0.$$

Zur Fortschaffung des zweiten Gliedes setze $y = z + {}^1/_3$, so hat man: $z^3 + {}^{71}/_3 z - {}^{3674}/_{27} = 0$.

Um die Brüche aus dieser Gl. zu beseitigen, setze man $z = \frac{u}{3}$, so ist: $u^3 + 213u - 3674 = 0$.

Es ist daher:

$$u = \sqrt[3]{1837 + \sqrt{({}^{3674}/_2)^2 + ({}^{213}/_3)^3}} + \sqrt[3]{1837 - \sqrt{({}^{3674}/_2)^2 + ({}^{213}/_3)^3}}$$
$$= \sqrt[3]{1837 + \sqrt{3732480}} + \sqrt[3]{1837 - \sqrt{3732480}}$$
$$= \sqrt[3]{3768{,}962732128} + \sqrt[3]{-94{,}962732128}$$
$$= 15{,}56230 - 4{,}56230 = 11.$$

Da also $u = 11$, so ist $z = {}^{11}/_3$; daher $y = {}^{11}/_3 + {}^1/_3 = 4$; hieraus folgt $\sqrt{x} = 4$; also $x = 16$. Nun ist ferner:

$$\frac{y^3 - y^2 + 24y - 144}{y - 4} = y^2 + 3y + 36 = 0;$$

mithin: $y^2 + 3y + 36 = 0$; demnach:

$$\sqrt{x} = y = -{}^1/_2(3 \mp \sqrt{-135}); \text{ also:}$$
$$x = {}^1/_4(3 \mp \sqrt{-135})^2 = -{}^1/_2(63 \pm 3\sqrt{-135})$$
$$= -{}^1/_2(63 \pm 34{,}85685\sqrt{-1}) = -31{,}5 \pm 17{,}42842\sqrt{-1}.$$

29. Nach der Methode von Clausen läßt der Wurzelwerth der Gleichung $x^3 - px - q = 0$ sich in folgenden Kettenbruch verwandeln.

Setzt man in dieser Gl. $x = y\sqrt{{}^1/_3 p}$, so erhält man:

Digitized by Google

$$(y\sqrt{1/3p})^3 - yp\sqrt{1/3p} - q = 0;$$

$$y^3 - 3y - \frac{q\sqrt{1/3p}}{1/9p^2} = 0;$$

$$y^3 - 3y - q\sqrt{\left(\frac{3}{p}\right)^3} = 0.$$

Setze jetzt $1/2q\sqrt{\left(\frac{3}{p}\right)^3} = a$, so ist $q\sqrt{\left(\frac{3}{p}\right)^3} = 2a$ und wir erhalten:

(1) $y^3 - 3y - 2a = 0$, wo $a < 1$.

Nun setze man $y = 1 + \frac{2\sqrt{1/2(1+a)}}{y_1}$, so resultirt aus (1):

$$\left\{1 + \frac{2\sqrt{1/2(1+a)}}{y_1}\right\}^3 - 3\left\{1 + \frac{2\sqrt{1/2(1+a)}}{y_1}\right\} - 2a = 0;$$

$$1 + \frac{6\sqrt{1/2(1+a)}}{y_1} + \frac{6(1+a)}{y_1^2} +$$

$$\frac{4(1+a)\sqrt{1/2(1+a)}}{y_1^3} - 3 - \frac{6\sqrt{1/2(1+a)}}{y_1} - 2a = 0;$$

$$(1+a)y_1^3 - 3y_1(1+a) - 2(1+a)\sqrt{1/2(1+a)} = 0$$

$$y_1^3 - 3y_1 - 2\sqrt{1/2(1+a)} = 0$$

oder wenn wir $\sqrt{1/2(1+a)} = a_1$ setzen:

(2) $y_1^3 - 3y_1 - 2a_1 = 0$,

eine Gleichung, welche dieselbe Form hat, wie (1). Setzt man hierin $y_1 = 1 + \frac{2\sqrt{1/2(a+1)}}{y_2}$, so erhalten wir:

(3) $y_2^3 - 3y_2 - 2a_2 = 0$,

wenn $\sqrt{1/2(1+a)} = a_2$ gesetzt wird;

(4) $y_3^3 - 3y_3 - 2a_3 = 0$ für $\sqrt{1/2(1+a)} = a_3$ u. s. w.

Auf diese Weise erhalten wir für y folgenden Kettenbruch:

$$y = 1 + \cfrac{2a_1}{1 + \cfrac{2a_2}{1 + \cfrac{2a_3}{1 + \cfrac{2a_4}{1 + \cfrac{2a_5}{1 + \ldots}}}}}$$

30. Löst man diese Gleichung nach der Methode von Clausen auf, so hat man, da $p = 2100$, $q = 24000$ ist:

Digitized by Google

$24000 . \sqrt{(^3/_{2100})^3} = 2a$; hieraus folgt:

$a = 12000\sqrt{(^1/_{700})^3} = {}^{120}/_7 . {}^1/_{70}\sqrt{7} = 0{,}647439$

$a_1 = \sqrt{^1/_2(1+0{,}647439)} = \sqrt{0{,}823969} = 0{,}907727$

$a_2 = \sqrt{^1/_2(1+0{,}907727)} = \sqrt{0{,}953864} = 0{,}976659$

$a_3 = \sqrt{^1/_2(1+0{,}976659)} = \sqrt{0{,}9883295} = 0{,}994147$

$a_4 = \sqrt{^1/_2(1+0{,}994147)} = \sqrt{0{,}9970735} = 0{,}998535$

$a_5 = \sqrt{^1/_2(1+0{,}998535)} = \sqrt{0{,}9992675} = 0{,}999633$

$a_6 = \sqrt{^1/_2(1+0{,}999633)} = \sqrt{0{,}9998165} = 0{,}999908$

$a_7 = \sqrt{^1/_2(1+0{,}999908)} = \sqrt{0{,}999954} = 0{,}999977$ u. ſ. w.

Setzt man dieſe Werthe für a_1, a_2, a_3 u. ſ. w. in den im vorigen Beiſpiel für y gefundenen Kettenbruch, ſo erhält man: $y = 1{,}9173$;

daher: $x = 1{,}9173 . \sqrt{^{2100}/_3} = 1{,}9173 . \sqrt{700} = 50{,}726$.

Die beiden andern Wurzelwerthe der Gleichung ergeben ſich aus: $x^2 + 50{,}726x + 473{,}127 = 0$;

nämlich: $x = -25{,}363 \pm 13{,}044$;

daher: $x_2 = -12{,}319$ und $x_3 = -38{,}407$.

31. Nach Hulbe wird die Gleichung $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ auf folgende Weiſe aufgelöſt.

Setzt man $x = \frac{1}{z} + h$, alsdann erhalten wir folgende Gleichung:

$$\left(\frac{1}{z}+h\right)^3 + p\left(\frac{1}{z}+h\right)^2 + q\left(\frac{1}{z}+h\right) + r = 0.$$

Entwickeln und reduciren wir dieſe Gleichung, ſo wird:

$(h^3 + ph^2 + qh + r)z^3 + (3h^2 + 2ph + q)z^2 + (3h + p)z + 1 = 0$ oder:

$$(1)\quad z^3 + \frac{3h^2+2ph+q}{h^3+ph^2+qh+r}z^2 + \frac{3h+p}{h^3+ph^2+qh+r}z + \frac{1}{h^3+ph^2+qh+r} = 0.$$

Dieſe Gleichung hat die Form $z^3 + Az^2 + Bz + C = 0$. Um dieſelbe nach §. 486. 5 auflöſen zu können, ſetze man $B = {}^1/_3A^2$, ſo erhält man, wenn $B = \frac{3h+p}{h^3+ph^2+qh+r}$ und ${}^1/_3A^2 = {}^1/_3\left(\frac{3h^2+2ph+q}{h^3+ph^2+qh+r}\right)^2$ iſt, zur Beſtimmung von h, folgende Gleichung:

Digitized by Google

$$\frac{3h+p}{h^3+ph^2+qh+r} = {}^1/_3\left(\frac{3h^2+2ph+q}{h^3+ph^2+qh+r}\right)^2 \text{ oder:}$$

$$3(3h+p)(h^3+ph^2+qh+r) = (3h^2+2ph+q)^2 \text{ oder:}$$

$$h^2 - \frac{pq-9r}{3q-p^2}h = \frac{q^2-3pr}{3q-p^2}; \text{ hieraus folgt:}$$

$$h = {}^1/_2\left\{\frac{pq-9r \pm \sqrt{(pq-9r)^2+4(q^2-3pr)(3q-p^2)}}{3q-p^2}\right\}$$

Ist nun $p=3$, $q=-177$ und $r=751$, so ist:

$$h = {}^1/_2\left\{\frac{-7290 \pm \sqrt{53144100-53071200}}{-540}\right\}$$

$$= {}^1/_2 . \frac{-7290 \pm 270}{-540}; \text{ folglich:}$$

$$h_1 = {}^1/_2 . 13 = 6{}^1/_2 \text{ und } h_2 = {}^1/_2 . 14 = 7.$$

Setzen wir die Werthe für p, q, h, r in Gleichung (1), so wird: $z^3+6z^2+12z+{}^1/_2=0$.

Weil nun nach §. 468. 5:

$$z = -{}^1/_3 A + \sqrt[3]{{}^1/_{27}A^3 - C}$$

und $A=6$, $C={}^1/_2$ ist, so wird:

$$z = -{}^1/_3 . 6 + \sqrt[3]{\left(\frac{6}{3}\right)^3 - {}^1/_2} = -2 + {}^1/_2\sqrt[3]{60} = -0{,}0425661794;$$

folglich: $x = \frac{1}{-0{,}0425661794} + 7 = -16{,}492829.$

Die beiden andern Wurzelwerthe der Gleichung ergeben sich aus der Gleichung:

$$x^2 - 13{,}492829x + 45{,}5349514 = 0,$$

nämlich x_2 und $x_3 = -6{,}746414 \pm 0{,}14429\sqrt{-1}$.

Goniometrische Auflösung der cubischen Gleichungen.

(Heis §. 96.)

§. 492. Die Cardanische Formel liefert für die Gleichung $x^3+px+q=0$ als ersten Wurzelwerth:

$$x = \sqrt[3]{-{}^1/_2 q + \sqrt{{}^1/_4 q^2 + {}^1/_{27}p^3}} + \sqrt[3]{-{}^1/_2 q - \sqrt{{}^1/_4 q^2 + {}^1/_{27}p^3}},$$

dem man auch folgende Form geben kann:

$$(1)\quad x = \sqrt[3]{-{}^1/_2 q + {}^1/_2 q\sqrt{1+{}^4/_{27}\frac{p^3}{q^2}}} + \sqrt[3]{-{}^1/_2 q - {}^1/_2 q\sqrt{1+{}^4/_{27}\frac{p^3}{q^2}}}.$$

Digitized by Google

Man setze nun, da die Größe $^4/_{27}\frac{p^3}{q^2}$ jedes positiven Werthes fähig ist:

$$(2)\quad \operatorname{tang}\alpha^2 = {}^4/_{27}\frac{p^3}{q^2},\ \text{also}\ \operatorname{tang}\alpha = \frac{2p}{3q}\sqrt{{}^1/_3p}.$$

Hieraus folgt $^1/_2q = \frac{\sqrt{(^1/_3p)^3}}{\operatorname{tang}\alpha}$ oder, weil $\frac{1}{\operatorname{tang}\alpha} = \operatorname{cotg}\alpha$ ist, so ist auch:

$$(3)\quad {}^1/_2q = \sqrt{(^1/_3p)^3}\operatorname{cotg}\alpha.$$

Führen wir diesen Werth für $^1/_2q$ ein und beachten wir ferner, daß $\sqrt{1+\operatorname{tang}\alpha^2} = \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$ ist, so wird aus (1):

$$x = \sqrt{{}^1/_3p}\left\{\sqrt[3]{\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}} - \sqrt[3]{\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}}\right\}$$

$$= \sqrt{{}^1/_3p}\left\{\sqrt[3]{\operatorname{tang}{}^1/_2\alpha} - \sqrt[3]{\operatorname{cotg}{}^1/_2\alpha}\right\}$$

folglich, wenn man noch setzt:

$$(4)\quad \sqrt[3]{\operatorname{tang}{}^1/_2\alpha} = \operatorname{tang}\beta,\ \text{wird:}$$

$$(5)\quad x_1 = \sqrt{{}^1/_3p}\{\operatorname{tang}\beta - \operatorname{cotg}\beta\} = \sqrt{{}^1/_3p}\left\{\frac{\sin\beta^2 - \cos\beta^2}{\sin\beta\cos\beta}\right\}$$

$$= -2\sqrt{{}^1/_3p}.\frac{\cos 2\beta}{\sin 2\beta} = -\sqrt{{}^4/_3p}\operatorname{cotg}2\beta.$$

Berechnet man daher aus (2) und (4) die beiden Hülfswinkel α und β, so findet man aus (5) die reelle Wurzel der Gleichung $x^3+px+q=0$. Für diesen Fall sind die beiden andern imaginären Wurzeln dieser Gleichung:

$$x_2 \text{ und } x_3 = -{}^1/_2x_1 \pm \sqrt{-{}^3/_4x_1 - p}.$$

Substituirt man in diesen Ausdruck den Werth für x_1 und entwickelt denselben, so findet man:

$$x_2 \text{ und } x_3 = \frac{\sqrt{{}^1/_3p}}{\sin 2\beta}(\cos\beta \pm \sqrt{-3} \text{ oder:}$$

$$= -{}^1/_2x_1 \pm {}^1/_2x_1\frac{\sqrt{-3}}{\cos 2\beta}.$$

Die Wurzeln der Gleichung $x^3+px-q=0$ sind unter der Voraussetzung der vorhergehenden Bestimmung der Hülfswinkel:

Digitized by Google

$$x_1 = +\sqrt{4/3 p}\cot g\, 2\beta$$

$$x_2 \text{ und } x_3 = -\tfrac{1}{2}x_1 \mp x_1\frac{\sqrt{-3}}{\cos 2\beta},$$

also die entgegengesetzten Wurzelwerthe der Gl. $x^3+px+q=0$.

§. 493. Aus der Gleichung $x^3-px+q=0$, worin also p negativ ist, erhalten wir:

$$(1)\quad x=\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q+\tfrac{1}{2}q\sqrt{1-\tfrac{4}{27}\frac{p^3}{q^2}}}+\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q-\tfrac{1}{2}q\sqrt{1-\tfrac{4}{27}\frac{p^3}{q^2}}}.$$

Aus der Relation $\tfrac{1}{4}q^2-\tfrac{1}{27}p^3>0$ folgt aber $\tfrac{4}{27}\frac{p^3}{q^2}<1$, also ein ächter Bruch, mithin können wir setzen:

$$(2)\quad \sin\gamma^2=\tfrac{4}{27}\frac{p^3}{q^2} \text{ und daher:}$$

$$(3)\quad \sin\gamma=\frac{p}{3q}\sqrt{4/3 p}. \text{ Hieraus folgt:}$$

$$(4)\quad \tfrac{1}{2}q=\frac{1}{\sin\gamma}\cdot\sqrt{(1/3 p)^3}.$$

Daher wird aus (1), wenn wir die Werthe substituiren:

$$x=-\sqrt{1/3 p}\left\{\sqrt[3]{\frac{1-\cos\gamma}{\sin\gamma}}+\sqrt[3]{\frac{1+\cos\gamma}{\sin\gamma}}\right\}$$

$$=-\sqrt{1/3 p}\left\{\sqrt[3]{\tang\tfrac{1}{2}\gamma}+\sqrt[3]{\cotg\tfrac{1}{2}\gamma}\right\}$$

Setzt man endlich (5) $\sqrt[3]{\tang\tfrac{1}{2}\gamma}=\tang\delta$, so resultirt:

$$x=-\sqrt{1/3 p}\left\{\tang\delta+\cotg\delta\right\}$$

$$=-\sqrt{1/3 p}\cdot\frac{2}{\sin 2\delta}=-\frac{\sqrt{4/3 p}}{\sin 2\delta}.$$

Für die beiden imaginären Wurzeln findet man:

$$x_2 \text{ und } x_3=\frac{\sqrt{1/3 p}}{\sin 2\delta}(1\pm\cos\delta\sqrt{-3}.$$

Für die Gleichung $x^3-px-q=0$, worin außer p auch das dritte Glied q negativ ist, führt die gleiche Entwickelung zu dem Resultate:

$$x_1=+\frac{\sqrt{4/3 p}}{\sin 2\delta}$$

Digitized by Google

$$x_2 \text{ und } x_3 = -\frac{\sqrt{1/3p}}{\sin 2\delta}(1 \pm \cos\delta\sqrt{-3}),$$

d. h. zu denselben Wurzelwerthen, aber mit entgegengesetzten Vorzeichen.

§. 494. Bei der Entwickelung der Wurzelwerthe für die Gleichung $x^3 - px \pm q = 0$ galt die Voraussetzung, daß $1/4q^2 > 1/27p^3$; wenn aber $1/4q^2 < 1/27p^3$ oder $4p^3 > 27q^2$ ist, so findet der casus irreducibilis statt und die Cardanische Formel liefert alsdann die Wurzelwerthe unter imaginärer Form, obgleich die Gleichung in der That drei reelle Wurzeln hat. Diese lassen sich nun vermittelst der trigonometrischen Formeln auf die einfachste Weise finden. Es ist nämlich:

$$\begin{aligned}\sin 3\varepsilon &= 3\cos\varepsilon^2\sin\varepsilon - \sin\varepsilon^3\\ &= 3\sin\varepsilon(1-\sin\varepsilon^2) - \sin\varepsilon^3\\ &= 3\sin\varepsilon - 4\sin\varepsilon^3;\ \text{daher}\\ 4\sin\varepsilon^3 &- 3\sin\varepsilon + \sin 3\varepsilon = 0 \text{ oder}\\ (1)\ \sin\varepsilon^3 &- 3/4\sin\varepsilon + 1/4\sin 3\varepsilon = 0.\end{aligned}$$

Setzt man in die Gl. (1) $\frac{x}{r} = \sin\varepsilon$, so verwandelt sich Gl. (1) in folgende:

$$(2)\ x^3 - 3/4r^2x + 1/4r^3\sin 3\varepsilon = 0.$$

Wenn nun diese Gleichung mit $x^3 - px \pm q = 0$ identisch sein soll, so muß:

$$(3)\ 3/4r^2 = p \text{ und } (4)\ 1/4r^3\sin 3\varepsilon = \pm q \text{ sein.}$$

Aus (3) folgt $r = \pm\sqrt{4/3p}$ und

aus (4) „ $\sin 3\varepsilon = \frac{4q}{r^3}$ oder, wenn wir hierin den Werth

für r setzen: $\sin 3\varepsilon = \frac{3q}{p\sqrt{4/3p}}$.

Da nun sowohl r als auch $\sin 3\varepsilon$ bekannt sind, so ist die gesuchte Wurzel:

$$x_1 = r\sin\varepsilon = +\sqrt{4/3p}\sin\varepsilon.$$

Die beiden andern Wurzeln werden auf folgende Weise gefunden: Weil nämlich:

$$\begin{aligned}\sin 3\varepsilon &= \sin(180^0 - 3\varepsilon) = \sin(360^0 + 3\varepsilon) = \sin(540^0 - 3\varepsilon)\\ &= \sin(720^0 + 3\varepsilon) \text{ u. s. w.},\end{aligned}$$

so kann man also statt des aus den trigonometrischen Tafeln unmittelbar hervorgehenden Bogens 3ε auch die Bogen $180^0 - 3\varepsilon$, $360^0 + 3\varepsilon$ u. s. w. nehmen und folglich in den Ausdrücken für ε auch $60^0 - \varepsilon$, $120^0 + \varepsilon$, $180^0 - \varepsilon$, $240^0 + \varepsilon$ u. s. w. setzen, so daß man für x folgende Werthe erhält:

Digitized by Google

$$x_1 = r\sin\varepsilon$$
$$x_2 = r\sin(60^0 - \varepsilon)$$
$$x_3 = r\sin(120^0 + \varepsilon)$$
$$x_4 = r\sin(180^0 - \varepsilon)$$
$$x_5 = r\sin(240^0 + \varepsilon)$$
$$x_6 = r\sin(300^0 - \varepsilon).$$

Die folgenden Werthe sind den vorstehenden identisch, indem z. B. $x_7 = r\sin(360^0+\varepsilon) = r\sin\varepsilon$, also $x_7 = x_1$ sein muß u. s. w. Aber auch die 6 vorstehenden reduciren sich auf nur 3 verschiedene: denn $x_1 = x_4$, weil $\sin\varepsilon = \sin(180^0 - \varepsilon)$; $x^2 = x_3$, weil $\sin(120^0+\varepsilon) = \sin(180^0-(60^0-\varepsilon)) = \sin(60^0-\varepsilon)$; $x_5 = x_6$, weil $\sin(240^0+\varepsilon) = \sin[180^0+(60^0+\varepsilon)] = -\sin(60^0+\varepsilon)$ und auch $\sin(300^0-\varepsilon) = \sin[360^0-(60^0+\varepsilon)] = -\sin(60^0+\varepsilon)$.
Demnach sind die drei Wurzelwerthe der Gleichung $x^3 - px + q = 0$ folgende:

$$x_1 = r\sin\varepsilon = +\sqrt{{}^4/_3 p}\sin\varepsilon;$$
$$x_2 = r\sin(60^0-\varepsilon) = +\sqrt{{}^4/_3 p}\sin(60^0-\varepsilon)$$
$$x_3 = -r\sin(60^0+\varepsilon) = -\sqrt{{}^4/_3 p}\sin(60^0+\varepsilon).$$

Aus der Gleichung $x^3 - px - q = 0$ erhält man die nämlichen Werthe für die Wurzeln, aber mit entgegengesetztem Vorzeichen, nämlich:

$$x_1 = -\sqrt{{}^4/_3 p}\sin\varepsilon;\quad x_2 = -\sqrt{{}^4/_3 p}\sin(60^0-\varepsilon);$$
$$x_3 = +\sqrt{{}^4/_3 p}\sin(60^0+\varepsilon).$$

§. 495. Um die Uebersicht zu erleichtern, wollen wir die in den vorstehenden §§. erhaltenen Resultate hier geordnet zusammenstellen:

I. Gleichung: $x^3 + px + q = 0$

$$\tan\alpha = \frac{p}{3q}\sqrt{{}^4/_3 p}$$
$$\tan\beta = \sqrt[3]{\tan{}^1/_2\alpha}$$
$$x_1 = -\sqrt{{}^4/_3 p}\,.\cot 2\beta$$
$$x_2 \text{ und } x_3 = -{}^1/_2 x_1 \mp {}^1/_2 x_1 \frac{\sqrt{-3}}{\cos 2\beta}.$$

II. Gleichung: $x^3 + px - q = 0$

$$\tan\alpha = \frac{p}{3q}\sqrt{{}^4/_3 p}$$
$$\tan\beta = \sqrt[3]{\tan{}^1/_2\alpha}$$
$$x_1 = +\sqrt{{}^4/_3 p}\,.\cot 2\beta$$
$$x_2 \text{ und } x_3 = -{}^1/_2 x_1 \pm {}^1/_2 x_1 \frac{\sqrt{-3}}{\cos 2\beta}.$$

Digitized by Google

III. Gleichung: $x^3 - px + q = 0$ und $4p^3 < 27q^2$

$$\sin\gamma = \frac{p}{3q}\sqrt{{}^4/_3 p}$$

$$\tan\delta = \sqrt[3]{\tan {}^1/_2\gamma}$$

$$x_1 = -\frac{\sqrt{{}^4/_3 p}}{\sin 2\delta}$$

$$x_2 \text{ und } x_3 = +\frac{\sqrt{{}^1/_3 p}}{\sin 2\delta}(1 \pm \cos 2\delta\sqrt{-3}).$$

IV. Gleichung: $x^3 - px - q = 0$ und $4p^3 < 27q^2$

$$\sin\gamma = \frac{p}{3q}\sqrt{{}^4/_3 p}$$

$$\tan\delta = \sqrt[3]{\tan {}^1/_2\gamma}$$

$$x_1 = +\frac{\sqrt{{}^4/_3 p}}{\sin 2\delta}.$$

$$x_2 \text{ und } x_3 = -\frac{\sqrt{{}^1/_3 p}}{\sin 2\delta}(1 \pm \cos 2\delta\sqrt{-3}).$$

V. Gleichung: $x^3 - px + q = 0$ und $4p^3 > 27q^2$ oder $4p^3 = 27q^2$.

$$\sin 3\varepsilon = \frac{3q}{p\sqrt{{}^4/_3 p}}$$

$$x_1 = \sqrt{{}^4/_3 p}\sin\varepsilon;\ x_2 = \sqrt{{}^4/_3 p}\,.\,\sin(60^0 - \varepsilon);$$

$$x_3 = -\sqrt{{}^4/_3 p}\,.\,\sin(60^0 + \varepsilon).$$

VI. Gleichung: $x^3 - px - q = 0$ und $4p^3 > 27q^2$ oder $4p^3 = 27q^2$

$$\sin 3\varepsilon = \frac{3q}{p\sqrt{{}^4/_3 p}}$$

$$x_1 = -\sqrt{{}^4/_3 p}\,.\,\sin\varepsilon;\ x_2 = -\sqrt{{}^4/_3 p}\,.\,\sin(60^0 - \varepsilon);$$

$$x_3 = +\sqrt{{}^4/_3 p}\,.\,\sin(60^0 + \varepsilon).$$

§. 496. Auflösungen der Beispiele in Heis §. 96.

1. Diese Gleichung ist von der Form II des §. 495, wo $p = 3$ und $q = 5$ ist.

Es ist also: $\tan\alpha = \frac{p}{3q}.\sqrt{{}^4/_3 p} = {}^3/_{15}\sqrt{{}^{12}/_3} = {}^2/_5$

$$\log\tan\alpha = 9{,}6020600 - 10$$

$$\alpha = 21^0 48' 5{,}07''$$

$${}^1/_2\alpha = 10^0 54' 2{,}54''$$

$$\log\tan 10^0 54' 2{,}54'' = 9{,}2846165 - 10$$

Digitized by Google

$$\log\sqrt[3]{\operatorname{tang}^1/_2\alpha} = 9{,}7615388 - 10 = \log\operatorname{tang}\beta$$
$$\text{also } \beta = 30^0 0' 20{,}44''$$
$$\left.\begin{array}{r}\log\operatorname{cotg} 2\beta = 9{,}7612406 - 10\\ \log\sqrt[4]{3}p = 0{,}3010300\end{array}\right\} \text{addirt, gibt}$$
$$\log x = 0{,}0622706;\ \text{also}$$
$$x_1 = 1{,}154171.$$

Suchen wir jetzt den Werth für $\frac{\sqrt{3}}{\cos 2\beta}$ zu bestimmen, so haben wir:

$$\log\sqrt{3} = 0{,}2385606$$
$$\log\cos 2\beta = 9{,}6988210 - 10.$$

Daher ist $\frac{\log\sqrt{3}}{\log\cos 2\beta} = 0{,}5397396$, wozu die Zahl 3,46529 gehört. Daher ist:

$$x_2 \text{ und } x_3 = -{}^1/_2 . 1{,}154171 \pm {}^1/_2 . 1{,}154171 . 3{,}46529\sqrt{-1}$$
$$= -0{,}577085 \pm 1{,}999767\sqrt{-1}.$$

2. Diese Gleichung ist von der Form I im §. 495, und es ist $p = 7$ und $q = 3$. Daher ist:

$$\operatorname{tang}\alpha = {}^7/_9\sqrt{{}^{28}/_3}$$
$$\log 7 = 0{,}8450980$$
$$\log 9 = 0{,}9542425$$
$$\log\frac{p}{3q} = 0{,}8908555 - 1 \quad (1)$$
$$\log 28 = 1{,}4471580$$
$$\log 3 = 0{,}4771213$$
$$\log\sqrt[4]{3}p = 0{,}9700367$$
$$\log\sqrt[4]{3}p = 0{,}4850183 \quad (2).$$

Durch Addition von (1) und (2) erhalten wir:

$$\log\operatorname{tang}\alpha = 10{,}3758738 - 10$$
$$\alpha = 67^0 10' 34{,}54''$$
$${}^1/_2\alpha = 33^0 35' 17{,}27''$$
$$\log\operatorname{tang}{}^1/_2\alpha = 29{,}8222334 - 30$$
$$\log\sqrt[3]{\operatorname{tang}^1/_2\alpha} = \log\operatorname{tang}\beta = 9{,}9407444 - 10$$
$$\beta = 41^0 6' 12''$$
$$2\beta = 82^0 12' 24''$$
$$\left.\begin{array}{r}\log\operatorname{cotg} 2\beta \ldots = 9{,}1362903 - 10\\ \log\sqrt[4]{3}p \ldots = 0{,}4850183\end{array}\right\} \text{addirt, gibt}$$
$$\log(-x) = 0{,}6213086 - 1$$
$$x_1 = -0{,}4181273.$$

Zur Bestimmung von $\sqrt{3} : \cos 2\beta$ haben wir:

Digitized by Google

$$\log\sqrt{3} = 0{,}2385606$$
$$\log\cos 2\beta = 9{,}1322610 - 10\,;\ \text{also}$$
$$\frac{\log\sqrt{3}}{\log\cos 2\beta} = 1{,}1062996,\ \text{wozu die Zahl } 12{,}773198 \text{ gehört;}$$

folglich ist:

$$x_2 \text{ und } x_3 = 0{,}209064 \pm 2{,}670416\sqrt{-1}.$$

3. Diese Gleichung ist von der Form III des §. 495, und weil $p = 7$ und $q = 11$, so ist:

$$\sin\gamma = \frac{p}{3q}\sqrt{{}^4/_3 p} = \frac{7}{3.11}\sqrt{\frac{4.7}{3}} = \frac{2\sqrt{({}^7/_3)^3}}{11}.$$

Berechnen wir jetzt vermittelst Logarithmen diesen Ausdruck, um den Werth für $\sin\gamma$ zu erhalten, so hat man:

$$\left.\begin{aligned}\log 7 &= 0{,}8450980\\ \log 3 &= 0{,}4771213\end{aligned}\right\}\ \text{subtrahirt, gibt:}$$
$$\log {}^7/_3 = 0{,}3679767$$
$$\log\sqrt{{}^7/_3} = 0{,}1839883$$
$$\left.\begin{aligned}\log\sqrt{({}^7/_3)^3} &= 0{,}5519649\\ \log 2 &= 0{,}3010300\end{aligned}\right\}\ \text{addirt, liefert:}$$
$$\left.\begin{aligned}\log 2\sqrt{({}^7/_3)^3} &= 10{,}8529949 - 10\\ \log 11 &= 1{,}0413927\end{aligned}\right\}\ \text{subtrahirt, gibt:}$$
$$\log\sin\gamma = 9{,}8116022 - 10;\ \text{mithin:}$$
$$\gamma = 40^\circ 23' 38{,}5''$$
$${}^1/_2\gamma = 20^\circ 11' 49{,}25''$$
$$\log\operatorname{tang} {}^1/_2\gamma = 29{,}5656934 - 30$$
$$\log\operatorname{tang}\delta = 9{,}8552311 - 10$$
$$\delta = 35^\circ 37' 21{,}1''$$
$$2\delta = 71^\circ 14' 42{,}2''$$
$$\left.\begin{aligned}\log\sqrt{{}^4/_3 p} &= 10{,}4850183 - 10\\ \log\sin 2\delta &= 9{,}9763051 - 10\end{aligned}\right\}\ \text{subtrahirt, gibt endlich:}$$
$$\log(-x) = 0{,}5087132;\ \text{also:}$$
$$x_1 = -3{,}226362.$$

Nun ist ferner x_2 und $x_3 = \frac{\sqrt{{}^1/_3 p}}{\sin 2\delta}(1 \pm \cos 2\delta\sqrt{-3})$.

$$\left.\begin{aligned}\log\sqrt{{}^1/_3 p} &= 10{,}1839883 - 10\\ \log\sin 2\delta &= 9{,}9763051 - 10\end{aligned}\right\}\ \text{subtrahirt, gibt:}$$
$$\log\frac{\sqrt{{}^1/_3 p}}{\sin 2\delta} = 0{,}2076832,\ \text{wozu die Zahl}$$
$$1{,}613181 \text{ gehört.}$$

Digitized by Google

$\log\cos 2\delta\sqrt{3} = 0{,}7457969 - 1$; hierzu gehört die Zahl $0{,}5569254$; folglich ist:

$$x_2 \text{ und } x_3 = 1{,}613181\,(1 \pm 0{,}5569254\sqrt{-1})$$
$$= 1{,}613181 \pm 0{,}898365\sqrt{-1}.$$

4. Die Gleichung ist von der Form IV des §. 495, und weil $p = 4$ und $q = 5$ ist, so ist:

$$\sin\gamma = \frac{p}{3q}\sqrt{{}^4/_3 p} = \frac{4}{3.5}\sqrt{\frac{4.4}{3}} = \frac{2\sqrt{({}^4/_3)^3}}{5}.$$

$\log 4 = 0{,}6020600$
$\log 3 = 0{,}4771213$ } subtrahirt, gibt:
$\log {}^4/_3 = 0{,}1249387$

$\log\sqrt{{}^4/_3} = 0{,}0624693$
$\log\sqrt{({}^4/_3)^3} = 0{,}1874079$
$\log 2 = 0{,}3010300$ } addirt, gibt:
$\log(2\sqrt{({}^4/_3)^3}) = 10{,}4884379 - 10$
$\log 5 = 0{,}6989700$ } subtrahirt:
$\log\sin\gamma = 9{,}7894679 - 10.$

$\gamma = 38^0 0' 46{,}7''$
${}^1/_2\gamma = 19^0 0' 23{,}4''$
$\log\tan {}^1/_2\gamma = 29{,}5371319 - 30$
$\log\sqrt[3]{\tan {}^1/_2\gamma} = 9{,}8457106 - 10 = \tan\delta;$
$\delta = 35^0 1' 48''$
$2\delta = 70^0 3' 36''$
$\log\sqrt{{}^4/_3 p} = 10{,}3634993 - 10$
$\log\sin 2\delta = 9{,}9731511 - 10$ } subtrahirt, gibt:
$\log x = 0{,}3903482$
$x_1 = 2{,}456678.$

Nun haben wir ferner zur Bestimmung von x_2 und x_3:

$$\frac{\log\sqrt{{}^1/_3 p}}{\log\sin 2\delta} = 0{,}0893182, \text{ wozu die Zahl}$$

$1{,}228339$ gehört
$\log\cos 2\delta = 9{,}5328697 - 10$
$\log\sqrt{3} = 0{,}2385606$
$\log\cos 2\delta\sqrt{3} = 0{,}7714303 - 1$; hierzu gehört die Zahl $0{,}590786$; daher ist:

$$x_2 \text{ und } x_3 = -1{,}228339(1 \mp 0{,}590786\sqrt{-1}.$$
$$= -1{,}228339 \pm 0{,}725569\sqrt{-1}.$$

5. Diese Gleichung ist nach §. 495 V aufzulösen, weil $4p^3 = 27q^2$ ist. Weil nun $p = 3$, und $q = 2$ ist, so haben wir:

Digitized by Google

$$\sin 3\varepsilon = \frac{3q}{p\sqrt[4]{sp}} = \frac{3.2}{3\sqrt{4}} = \frac{3.2}{3.2} = 1;\ \text{daher:}$$

$$3\varepsilon = 90^0$$
$$\varepsilon = 30^0.$$

Da nun $\sqrt[4]{sp} = 2$ ist, so hat die Gleichung folgende Wurzelwerthe:

$$x_1 = 2\sin\varepsilon \ \ldots\ = 2\sin 30^0 = 1$$
$$x_2 = 2\sin(60^0 - \varepsilon) = 2\sin 30^0 = 1$$
$$x_3 = -2\sin(60^0 + \varepsilon) = -2\sin 90^0 = -2.$$

6. Diese Gleichung hat die Form VI des §. 495 und es ist $4p^3 = 27q^2$. Da nun $p = 12$ und $q = 16$, so ist:

$$\sin 3\varepsilon = \frac{3q}{p\sqrt[4]{sp}} = \frac{3.16}{12\sqrt{\frac{4.12}{3}}} = {}^{48}/_{48} = 1;\ \text{daher:}$$

$$3\varepsilon = 90^0 \text{ und also}$$
$$\varepsilon = 30^0.$$

Weil nun $\sqrt[4]{sp} = 4$ ist, so ergeben sich folgende drei Wurzelwerthe:

$$x_1 = -4\sin\varepsilon = -4\sin 30^0 = -2$$
$$x_2 = -4\sin(60^0 - \varepsilon) = -4\sin 30^0 = -2$$
$$x_3 = +4\sin(60^0 + \varepsilon) = +4\sin 90^0 = +4.$$

7. Hier ist $4p^3 > 27q^2$, daher nach V des §. 495 aufzulösen. Da $p = 7$ und $q = 6$, so ist:

$$\sin 3\varepsilon = \frac{3.6}{7\sqrt{\frac{4.7}{3}}} = \frac{3}{\sqrt{({}^7/_3)^3}}.\ \text{Nun ist:}$$

$$\left.\begin{array}{l}\log 7 = 0{,}8450980\\ \log 3 = 0{,}4771213\end{array}\right\}\ \text{subtrahirt:}$$

$$\log {}^7/_3 = 0{,}3679767$$

$$\left.\begin{array}{l}\log\sqrt{{}^7/_3} = 0{,}1839883\\ \log\sqrt{({}^7/_3)^3} = 10{,}4771213 - 10\end{array}\right\}\ \text{subtrahirt:}$$

$$\log\sin 3\varepsilon = 9{,}9251564 - 10$$
$$3\varepsilon = 57^0 19' 11{,}5''$$
$$\varepsilon = 19^0 6' 23{,}8''$$

$$\left.\begin{array}{l}\log\sin\varepsilon = 9{,}5149817 - 10\\ \log\sqrt[4]{sp} = 0{,}4850183\end{array}\right\}\ \text{addirt:}$$

$$\log x_1 = 0{,}0000000;\ \text{daher}$$
$$x_1 = 1.$$

Nun ist ferner:

Digitized by Google

$$60^0 - \varepsilon = 40^0 53' 36{,}2''$$
$$60^0 + \varepsilon = 79^0 6' 23{,}8''$$
$$\left.\begin{array}{l} \log\sin(60^0 - \varepsilon) = 9{,}8160116 - 10 \\ \log\sqrt{{}^4/_3 p} \;\ldots = 0{,}4850183 \end{array}\right\} \text{addirt:}$$
$$\log x_2 = 0{,}3010299; \text{ also}$$
$$x_2 = 2$$
$$\left.\begin{array}{l} \log\sin(60^0 + \varepsilon) = 9{,}9921029 - 10 \\ \log\sqrt{{}^4/_3 p} \ldots = 0{,}4850183 \end{array}\right\} \text{addirt:}$$
$$\log(-x_3) = 0{,}4771212$$
$$x_3 = -3.$$

8. Diese Gleichung ist ebenfalls nach V des §. 495 aufzulösen, weil $4p^3 > 27q^2$. Nun ist:

$p = 5$ und $q = 4$; daher haben wir:

$$\sin 3\varepsilon = \frac{12}{5\sqrt{\frac{4.5}{3}}} = \frac{2}{(\sqrt{{}^5/_3})^3}$$

$$\left.\begin{array}{l} \log 5 = 0{,}6989700 \\ \log 3 = 0{,}4771213 \end{array}\right\} \text{subtrahirt:}$$
$$\log {}^5/_3 = 0{,}2218487$$
$$\log\sqrt{{}^5/_3} = 0{,}1109243$$
$$\left.\begin{array}{l} \log\sqrt{({}^5/_3)^3} = 0{,}3327729 \\ \log 2 = 10{,}3010300 - 10 \end{array}\right\} \text{subtrahirt:}$$
$$\log\sin 3\varepsilon = 9{,}9682571 - 10$$
$$3\varepsilon = 68^0 21' 34{,}45''$$
$$\varepsilon = 22^0 47' 11{,}48''$$
$$60^0 - \varepsilon = 37^0 12' 48{,}52''$$
$$60^0 + \varepsilon = 82^0 47' 11{,}48''$$
$$\log\sin\varepsilon = 9{,}5880460 - 10$$
$$\log\sqrt{{}^4/_3 p} = 0{,}4119540$$
$$\log x_1 = 0{,}0000000; \text{ also}$$
$$x_1 = 1.$$
$$\log\sin(60^0 - \varepsilon) = 9{,}7816021 - 10$$
$$\log\sqrt{{}^4/_3 p} = 0{,}4119543$$
$$\log x_2 = 0{,}1935564; \text{ also}$$
$$x_2 = 1{,}561553$$
$$\log\sin(60^0 + \varepsilon) = 9{,}9965490 - 10$$
$$\log\sqrt{{}^4/_3 p} = 0{,}4119543$$
$$\log(-x_3) = 0{,}4085033$$
$$x_3 = -2{,}561553$$

9. Diese Gleichung ist nach I des §. 495 aufzulösen und weil $p = 2$, $q = 33$ ist, so wird:

Digitized by Google

$$\tan g\,\alpha = \frac{p}{3q}\sqrt{{}^4/_3 p} = {}^2/_{33}(\sqrt{{}^2/_3})^3.$$

$$\log 2 = 20{,}3010300 - 20$$
$$\log 3 = 0{,}4771213$$
$$\log {}^2/_3 = 19{,}8239087 - 20$$
$$\log\sqrt{{}^2/_3} = 9{,}9119543 - 10$$
$$\log(\sqrt{{}^2/_3})^3 = 29{,}7358629 - 30. \quad (1)$$

Nun ist ferner: $\log 2 = 20{,}3010300 - 20$
$\log 33 = 1{,}5185139$
also $\log {}^2/_{33} = 18{,}7825161 - 20.$ (2)

Addiren wir jetzt (1) und (2), so erhalten wir:

$$\log\tan g\,\alpha = 8{,}5183790 - 10$$
$$\alpha = 1^0 53' 22{,}16''$$
$${}^1/_2\alpha = 0^0 56' 41{,}08''$$
$$\log\tan g\,{}^1/_2\alpha = 28{,}2172309 - 30$$
$$\log\sqrt[3]{\tan g\,{}^1/_2\alpha} = 9{,}4057436 - 10 = \tan g\,\beta$$
$$\beta = 14^0 16' 49{,}48''$$
$$2\beta = 28^0 33' 38{,}96''$$
$$\log\operatorname{cotg} 2\beta = 0{,}2641370$$
$$\log\sqrt{{}^4/_3 p} = 0{,}2129843$$
$$\log(-x) = 0{,}4771213$$
$$x_1 = -3.$$

Die beiden andern Wurzeln sind:

$$x_2 \text{ und } x_3 = 1{,}5 \pm 2{,}958039\sqrt{-1}.$$

10. Diese Gleichung ist nach §. 495 V aufzulösen, weil $4p^3 > 27q^2$.
Da $p = {}^{403}/_{441}$ und $q = {}^{46}/_{147}$, so ist:

$$\sin 3\varepsilon = \frac{3q}{p\sqrt{{}^4/_3 p}} = \frac{414}{403\sqrt{{}^{1612}/_{1323}}}.$$ Nun ist:

$$\log 414 = 2{,}6170003$$
$$\log 403 = 2{,}6053050$$
$$\log {}^{414}/_{403} = 0{,}0116953 \quad (1)$$
$$\log 1612 = 3{,}2073650$$
$$\log 1323 = 3{,}1215598$$
$$\log {}^{1612}/_{1323} = 0{,}0858052$$
$$\log\sqrt{{}^{1612}/_{1323}} = 0{,}0429026 \quad (2)$$

Subtrahire (2) von (1), so wird:

$$\log\sin 3\varepsilon = 9{,}9687927 - 10$$
$$3\varepsilon = 68^0 32' 18{,}55''$$
$$\varepsilon = 22^0 50' 46{,}18''$$
$$60^0 - \varepsilon = 37^0 9' 13{,}82''$$
$$60^0 + \varepsilon = 82^0 50' 46{,}18''$$

Digitized by Google

$$\log \sin \varepsilon = 9{,}5891206 - 10$$
$$\log \sqrt[4]{_3 p} = 0{,}0429026$$
$$\log x = 0{,}6320232 - 1$$
$$x_1 = 0{,}4285714$$
$$\log \sin (60^0 - \varepsilon) = 9{,}7810061 - 10$$
$$\log \sqrt[4]{_3 p} = 0{,}0429026$$
$$\log x = 0{,}8239087 - 1$$
$$x_2 = 0{,}666666$$
$$\log \sin (60^0 + \varepsilon) = 9{,}9966060 - 10$$
$$\log \sqrt[4]{_5 p} = 0{,}0429026$$
$$\log (-x) = 0{,}0395086$$
$$x_3 = -1{,}095239.$$

C. Direkte Auflösung der Gleichungen vom vierten Grade.

(Heis §. 97.)

I. Ampère'sche Formel.

§. 497. Eine Gleichung ist vom vierten Grade oder eine biquadratische, wenn sie, entwickelt und nach den fallenden Potenzen der Unbekannten geordnet, keine höhere als die vierte Potenz der Unbekannten enthält. Dieselbe ist entweder eine reine oder gemischte biquadratische Gleichung. In jenem Falle enthält die Gleichung die Unbekannte nur in der vierten Potenz; im andern Falle kommt die Unbekannte außer in der vierten auch noch in niederen Potenzen vor.

Nach §. 481 muß jede Gleichung des vierten Grades vier Wurzeln haben, die entweder alle 4 reell, oder zwei reell und zwei imaginär, oder alle 4 imaginär sind.

Die allgemeine Form der Gleichungen vom vierten Grade ist:

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0.$$

Setzt man hierin $D = 0$, so läßt sich dieselbe durch Division mit x auf eine Gleichung vom dritten Grade zurückführen. Setzt man aber die Coefficienten A, B, C gleich 0, so erhält man eine reine biquadratische Gleichung von der Form:

$$x^4 + D = 0.$$

oder, wenn wir $D = \mp n$ setzen:

$$x^4 \mp n = 0.$$

(1) Lösen wir zuerst die Gleichung $x^4 - n = 0$ auf, so ist:

$$x^4 = n = 1 \,.\, n.$$

Ziehen wir jetzt aus beiden Theilen dieser Gl. die vierte Wurzel, so wird:

Digitized by Google

$$x = \sqrt[4]{1} \cdot \sqrt[4]{n}.$$

Setzen wir $\sqrt[4]{1} = y$, so ist:

$$y^4 = 1; \text{ also } y^2 = \pm 1.$$

Für $y^2 = +1$ ist y_1 und $y_2 = \pm 1$.

Für $y^2 = -1$ ist y_3 und $y_4 = \pm\sqrt{-1} = \pm i$. Daher ist:

$$x_1 = \sqrt[4]{n},\ x_2 = -\sqrt[4]{n},\ x_3 = i\sqrt[4]{n},\ x_4 = -i\sqrt[4]{n} \text{ oder}$$

$\sqrt[4]{n} = p$ gesetzt:

$$x_1 = +p,\ x_2 = -p,\ x_3 = +ip,\ x_4 = -ip.$$

(2) Lösen wir aber die Gleichung $x^4 + n = 0$, so ist:

$$x^4 = -n = n.(-1); \text{ demnach ist:}$$

$$x = \sqrt[4]{n} \cdot \sqrt[4]{-1}.$$

Setzen wir wieder:

$\sqrt[4]{-1} = y$; so ist

$y^4 = -1$; folglich

$$y^2 = \pm\sqrt{-1} = {}^1/_2 + 2\sqrt{{}^1/_4}\sqrt{-1} - {}^1/_2$$
$$= \sqrt{({}^1/_2)^2 + 2\sqrt{{}^1/_2}.\sqrt{{}^1/_2}.\sqrt{-1} + (\sqrt{{}^1/_2}\sqrt{-1})^2}$$
$$= (\sqrt{{}^1/_2} + \sqrt{{}^1/_2}.\sqrt{-1})^2.$$

Mithin ist: $\alpha)\ y = \pm(\sqrt{{}^1/_2} + \sqrt{{}^1/_2}.\sqrt{-1}) = \pm\sqrt{{}^1/_2}(1+\sqrt{-1})$

Ferner ist: $y^2 = -\sqrt{-1} = -(\sqrt{{}^1/_2} + \sqrt{{}^1/_2}\sqrt{-1})^2$
$$= \sqrt{{}^1/_2} + \sqrt{{}^1/_2}.\sqrt{-1})^2(\sqrt{-1})^2.$$

Mithin ist: $\beta)\ y = \pm(\sqrt{{}^1/_2} + \sqrt{{}^1/_2}\sqrt{-1})\sqrt{-1}$
$$= \pm(\sqrt{{}^1/_2}(-1+\sqrt{-1}).$$

Daher hat x folgende vier Werthe:

x_1 und $x_2 = p\sqrt{{}^1/_2}(1 \pm \sqrt{-1})$; x_3 und $x_4 = p\sqrt{{}^1/_2}(-1 \pm \sqrt{-1})$

oder, wenn wir $p = \sqrt{2}$ setzen:

x_1 und $x_2 = 1 \pm \sqrt{-1}$; x_3 und $x_4 = -1 \pm \sqrt{-1}$.

Alle Gleichungen von der Form $x^4 - n = 0$ haben zwei reelle und zwei imaginäre Wurzeln, hingegen die von der Form $x^4 + n = 0$ haben vier imaginäre Wurzeln.

§. 498. Ist nun die Gleichung:

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

gegeben, so muß dieselbe zuvor so umgeändert werden, daß das zweite Glied aus derselben verschwindet. Setzt man daher $x = y - {}^1/_4 A$ und entwickelt diese Gleichung, so erhält man eine transformirte Gleichung von folgender Form:

$$y^4 + ay^2 + by + c = 0.$$

Wir brauchen also blos eine Gleichung von folgender Form aufzulösen:

Digitized by Google

$$(1)\ x^4+ax^2+bx+c=0.$$

Bezeichnen wir nach Ampère die Wurzeln dieser Gleichung mit x_1, x_2, x_3 und x_4, so entstehen dadurch die vier binomischen Faktoren $x-x_1$, $x-x_2$, $x-x_3$, $x-x_4$ und es ist daher nach §. 479:

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)=0 \text{ oder}$$

$$(2)\ x^4-(x_1+x_2+x_3+x_4)x^3+(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4)x^2$$
$$-(x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4)x+x_1x_2x_3x_4=0.$$

Nun setze man $x_1+x_2=y$ und $x_3+x_4=z$.

Soll nun aus (2) das zweite Glied verschwinden, so muß

$$(3)\ y+z=0, \text{ also } z=-y \text{ sein.}$$

Vergleichen wir jetzt die Gl. (1) mit (2), so ergibt sich, daß

$$(4)\ x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=a.$$

Nun ist ferner:

$$(5)\ yz=(x_1+x_2)(x_3+x_4)=x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4.$$

Setzen wir diesen Werth für $(x_1+x_2)(x_3+x_4)$ in (4) und ordnen die Gleichung, so ist:

$$(6)\ x_1x_2+x_3x_4=a-yz \text{ oder weil } z=-y \text{ ist:}$$

$$(7)\ x_1x_2+x_3x_4=a+y^2.$$

Ferner ist: $(8)\ -x_1x_2x_3-x_1x_2x_4-x_1x_3x_4-x_2x_3x_4=b$ oder

$$(9)\ -x_1x_2(x_3+x_4)-x_3x_4(x_1+x_2)=b.$$

Setzt man hierin die Werhe für x_1+x_2 und x_3+x_4, so hat man: $(10)-x_1x_2z-x_3x_4y=b$; daher $z=-y$ gesetzt und durch y div.:

$$(11)\ x_1x_2-x_3x_4=\frac{b}{y}$$

Durch Addition und Subtraktion der beiden Gleichungen (7) und (11) wird:

$$(12)\ 2x_1x_2=a+y^2+\frac{b}{y}$$

$$(13)\ 2x_3x_4=a+y^2-\frac{b}{y}.$$

Multiplicirt man (12) und (13) mit einander, so ist:

$$(14)\ 4x_1x_2x_3x_4=(a+y)^2-\left(\frac{b}{y}\right)^2.$$

Setzt man in (14) den Werth für $x_1x_2x_3x_4=c$ und entwickelt die Gl., so wird:

$$(15)\ y^6+2ay^4+(a^2-4c)y^2-b^2=0.$$

Diese Gleichung ist in Bezug auf y eine Gleichung vom dritten Grade; denn setzt man $y^2=u$, so hat man:

$$(16)\ u^3+2au^2+(a^2-4c)u-b^2=0.$$

Schafft man aus (16) das zweite Glied weg und löst diese cubische Gleichung auf, so erhält man einen Wurzelwerth für u, also auch für y^2 und daher für y. Nehmen wir an, der Wurzelwerth für

Digitized by Google

y sei = m, so erhalten wir mit Bezug auf die Annahme und auf (12) und (13):

$$(17)\ x_1 + x_2 = m;\quad (18)\ x_3 + x_4 = -m$$

$$(19)\ 2x_1x_2 = a + m^2 + \frac{b}{m}$$

$$(20)\ 2x_3x_4 = a + m^2 - \frac{b}{m}.$$

Setze den Werth von $x_2 = m - x_1$ aus (17) in (19) und von $x_4 = -m - x_3$ aus (18) in (20), so ist:

$$(21)\ 2x_1(m - x_1) = a + m^2 + \frac{b}{m}$$

$$(22)\ 2x_3(-m - x_3) = a + m^2 - \frac{b}{m}.$$

Entwickelt man diese beiden Gleichungen, so wird:

$$(23)\ x_1^2 - mx_1 = -\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}m^2 - \tfrac{1}{2}\frac{b}{m}$$

$$(24)\ x_3^2 + mx_3 = -\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}m^2 + \tfrac{1}{2}\frac{b}{m}.$$

Aus den beiden quadratischen Gleichungen (23) und (24) ergibt sich, daß:

$$x_1 = \tfrac{1}{2}m + \tfrac{1}{2}\sqrt{-m^2 - 2\left(a + \frac{b}{m}\right)}$$

$$x_2 = \tfrac{1}{2}m - \tfrac{1}{2}\sqrt{-m^2 - 2\left(a + \frac{b}{m}\right)}$$

$$x_3 = -\tfrac{1}{2}m - \tfrac{1}{2}\sqrt{-m^2 - 2\left(a - \frac{b}{m}\right)}$$

$$x_4 = -\tfrac{1}{2}m + \tfrac{1}{2}\sqrt{-m^2 - 2\left(a - \frac{b}{m}\right)}$$

Hiermit sind die 4 Wurzelwerthe der gegebenen biquadratischen Gleichung gefunden.

§. 499. Lösen wir hiernach die gegebenen Gl. auf in Heis §. 97, so hat man:

1. Hier ist $a = -25$, $b = +60$ und $c = -36$. Setzt man diese Werthe für a, b, c in die Gl. (16), so wird:

$$u^3 + 2.(-25)u^2 + ((-25)^2 - 4(-36))u - (-60)^2 = 0 \text{ oder}$$
$$u^3 - 50u^2 + 769u - 3600 = 0.$$

Zur Wegschaffung des zweiten Gliedes setze $u = v + {}^{50}/_{3}$, so erhalten wir folgende reducirte Gleichung:

Digitized by Google

$$v^3 - {}^{193}/_3\, v - {}^{1150}/_{27} = 0.$$

Setzt man hierin $v = \frac{s}{3}$, so wird:

$$s^3 - 579s - 1150 = 0.$$

Weil hier $4p^3 > 27q^2$ ist, so muß diese Gl. nach VI in §. 495 gelöst werden. Es ist nun:

$$\sin 3\varepsilon = \frac{3q}{p} \cdot \frac{1}{\sqrt{{}^4/_3 p}} = \frac{3.1150}{579} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{4.579}{3}}} = {}^{1150}/_{193} \cdot \frac{1}{\sqrt{772}}$$

$$\log 1150 = 3{,}0606978$$
$$\log\ 193 = 2{,}2855573$$
$$\log {}^{1150}/_{193} = 0{,}7751405 \quad (1)$$
$$\log 772 = 2{,}8876173$$
$$\log \sqrt{772} = 1{,}4438086$$
$$\log \frac{1}{\sqrt{772}} = 0{,}5561914 - 2 \quad (2)$$

Durch Addition von (1) und (2) erhält man:

$$\log \sin 3\varepsilon = 9{,}3313319 - 10$$
$$3\varepsilon = 12^0 23' 0{,}35''$$
$$\varepsilon = 4^0 7' 40{,}12''$$
$$60^0 - \varepsilon = 55^0 52' 19{,}88''$$
$$60^0 + \varepsilon = 64^0 7' 40{,}12''$$

Nun ist: $\log \sin \varepsilon = 18{,}8572214 - 20$
$\log \sqrt{{}^4/_3 p} = 1{,}4438086$
$\log (-s) = 0{,}3010300$
$s_1 = -2.$

Ferner ist: $\log \sin (60^0 - \varepsilon) = 9{,}9179192 - 10$
$\log \sqrt{{}^4/_3 p} = 1{,}4438086$
$\log (-s) = 1{,}3617278$
$s_2 = -23.$

Endlich ist: $\log \sin (60^0 + \varepsilon) = 9{,}9541313 - 10$
$\log \sqrt{{}^4/_3 p} = 1{,}4438086$
$\log s = 1{,}3979399$
$s_3 = 25.$

Ist nun: $s_1 = -2$, so ist $v_1 = -{}^2/_3$ und $u_1 = -{}^2/_3 + {}^{50}/_3 = 16$
$s_2 = -23$, so ist $v_2 = -{}^{23}/_3$ und $u_2 = -{}^{23}/_3 + {}^{50}/_3 = 9$
$s_3 = 25$, so ist $v_3 = {}^{25}/_3$ und $u_3 = {}^{25}/_3 + {}^{50}/_3 = 25.$

Weil $y^2 = u$ ist, so hat y, also auch der für y gesetzte Werth m die Werthe 3, 4, 5. Daher ist:

$x = {}^1/_2 . 3 \pm {}^1/_2 \sqrt{-3^2 - 2(-25 + {}^{60}/_3)} = {}^3/_2 \pm {}^1/_2 \sqrt{1} = {}^3/_2 \pm {}^1/_2$;
also $x_1 = 2$ und $x_2 = 1$.

Digitized by Google

$x_3 = -{}^3/_2 \mp {}^1/_2\sqrt{-3^2-2(-25-20)} = -{}^3/_2 \mp {}^1/_2\sqrt{81} = -{}^3/_2 \mp {}^9/_2$,
also $x_3 = -{}^3/_2 - {}^9/_2 = -6$; $x_4 = -{}^3/_2 + {}^9/_2 = 3$.

2. Hier ist $a = -82$, $b = -288$, $c = -47$. Setze diese Werthe für a, b, c in die Gleichung (16) des §. 498, so haben wir:

$$u^3 - 164u^2 + 6912u - 82944 = 0.$$

Zur Beseitigung des zweiten Gliedes setze $u = v + {}^{164}/_3$, so entsteht die transformirte Gleichung:

$$v^3 - {}^{6160}/_3 v - {}^{859264}/_{27} = 0.$$

Setze hierin zur Wegschaffung der Brüche $v = \frac{s}{3}$, so wird:

$$s^3 - 18480s - 859264 = 0.$$

In dieser Gleichung vom 3. Grade ist $4p^3 > 27q^2$, daher nach VI des §. 495 zu berechnen. Nun ist:

$$\sin 3\varepsilon = \frac{3q}{p} \cdot \frac{1}{\sqrt{{}^4/_3 p}} = {}^{859264}/_{6160} \cdot \frac{1}{\sqrt{24640}}.$$

Es ist:
$$\log 859264 = 5{,}9341266$$
$$\log \quad 6160 = 3{,}7895807$$
$$\log \frac{3q}{p} = 2{,}1445459 \quad (1)$$
$$\log {}^4/_3 p = 4{,}3916407$$
$$\log \sqrt{{}^4/_3 p} = 2{,}1958203$$
$$\log \frac{1}{\sqrt{{}^4/_3 p}} = 0{,}8041797 - 3 \quad (2)$$

Addire (1) und (2), so erhalten wir:
$$\log \sin 3\varepsilon = 9{,}9487256 - 10$$
$$3\varepsilon = 62^\circ 42' 10''$$
$$\varepsilon = 20^\circ 54' 3{,}33''$$
$$\log \sin \varepsilon = 9{,}5523677 - 10$$
$$\log \sqrt{{}^4/_3 p} = 2{,}1958203$$
$$\log(-s) = 1{,}7481880$$

$s = -56$; daher $v = -{}^{56}/_3$, $u = -{}^{56}/_3 + {}^{164}/_3 = 36$: daher $y = m = 6$. Mithin ist

$$x_1 \text{ und } x_2 = {}^1/_2 \cdot 6 \pm {}^1/_2\sqrt{-6^2 - 2\left(-82 + \frac{-288}{6}\right)}$$
$$= 3 \pm {}^1/_2\sqrt{16 \cdot 14} = 3 \pm 2\sqrt{14}$$
$$x_3 \text{ und } x_4 = -3 \mp {}^1/_2\sqrt{-6^2 - \left(-82 - \frac{-288}{6}\right)}$$
$$= -3 \mp {}^1/_2\sqrt{16 \cdot 2} = -3 \mp 2\sqrt{2}.$$

Digitized by Google

3. Hier ist $a = -60$, $b = 40$, $c = 396$; es ist also

$$u^3 - 120u^2 + 2016u - 1600 = 0.$$

Setze $u = v + 40$, so entsteht die reducirte Gleichung:

$$v^3 - 2784v - 48960 = 0.$$

Hier ist $4p^3 > 27q^2$; daher, weil $p = 2784$ und $q = 48960$:

$$\sin 3\varepsilon = \frac{3q}{p} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{3p}} = {}^{1530}/_{29} \cdot \frac{1}{\sqrt{3712}}.$$

$$\log 1530 = 3{,}1846914$$
$$\log 29 = 1{,}4623980$$
$$\log \frac{3q}{p} = 1{,}7222934 \quad (1)$$
$$\log 3712 = 3{,}5696080$$
$$\log \sqrt{3712} = 1{,}7848040$$
$$\log \frac{1}{\sqrt{3712}} = 0{,}2151960 - 2 \quad (2)$$

Addire (1) und (2) und wir erhalten:

$$\log \sin 3\varepsilon = 9{,}9374894 - 10$$
$$3\varepsilon = 59^0 59' 26{,}06''$$
$$\varepsilon = 19^0 59' 48{,}68''$$
$$60^0 + \varepsilon = 79^0 59' 48{,}68''$$
$$\log (60^0 + \varepsilon) = 9{,}9933472 - 10$$
$$\log \sqrt[4]{3p} = 1{,}7848040$$
$$\log v = 1{,}7781512$$
$$v = 60.$$

Daher $u = 60 + 40 = 100$, also auch $y^2 = 100$; mithin $y = m = 10$. Es ist also:

$$x_1 \text{ und } x_2 = {}^1/_2 \cdot 10 \pm {}^1/_2 \sqrt{-10^2 - 2(-60 + {}^{40}/_{10})}$$
$$= 5 \pm {}^1/_2 \sqrt{4 \cdot 3} = 5 \pm \sqrt{3}$$

$$x_3 \text{ und } x_4 = -5 \mp {}^1/_2 \sqrt{4 \cdot 7} = -5 \mp \sqrt{7}$$

4. Hier ist $a = -7$, $b = -12$, $c = 18$, daher ist:

$$u^3 - 14u^2 - 23u - 144 = 0.$$

Setzt man $u = v + {}^{14}/_3$, so wird

$$v^3 - {}^{265}/_3 v - {}^{12274}/_{27} = 0.$$

Substituiren wir hierin $v = \frac{s}{3}$, so erhalten wir:

$$s^3 - 795s - 12274 = 0.$$

Mithin ist $p = 795$, $q = 12274$ und weil hier $4p^3 < 27q^2$ ist, so geschieht die Lösung dieser cubischen Gleichung nach §. 495 IV. Daher ist:

$$\sin \gamma = \frac{p}{3q} \cdot \sqrt[4]{3p} = {}^{265}/_{12274} \cdot \sqrt{1060}.$$

Digitized by Google

$$\log 265 = 2{,}4232459$$
$$\log 12274 = 4{,}0889861$$
$$\log \frac{p}{3q} = 9{,}3342598 - 10 \quad (1)$$
$$\log 1060 = 3{,}0253059$$
$$\log \sqrt{1060} = 1{,}5126529 \quad (2)$$

Addiren wir (1) und (2), so erhalten wir:

$$\log \sin \gamma = 9{,}8469127 - 10$$
$$\gamma = 44^0 39' 45{,}49''$$
$$^1/_2 \gamma = 22^0 19' 52{,}74''$$
$$\log \operatorname{tang} {}^1/_2 \gamma = 29{,}6135972 - 30$$
$$\log \operatorname{tang} \delta = 9{,}8711991 - 10$$
$$\delta = 36^0 37' 32{,}27''$$
$$2\delta = 73^0 15' 4{,}54''$$
$$\log \sin 2\delta = 9{,}9811740 - 10 \quad (3)$$
$$\log \sqrt{{}^4/_3 p} = 1{,}5126529 \quad (2)$$

Subtrahiren wir (3) von (2), so erhalten wir:

$$\log s = 1{,}5314789$$
$$s = 34.$$

Mithin ist $v = {}^{34}/_3$, $u = {}^{34}/_3 + {}^{14}/_3 = 16$; also auch $y^2 = 16$; daher $y = m = 4$; folglich ist:

$$x = {}^1/_2 . 4 \pm {}^1/_2 \sqrt{-4^2 - 2\left(-7 + \frac{-12}{4}\right)} = 2 \pm {}^1/_2 \sqrt{4} = 2 \pm 1;$$ also

$$x_1 = 3 \text{ und } x_2 = 1.$$
$$x_3 \text{ und } x_4 = -2 \mp {}^1/_2 \sqrt{-8} = -2 \mp \sqrt{-2}.$$

5. Hier ist $a = -4^1/_2$, $b = -8$, $c = 2^1/_{16}$; daher ist:
$u^3 - 9u^2 + 12u - 64 = 0$. Setze $u = v + 3$, so wird:
$$v^3 - 15v - 82 = 0.$$

Es ist also $p = 15$, $q = 82$ und weil $4p^3 < 27q^2$, so ist die Auflösung dieser cubischen Gleichung nach §. 495 IV zu bewerkstelligen. Es ist daher:

$$\sin \gamma = \frac{p}{3q} \cdot \sqrt{{}^4/_3 p} = {}^5/_{82} \sqrt{20}.$$
$$\log 5 = 0{,}6989700$$
$$\log 82 = 1{,}9138139$$
$$\log \frac{p}{3q} = 0{,}7851561 - 2 \quad (1)$$
$$\log 20 = 1{,}3010300$$
$$\log \sqrt{20} = 0{,}6505150 \quad (2)$$

Addiren wir (1) und (2), so wird:

Digitized by Google

$$\log\sin\gamma = 9{,}4356711 - 10$$
$$\gamma = 15^0 49' 28{,}08''$$
$$^1/_2\gamma = 7^0 54' 44{,}04''$$
$$\log\operatorname{tang}{}^1/_2\gamma = 29{,}1429495 - 30$$
$$\log\operatorname{tang}\delta = 9{,}7143165 - 10$$
$$\delta = 27^0 23' 0{,}38''$$
$$2\delta = 54^0 46' 0{,}76''$$
$$\log\sin 2\delta = 9{,}9121218 - 10 \quad (3).$$

Durch Addition von (2) und (3) erhalten wir:

$$\log v = 0{,}7383932$$
$$v = 5{,}475114754,$$

daher $u = y^2 = 8{,}475114754$ und $y = m = 2{,}911205$, folglich:

$$x = {}^1/_2 . 2{,}911205 \pm {}^1/_2 \sqrt{-2{,}911205^2 - 2\left(-4{,}5 + \frac{-8}{2{,}911205}\right)}$$

$$= 1{,}455602 \pm {}^1/_2\sqrt{6{,}020889} = 1{,}455602 \pm 1{,}226875;$$

$$\text{also } x_1 = 2{,}682477 \text{ und } x_2 = 0{,}228727$$

$$x_3 \text{ und } x_4 = -1{,}455602 \pm {}^1/_2\sqrt{-4{,}971119}$$
$$= -1{,}455602 \pm 1{,}114804\sqrt{-1}.$$

6. Hier ist $a = 0$, $b = 0$ und $c = 4$; daher ist:

$$u^3 - 16u = 0 \text{ oder } u(u^2 - 16) = 0; \text{ also:}$$

$u^2 - 16 = 0$; $u^2 = 16$; $u = 4$ und $y^2 = u = 4$; $y = m = 2$; mithin ist:

$$x_1 \text{ und } x_2 = {}^1/_2 . 2 \pm {}^1/_2\sqrt{-2^2} = 1 \pm {}^1/_2\sqrt{-4} = 1 \pm \sqrt{-1}$$
$$x_3 \text{ und } x_4 = -1 \pm \sqrt{-1}.$$

Es sind dies dieselben Werthe für x, welche wir im §. 497 auf anderm Wege fanden.

II. Euler'sche und Carteſius'sche Formel.

(Heis §. 98a.)

a) Methode von Euler.

§. 500. Es sei die Wurzel einer Gleichung vom vierten Grade $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$, wo die Größen p, q, r die drei Wurzeln der cubischen Gleichung $y^3 - Ay^2 + By - C = 0$ sind, so daß $p + q + r = A$, $pq + pr + qr = B$ und $pqr = C$ ist. Unter dieser Voraussetzung erhebe man die angenommene Form der Wurzel $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$ ins Quadrat und wir erhalten:

$$(1)\ x^2 = p + q + r + 2(\sqrt{pq} + \sqrt{pr} + \sqrt{qr}).$$

Setzt man hierin den Werth für $p + q + r = A$, so wird:

$$(2)\ x^2 - A = 2(\sqrt{pq} + \sqrt{pr} + \sqrt{qr}).$$

Digitized by Google

Nun quadrire man Gl. (2), so hat man:

(3) $x^4 - 2Ax^2 + A^2 = 4(pq+pr+qr) + 8\sqrt{pqr}(\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$.

Weil nun $pq+pr+qr = B$ und $pqr = C$, also $\sqrt{pqr} = \sqrt{C}$ und $\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r} = x$, so erhalten wir, wenn wir diese Werthe in (3) substituiren:

$$x^4 - 2Ax^2 + A^2 = 4B + 8x\sqrt{C} \text{ oder}$$

(4) $x^4 - 2Ax^2 - 8x\sqrt{C} + A^2 - 4B = 0$,

eine Gleichung vom vierten Grade, wovon die Wurzel $x = \sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$ ist und wo p, q, r die drei Wurzeln der obigen cubischen Gleichung:

(5) $y^3 - Ay^2 + By - C = 0$ sind.

Es sei nun die biquadratische Gleichung $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$ gegeben, wovon eine Wurzel gefunden werden soll. Unter der Voraussetzung, daß diese allgemeine Gleichung vom vierten Grade identisch ist mit Gleichung (4), so muß:

α) $a = -2A$; also $A = -\frac{1}{2}a$

β) $b = -8\sqrt{C}$; also $C = \frac{1}{64}b^2$

γ) $c = A - 4B$; also $B = \frac{1}{16}(a^2 - 4c)$ sein.

Aus diesen Werthen für A, B, C können die Coefficienten der resolvirenden cubischen Gleichung (5) gefunden werden. Setzen wir diese Werthe in (5), so erhalten wir die Gleichung:

(6) $y^3 + \frac{1}{2}ay^2 + \frac{1}{16}(a^2 - 4c)y - \frac{1}{64}b^2 = 0$.

Aus dieser Gleichung lassen sich die Werthe für y, nämlich p, q, r und sonach auch die Werthe für x aus der gegebenen biquadratischen Gl. ermitteln. Da nun die Quadratwurzeln sowohl positiv als negativ zu nehmen sind, so kann x folgende Werthe haben: $x = \pm\sqrt{p} \pm \sqrt{q} \pm \sqrt{r}$,

Hieraus ergibt sich, daß man für x je nach den verschiedenen Combinationen acht Werthe erhält, von denen aber nur vier brauchbar sind. Dies folgt aber daraus, daß das Produkt der 3 Wurzeln, d. h. $\pm\sqrt{pqr} = \pm\sqrt{C}$. Nun ist aber $\sqrt{C} = \frac{1}{8}b$. Wenn daher in der gegebenen Gleichung vom vierten Grade $\frac{1}{8}b$ positiv oder $\sqrt{C}$ negativ ist, so hat x folgende Werthe:

$$x_1 = \sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$$
$$x_2 = \sqrt{p}-\sqrt{q}-\sqrt{r}$$
$$x_3 = -\sqrt{p}+\sqrt{q}-\sqrt{r}$$
$$x_4 = -\sqrt{p}-\sqrt{q}+\sqrt{r}.$$

Wenn aber $\frac{1}{8}b$ negativ, also $\sqrt{C}$ positiv ist, so hat x folgende Werthe:

$$x_{10} = \sqrt{p}+\sqrt{q}-\sqrt{r}$$
$$x_{20} = \sqrt{p}-\sqrt{q}+\sqrt{r}$$
$$x_{30} = -\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$$
$$x_{40} = -\sqrt{p}-\sqrt{q}-\sqrt{r}.$$

Digitized by Google

§. 501. Lösen wir jetzt die Beispiele in Heis §. 97a nach der Methode von Euler auf, so haben wir:

1. Hier ist $a = -25$, $b = 60$, $c = -36$. Substituiren wir diese Werthe in der §. 500 (6) gefundenen cubischen Gleichung, so hat man:

$y^3 + \frac{1}{2}(-25)y^2 + \frac{1}{16}\{(-25)^2 - 4.(-36)\}y - \frac{1}{64}.60^2 = 0$ oder
$y^3 - \frac{25}{2}y^2 + \frac{769}{16}y - \frac{225}{4} = 0$. Setze $y = z + \frac{25}{6}$, so wird:

$$z^3 - \frac{193}{48}z - \frac{575}{864} = 0. \quad \text{Setze } z = \frac{u}{12}, \text{ so ist:}$$

$$u^3 - 579u - 1150 = 0.$$

Hier ist $4p^3 > 27q^2$, daher nach §. 495 VI aufzulösen. Es ist nun:

$$\sin 3\varepsilon = \frac{3q}{p} \cdot \frac{1}{\sqrt{-4/3p}} = \frac{1150}{193} \cdot \frac{1}{\sqrt{772}}$$

$$\log 1150 = 3{,}0606978$$
$$\log 193 = 2{,}2855573$$
$$\log \frac{3q}{p} = 0{,}7751405 \quad (1)$$
$$\log 772 = 2{,}8876173$$
$$\log \sqrt{772} = 1{,}4438086$$
$$\log \frac{1}{\sqrt{-4/3p}} = 18{,}5561914 - 20 \quad (2)$$
$$(1)+(2) = \log \sin 3\varepsilon = 9{,}3313319 - 10$$
$$3\varepsilon = 12^0 23' 0{,}35''$$
$$\varepsilon = 4^0 7' 40{,}12''$$
$$60^0 - \varepsilon = 55^0 52' 19{,}88''$$
$$60^0 + \varepsilon = 64^0 7' 40{,}12''$$
$$\log \sin \varepsilon = 18{,}8572214 - 20$$
$$\log \sqrt{-4/3p} = 1{,}4438086$$
$$\log(-u) = 0{,}3010300$$
$$u_1 = -2$$
$$\log \sin(60^0 - \varepsilon) = 9{,}9179192 - 10$$
$$\log \sqrt{-4/3p} = 1{,}4438086$$
$$\log(-u) = 1{,}3617278$$
$$u_2 = -23.$$
$$\log \sin(60^0 + \varepsilon) = 9{,}9541313 - 10$$
$$\log \sqrt{-4/3p} = 1{,}4438086$$
$$\log u = 1{,}3979399$$
$$u_3 = 25.$$

Daher ist: $z_1 = -\frac{2}{12} = -\frac{1}{6}$, $z_2 = -\frac{23}{12}$, $z_3 = \frac{25}{12}$; folglich sind die 3 Wurzeln der cubischen Gleichung:

Digitized by Google

$$p = -{}^1/_6 + {}^{25}/_6 = 4$$
$$q = -{}^{18}/_{12} + {}^{25}/_6 = {}^9/_4$$
$$r = {}^{25}/_{12} + {}^{25}/_6 = {}^{25}/_4.$$

Weil $-{}^1/_8 b$ negativ ist, so erhalten wir folgende Werthe für x:

$$x_{10} = \sqrt{4} + \sqrt{{}^9/_4} - \sqrt{{}^{25}/_4} = 2 + {}^3/_2 - {}^5/_2 = 1$$
$$x_{20} = \sqrt{4} - \sqrt{{}^9/_4} + \sqrt{{}^{25}/_4} = 2 - {}^3/_2 + {}^5/_2 = 3$$
$$x_{30} = -\sqrt{4} + \sqrt{{}^9/_4} + \sqrt{{}^{25}/_4} = -2 + {}^3/_2 + {}^5/_2 = 2$$
$$x_{40} = -\sqrt{4} - \sqrt{{}^9/_4} - \sqrt{{}^{25}/_4} = -2 - {}^3/_2 - {}^5/_2 = -6.$$

2. Es ist hier $a = -82$, $b = -288$, $c = -47$; also:
$-{}^1/_2 a = -41$, $-{}^1/_{16}(a^2 - 4c) = 432$, $-{}^1/_{64} b^2 = -1296$;
daher ist die Bedingungsgleichung:
$y^3 - 41y^2 + 432y - 1296 = 0$. Setze $y = z + {}^{41}/_3$, so wird:

$$z^3 - {}^{385}/_3 z - {}^{13426}/_{27} = 0. \quad \text{Setze } z = \frac{u}{3}, \text{ so ist:}$$

$$u^3 - 1155u - 13426 = 0.$$

Weil $4p^3 > 27q^2$, ist die Gleichung nach §. 495 VI zu lösen. Daher ist:

$$\sin 3\varepsilon = \frac{3q}{p} \cdot \frac{1}{\sqrt{{}^4/_3 p}} = {}^{13426}/_{385} \cdot \frac{1}{\sqrt{1540}}.$$

$$\log 13426 = 4{,}1279466$$
$$\log 385 = 2{,}5854607$$
$$\log \frac{3q}{p} = 1{,}5424859 \quad (1)$$
$$\log 1540 = 3{,}1875207$$
$$\log \sqrt{{}^4/_3 p} = 1{,}5937603 \quad (2)$$
$$\log \frac{1}{\sqrt{{}^4/_3 p}} = 18{,}4062397 - 20 \quad (3)$$
$$(1)+(3) = \log \sin 3\varepsilon = 9{,}9487256 - 10$$
$$3\varepsilon = 62^\circ 42' 10''$$
$$\varepsilon = 20^\circ 54' 3{,}33''$$
$$\log \sin \varepsilon = 9{,}5523677 - 10 \quad (4)$$
$$(2)+(4) = \log(-u) = 1{,}1461280$$
$$u_1 = -14, \text{ also } z = -{}^{14}/_3; \text{ daher}$$
$$y_1 = -{}^{14}/_3 + {}^{41}/_3 = 9.$$

Um die beiden andern Wurzelwerthe für y zu erhalten, dividire man die cubische Gleichung durch $y - 9$ und wir erhalten die quadratische Gleichung $y^2 - 32y + 144 = 0$, welche y_2 und $y_3 = 16 \pm 4\sqrt{7}$ gibt. Daher ist:

$$\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} = \sqrt{9} + \sqrt{16 + 4\sqrt{7}} + \sqrt{16 - 4\sqrt{7}}.$$

Nun ist nach §. 338. γ) II. Theil IV. Aufl. S. 419.

Digitized by Google

$$\sqrt{16+4\sqrt{7}}+\sqrt{16-4\sqrt{7}}=\sqrt{2(16+\sqrt{16^2-16.7})}$$
$$=\sqrt{2(16+12)}=2\sqrt{14} \text{ und}$$
$$\sqrt{16+4\sqrt{7}}-\sqrt{16-4\sqrt{7}}=\sqrt{2(16-12)}=2\sqrt{2};\ \text{mithin ist:}$$
$$x_1=\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}=3+2\sqrt{14}$$
$$x_2=\sqrt{p}-(\sqrt{q}+\sqrt{r})=3-2\sqrt{14}$$
$$x_3=-\sqrt{p}+\sqrt{q}-\sqrt{r}=-3+2\sqrt{2}$$
$$x_4=-\sqrt{p}-(\sqrt{q}-\sqrt{r})=-3-2\sqrt{2}.$$

3. Hier ist $a=-60$, $b=40$, $c=396$. Es ist also: $\frac{1}{2}a=-30$, $\frac{1}{16}(a^2-4c)=+126$, $\frac{1}{64}b^2=-25$; mithin haben wir:
$y^3-30y^2+126y-25=0$. Setze $y=z+10$, so wird:
$z^3-174z-765=0$; es ist also $p=174$, $q=765$.
Weil $4p^3>27q^2$, so ist nach §. 495 VI:

$$\sin 3\varepsilon=\frac{3q}{p}\cdot\frac{1}{\sqrt{^4/_3 p}}={}^{765}/_{58}\cdot\frac{1}{\sqrt{232}}.$$

$$\log 765=2{,}8836614$$
$$\log 58=1{,}7634280$$
$$\log\frac{3q}{p}=1{,}1202334\ (1)$$
$$\log 232=2{,}3654880$$
$$\log\sqrt{^4/_3 p}=1{,}1827440\ (2)$$
$$\log\frac{1}{\sqrt{^4/_3 p}}=18{,}8172560-20\ (3)$$
$$(1)+(3)=\log\sin 3\varepsilon=9{,}9374894-10$$
$$3\varepsilon=59^0 59'26{,}06''$$
$$\varepsilon=19^0 59'48{,}68''$$
$$60^0+\varepsilon=79^0 59'48{,}68''$$
$$\log\sin(60^0+\varepsilon)=9{,}9933472-10\ (4)$$
$$(2)+(4)=\log z=1{,}1760912$$
$$z=15.$$

Folglich $y_1=15+10=25$. Die beiden andern Werthe für y ergeben sich aus der quadratischen Gleichung
$y^2-5y+1=0$, nämlich:
y_2 und $y_3={}^5/_2\pm{}^1/_2\sqrt{21}$.
Nun ist wieder nach §. 338 γ)
$$\sqrt{{}^5/_2+{}^1/_2\sqrt{21}}+\sqrt{{}^5/_2-{}^1/_2\sqrt{21}}=\sqrt{2({}^5/_2+\sqrt{{}^{25}/_4-{}^{21}/_4})}=\sqrt{7}.$$
$$\sqrt{{}^5/_2+{}^1/_2\sqrt{21}}-\sqrt{{}^5/_2-{}^1/_2\sqrt{21}}=\sqrt{2({}^5/_2-1)}=\sqrt{3}.$$
Mithin ist: $x_1=5+\sqrt{7}$; $x_2=5-\sqrt{7}$; $x_3=-5+\sqrt{3}$; $x_4=-5-\sqrt{3}$.

4. Es ist $a=-7$, $b=-12$, $c=18$; daher:
$\frac{1}{2}a=-{}^7/_2$, $\frac{1}{16}(a^2-4c)=-{}^{23}/_{16}$, $\frac{1}{64}b^2=-{}^9/_4$; mithin:

Digitized by Google

$y^3 - {}^7/_2 y^2 - {}^{23}/_{16} y - {}^9/_4 = 0$. Setze $y = z + {}^7/_6$, so wird:

$z^3 - {}^{265}/_{48} z - {}^{6137}/_{864} = 0$. Setze hierin $z = \frac{u}{12}$, so ist:

$$u^3 - 795u - 12274 = 0.$$

Hier ist $p = 795$, $q = 12274$ und weil $4p^3 < 27q^2$, so ist die Gleichung nach §. 495 IV aufzulösen. Wir haben also:

$$\sin\gamma = \frac{p}{3q} \cdot \sqrt{{}^4/_3 p} = {}^{265}/_{12274} \cdot \sqrt{1060}.$$

$$\log 265 = 2{,}4232459$$
$$\log 12274 = 4{,}0889861$$
$$\log \frac{p}{3q} = 0{,}3342598 - 2 \quad (1)$$
$$\log \sqrt{1060} = 3{,}0253059$$
$$\log \sqrt{{}^4/_3 p} = 1{,}5126529 \quad (2)$$
$$(1)+(2) = \log\sin\gamma = 9{,}8469127 - 10$$
$$\gamma = 44^\circ 39' 45{,}49''$$
$${}^1/_2\gamma = 22^\circ 19' 52{,}74''$$
$$\log \operatorname{tang} {}^1/_2\gamma = 29{,}6135972 - 30$$
$$\log \operatorname{tang} \delta = 9{,}8711991 - 10$$
$$\delta = 36^\circ 37' 32{,}27''$$
$$2\delta = 73^\circ 15' 4{,}54''$$
$$\log \sin 2\delta = 9{,}9811740 - 10 \quad (3)$$
$$(2)-(3) = \log u = 1{,}5314789$$
$$u = 34.$$

Daher $z = {}^{34}/_{12} = {}^{17}/_6$ und $y_1 = {}^{17}/_6 + {}^7/_6 = 4$.

Dividirt man die cubische Gleichung in y durch $y-4$, so erhält man die quadratische Gl. $y^2 + {}^1/_2 y + {}^9/_{16} = 0$, welche die beiden andern Wurzelwerthe liefert, nämlich y_2 und $y_3 = -{}^1/_4 \pm \sqrt{-2}$. Da nun nach §. 338 γ)

$$\sqrt{-{}^1/_4 + {}^1/_2\sqrt{-2}} + \sqrt{-{}^1/_4 - {}^1/_2\sqrt{-2}} = \sqrt{2(-{}^1/_4 + \sqrt{{}^1/_{16} + {}^1/_2})}$$
$$= \sqrt{1} = 1 \text{ und } \sqrt{-{}^1/_4 + {}^1/_2\sqrt{-2}} - \sqrt{-{}^1/_4 - {}^1/_2\sqrt{-2}} = \sqrt{-2}$$

gibt, so erhalten wir für x folgende Werthe:

$$x_1 = \sqrt{4} + \sqrt{1} = 3;\ x_2 = \sqrt{4} - \sqrt{1} = 1;$$
$$x_3 \text{ und } x_4 = -\sqrt{4} \pm \sqrt{-2} = -2 \pm \sqrt{-2}.$$

5. Aus der gegebenen Gleichung muß zuerst das zweite mit x^3 behaftete Glied weggeschafft werden. Zu dem Zwecke setze man $x = {}^1/_4(z+7)$, so hat man:

$$\frac{z^4}{256} - {}^{22}/_{256} z^2 - {}^{24}/_{256} z + {}^{45}/_{256} = 0 \text{ oder}$$
$$z^4 - 22z^2 - 24z + 45 = 0.$$

Digitized by Google

Hiernach ist $a = -22$, $b = -24$, $c = 45$; mithin:
$\frac{1}{2}a = -11$, $\frac{1}{16}(a^2 - 4c) = 19$, $\frac{1}{64}b^2 = -9$;
daher erhalten wir die cubische Gl.:

$$y^3 - 11y^2 + 19y - 9 = 0.$$

Zur Fortschaffung des zweiten Gliedes setze $y = \frac{1}{3}(u+11)$, so wird: $u^3 - 192u - 1024 = 0$.
Hier ist $p = 192$, $q = 1024$ und $\frac{1}{4}q^2 = \frac{1}{27}p^3$; daher hat nach §. 490. 2 die Gleichung drei reelle Wurzeln, worunter zwei einander gleich sind; mithin ist $u_1 = 2\sqrt[3]{\frac{1}{2}.1024} = 16$,
u_2 und $u_3 = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}.1024} = -8$; demnach:
$y_1 = \frac{1}{3}(16+11) = 9$, y_2 und $y_3 = \frac{1}{3}(11-8) = 1$.
Bestimmen wir jetzt aus den Werthen für y die für z, so wird:
$z_1 = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{9}}} = 5$; $z_2 = \sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{9}}} = -3$
$z_3 = -\sqrt{1+\sqrt{1-\sqrt{9}}} = -3$; $z_4 = -\sqrt{1-\sqrt{1+\sqrt{9}}} = 1$.
Daher ist:
$x_1 = \frac{1}{4}(5+7) = 3$; $x_2 = \frac{1}{4}(-3+7) = 1$
$x_3 = \frac{1}{4}(-3+7) = 1$; $x_4 = \frac{1}{4}(1+7) = 2$.

6. Um das zweite Glied aus dieser Gleichung fortzuschaffen, setze $x = z+2$, so wird:

$$z^4 - 10z^2 - 4z + 8 = 0.$$

Hier ist $a = -10$, $b = -4$, $c = 8$; deshalb ist:
$\frac{1}{2}a = -5$, $\frac{1}{16}(a^2 - 4c) = \frac{17}{4}$, $\frac{1}{64}b^2 = -\frac{1}{4}$; mithin ist:
$y^3 - 5y^2 + \frac{17}{4}y - \frac{1}{4} = 0$. Setze $y = u + \frac{5}{3}$, so wird:

$$u^3 - \frac{49}{12}u - \frac{131}{54} = 0. \quad \text{Setze } u = \frac{v}{6}, \text{ so wird:}$$

$$v^3 - 147v - 524 = 0.$$

Es ist also $p = 147$, $q = 524$ und weil $4p^3 > 27q^2$, so haben wir nach §. 495 VI:

$$\sin 3\varepsilon = \frac{3q}{p} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{3}p}} = \frac{3.524}{147} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{4.147}{3}}} = \frac{262}{343}.$$

$$\log 262 = 2{,}4183012$$
$$\log 343 = 2{,}5352941$$
$$\log \sin 3\varepsilon = 9{,}8830071 - 10$$
$$3\varepsilon = 49^\circ 48' 16{,}68''$$
$$\varepsilon = 16^\circ 36' 5{,}56''$$
$$\log \sin \varepsilon = 9{,}4559319 - 10$$
$$\log \sqrt{\frac{4}{3}p} = 1{,}1461280$$
$$\log(-v) = 0{,}6020599$$
$$v = -4.$$

Digitized by Google

Daher ist $u = -{}^4/_6 = -{}^2/_3$; also $y = -{}^2/_3 + {}^5/_3 = 1$, folglich sind die beiden andern Wurzelwerthe der cubischen Gleichung: y_2 und $y_3 = 2 \pm {}^1/_2\sqrt{15}$.

Nun ist ferner nach §. 338 γ)

$$\sqrt{2+{}^1/_2\sqrt{15}}+\sqrt{2-{}^1/_2\sqrt{15}} = \sqrt{2(2+\sqrt{4-{}^{15}/_4})} = \sqrt{5}$$

$$\sqrt{2+{}^1/_2\sqrt{15}}-\sqrt{2-{}^1/_2\sqrt{15}} = \sqrt{2(2-\sqrt{4-{}^{15}/_4})} = \sqrt{3}$$

Mithin ist:

$$z_1 = 1+\sqrt{5},\ z_2 = 1-\sqrt{5},\ z_3 = -1+\sqrt{3},\ z_4 = -1-\sqrt{3}.$$

Folglich ist:

$$x_1 = 3+\sqrt{5},\ x_2 = 3-\sqrt{5},\ x_3 = 1+\sqrt{3},\ x_4 = 1-\sqrt{3}.$$

7. Hier ist $a = -4{}^1/_2$, $b = -8$, $c = 2{}^1/_{16}$; also: ${}^1/_2 a = -{}^9/_4$, ${}^1/_{16}(a^2-4c) = {}^3/_4$, ${}^1/_{64}b^2 = -1$; daher haben wir: $y^3 - {}^9/_4 y^2 + {}^3/_4 y - 1 = 0$. Setze $y = z + {}^3/_4$, so wird:

$$z^3 - {}^{15}/_{16}z - {}^{82}/_{64} = 0.$$

Es ist $p = {}^{15}/_{16}$, $q = {}^{82}/_{64}$ und weil $4p^3 < 27q^2$, so ist die Auflösung nach §. 495. IV zu bewerkstelligen. Nun ist:

$$\sin\gamma = \frac{p}{3q}\cdot\sqrt{{}^4/_3 p} = \frac{5\sqrt{5}}{41}.$$

$$\log 5 = 0{,}6989700$$
$$\log\sqrt{5} = 0{,}3494850$$
$$\log 5\sqrt{5} = 1{,}0484550$$
$$\log 41 = 1{,}6127839$$
$$\log\sin\gamma = 9{,}4356711 - 10$$
$$\gamma = 15^0 49' 28{,}10''$$
$${}^1/_2\gamma = 7^0 54' 44{,}5''$$
$$\log\operatorname{tang}{}^1/_2\gamma = 29{,}1429515 - 30$$
$$\log\operatorname{tang}\delta = 9{,}7143171 - 10$$
$$\delta = 27^0 23' 0{,}50''$$
$$2\delta = 54^0 46' 1''$$
$$\log\sin 2\delta = 9{,}9121222 - 10$$
$$\log\sqrt{{}^4/_3 p} = 0{,}0484550$$
$$\log z = 0{,}1363328$$
$$z = 1{,}368778.$$

Daher $y = 1{,}368778 + 0{,}75 = 2{,}118778$.

Dividirt man die Gleichung in y durch $y - 2{,}118778$, so erhält man die quadratische Gl.

$$y^2 - 0{,}131222y + 0{,}471970 = 0,$$

welche die beiden andern Werthe für y liefert, nämlich:

$$y_2 \text{ und } y_3 = 0{,}065611 \pm 0{,}68386\sqrt{-1}.$$

Folglich erhalten wir folgende Werthe für x:

Digitized by Google

$$x_1 = \sqrt{2{,}118778} + \sqrt{0{,}065611 + 0{,}68386\sqrt{-1}} + \sqrt{0{,}065611 - 0{,}68386\sqrt{-1}}$$

$$= 1{,}45560 + \sqrt{2\{0{,}065611 + \sqrt{0{,}065611^2 + 0{,}4676651967}\}}$$

nach §. 338. 2.

$$= 1{,}45560 + \sqrt{2(0{,}065611 + 0{,}687001)} = 1{,}45560 + 1{,}22688 = 2{,}68248$$

$$x_2 = 1{,}45560 - \sqrt{2(0{,}065611 + 0{,}687001)} = 1{,}45560 - 1{,}22688 = 0{,}22872$$

$$x_3 \text{ und } x_4 = -1{,}45560 \pm \sqrt{2(0{,}065611 - 0{,}687001)} = -1{,}45560 \pm 1{,}11480\sqrt{-1}.$$

b) Methode von Carteſius.

(Heis §. 98a, Beiſpiel 8 und 9.)

§. 502. Man denke ſich die linke Seite der Gleichung:

$$(1)\quad x^4 + ax^2 + bx + c = 0$$

in zwei quadratiſche Faktoren zerlegt, ſo daß:

$$(2)\quad x^4 + ax^2 + bx + c = (x^2 + yx + z)(x^2 + yx + t) = 0.$$

Da der Coefficient von x^3 in der gegebenen Gleichung (1) gleich Null iſt, ſo muß, damit das zweite Glied verſchwinde, den beiden Faktoren yz das entgegengeſetzte Zeichen gegeben werden und wir haben demnach:

$$(3)\quad (x^2 + yx + z)(x^2 - yx + t) = 0,$$

worin y, z, t noch zu beſtimmende Größen ſind. Die Gleichung (3) als richtig angenommen, ſo muß:

$$x^2 + yx + z = 0$$
$$x^2 - yx + t = 0$$

ſein und aus dieſen beiden quadratiſchen Gleichungen ergeben ſich alsdann die vier geſuchten Werthe von x. Es kömmt nun darauf an, die Größen y, z, t durch die gegebenen Größen a, b, c in der Gl. (1) zu beſtimmen. Sind die beiden Gleichungen (1) und (3) identiſch, ſo iſt:

$$(4)\quad x^4 + ax^2 + bx + c = (x^2 + yx + z)(x^2 - yx + t)$$
$$= x^4 + (z + t - y^2)x^2 + y(t - z)x + tz.$$

Da die Coefficienten der gleichen Potenzen von x einander gleich ſein ſollen, ſo ergeben ſich hieraus folgende Bedingungsgleichungen:

$$(5)\ a = z + t - y^2;\quad (6)\ b = y(t - z);\quad (7)\ c = tz.$$

Nach (5) iſt: (8) $a + y^2 = z + t$. Setze aus (7) den Werth für $z = \frac{c}{t}$ in (8), ſo iſt:

Digitized by Google

$$(9)\quad a+y^2=\frac{c+t^2}{t}.$$

Setze denselben Werth für z in (6), so hat man:

$$(10)\quad \frac{b}{y}=\frac{t^2-c}{t}.$$ Addire (9) und (10), so wird:

$$(11)\quad {}^1/_2\left(a+y^2+\frac{b}{y}\right)=t.$$ Aus (7) und (11) folgt:

$$(12)\quad z=\frac{2c}{a+y^2+\frac{b}{y}}.$$

Jetzt setze die Werthe für t und z aus (11) und (12) in (8), so wird:

$$a+y^2=\frac{2c}{a+y^2+\frac{b}{y}}+{}^1/_2\left(a+y^2+\frac{b}{y}\right)\text{ oder:}$$

$$(a+y^2)\left(a+y^2+\frac{b}{y}\right)=2c+{}^1/_2\left(a+y^2+\frac{b}{y}\right)^2;\text{ daraus:}$$

$$(13)\quad y^6+2ay^4+(a^2-4c)y^2-b^2=0.$$

Setze $y^2=u$, so erhält man die Bedingungsgleichung:

$$(14)\quad u^3+2au^2+(a^2-4c)u-b^2=0.$$

Setzt man zur Fortschaffung des zweiten Gliedes $u=v-{}^2/_3a$, so erhalten wir die reducirte Gleichung:

$$(15)\quad v^3-({}^1/_3a^2+4c)v-({}^2/_{27}a^3-{}^8/_3ac+b^2)=0.$$

Ist, wie in Aufgabe 8

$a=2$, $b=-16$ und $c=77$, so ist:

$${}^1/_3a^2+4c={}^{928}/_3,\quad {}^2/_{27}a^3-{}^8/_3ac+b^2=+{}^{4160}/_{27}.$$

Setzen wir diese Werthe in die Gleichung (15), so wird:

$$v^3-{}^{928}/_3v+{}^{4160}/_{27}=0.\quad \text{Setze hierin } v=\frac{s}{3},\text{ so ist:}$$

$$s^3-2784s+4160=0.$$

Hier ist $p=2784$, $q=4160$ und weil $4p^3>27q^2$, so ist die cubische Gleichung nach §. 495. V zu lösen. Daher ist:

$$\sin 3\varepsilon=\frac{3q}{p}\cdot\frac{1}{\sqrt{{}^4/_3p}}=\frac{3.4160}{2784}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{4.2784}{3}}}={}^{65}/_{29}\cdot\frac{1}{\sqrt{928}}$$

$$\log 65=1{,}8129134$$
$$\log 29=1{,}4623980$$
$$\log {}^{65}/_{29}=0{,}3505154\ (1)$$

Digitized by Google

$$\log 928 = 2{,}9675480$$
$$\log \sqrt{928} = 1{,}4837740$$
$$\log \frac{1}{\sqrt{928}} = 0{,}5162260 - 2 \quad (2)$$

$$(1)+(2) = \log \sin 3\varepsilon = 18{,}8667414 - 20$$
$$3\varepsilon = 4^0 13' 10{,}05''$$
$$\varepsilon = 1^0 24' 23{,}35''$$
$$60^0 - \varepsilon = 58^0 35' 36{,}65''$$
$$\log \sin (60^0 - \varepsilon) = 9{,}9311993 - 10$$
$$\log \sqrt[4]{s^p} = 1{,}7848040$$
$$\log s = 1{,}7160033$$
$$s = 52.$$

Daher ist: $v = {}^{52}/_3$; $u = {}^{52}/_3 - {}^4/_3 = 16$; folglich $y^2 = u = 16$; also $y = 4$. Setzen wir nun zur Bestimmung von z und t die Werthe für y, a und b in die Gleichungen (5) und (6), so wird:

$\alpha)$ $z + t = 18$; $\beta)$ $t - z = -4$; folglich $t = 7$ und $z = 11$.

Setzen wir zur Bestimmung von x die Werthe für y, z, t in die beiden quadratischen Gleichungen:

$$x^2 + yx + z = 0 \text{ und}$$
$$x^2 - yx + t = 0,$$

deren Produkt identisch ist mit der gegebenen Gleichung, so haben wir:

$$x^2 + 4x + 11 = 0 \text{ und } x^2 - 4x + 7 = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

x_1 und $x_2 = 2 \pm \sqrt{-3}$; x_3 und $x_4 = -2 \pm \sqrt{-7}$.

9. Hier ist $a = -7$, $b = -12$, $c = 18$ also:
${}^1/_3 a^2 + 4c = {}^{265}/_3$, ${}^2/_{27} a^3 - {}^8/_3 ac + b^2 = {}^{12274}/_{27}$; daher ist:

$$v^3 - {}^{265}/_3 v - {}^{12274}/_{27} = 0. \quad \text{Setze hierin } v = \frac{s}{3}, \text{ so ist:}$$

$$s^3 - 795s - 12274 = 0.$$

Das ist dieselbe cubische Gleichung in s, welche wir im §. 501 Aufg. 4 in u fanden, folglich $s = 34$; daher $v = {}^{34}/_3$; mithin:

$$u = {}^{34}/_3 - \frac{2.(-7)}{3} = {}^{34}/_3 + {}^{14}/_3 = 16; \text{ also } y = 4; \text{ daher:}$$

$$z = 6 \text{ und } t = 3. \text{ Es ist also:}$$
$$x^2 - 4x + 3 = 0 \text{ und } x^2 + 4x + 6 = 0; \text{ folglich:}$$
$$x_1 = 3,\ x_2 = 1;\ x_3 \text{ und } x_4 = -2 \pm \sqrt{-2}.$$

Digitized by Google

Andere Lösungen der biquadratischen Gleichungen.

(Heis §. 98 b.)

Methode von Hulbe.

§. 503. Nach dieser Methode wird die biquadratische Gleichung auf eine reciproke Gl. von demselben Grade zurückgeführt. Setzt man in der allgemeinen Gleichung:

$$(1)\quad x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$$

für x den Werth $qy+r$, wo y eine neue Unbekannte, q und r noch zu bestimmende Größen sind, so erhält man:

$$(2)\quad (qy+r)^4+a(qy+r)^3+b(qy+r)^2+c(qy+r)+d=0 \text{ oder:}$$

$$(3)\quad y^4+\frac{4r+a}{q}y^3+\frac{6r^2+3ar+b}{q^2}y^2+\frac{4r^3+3ar^2+2br+c}{q^3}+\frac{r^4+ar^3+br^2+cr+d}{q^4}=0.$$

Soll diese Gleichung eine reciproke sein, so muß:

$$(4)\quad q^4=r^4+ar^3+br^2+cr+d \text{ und}$$

$$(5)\quad q^2=\frac{4r^3+3ar^2+2br+c}{4r+a} \text{ sein.}$$

Erhebt man die Gleichung (5) ins Quadrat und stellt alsdann die beiden Werthe für q^4 einander gleich, so wird:

$$(6)\quad r^4+ar^3+br^2+cr+d=\left(\frac{4r^3+3ar^2+2br+c}{4r+a}\right)^2.$$

Entwickelt und ordnet man die Gl. (6) nach den fallenden Potenzen von r, so erhält man die cubische Gleichung:

$$(7)\quad (a^3-4ab+8c)r^3+(a^2b+2ac-4b^2+16d)r^2+(a^2c+8ad-4bc)r+(a^2d-c^2)=0,$$

woraus ein reeller Werth für r gefunden werden kann. Bestimmt man dann aus dem für r gefundenen Werthe den von q, so erhält man die verlangte reciproke Gleichung.

1. Wenn nun $a=-10$, $b=33$, $c=-46$ und $d=20$ ist, so erhalten wir zur Bestimmung von r, wenn diese Werthe in (7) eingesetzt werden:

$$\{(-10)^3-4.(-10).33+8.(-46)\}r^3+\{(-10)^2.33+2.(-10)(-46)-4.33^2+16.20\}r^2+\{(-10)^2.(-46)+8.(-10)(20)-4.33.(-46)\}r+\{(-10)^2.20-(-46)^2\}=0 \text{ oder:}$$

$$-48r^3+184r^2-128r-116=0 \text{ oder:}$$

$r^3-{}^{23}/_6r^2+{}^8/_3r+{}^{29}/_{12}=0$. Setze hierin $r={}^1/_{18}(s+23)$, so wird:

$$s^3-723s+9632=0.$$

Digitized by Google

Weil hier $4p^3 < 27q^2$ ist, so haben wir nach §. 495. III:

$$\sin\gamma = \frac{p}{3q}\cdot\sqrt{{}^4/_3 p} = \frac{723}{3.9632}\cdot\sqrt{\frac{4.723}{3}} = {}^{241}/_{9632}\sqrt{964}.$$

$$\log 241 = 2{,}3820170$$
$$\log 9632 = 3{,}9837165$$

$$\log\frac{p}{3q} = 0{,}3983005 - 2 \quad (1)$$
$$\log {}^4/_3 p = 2{,}9840770$$
$$\log\sqrt{{}^4/_3 p} = 1{,}4920385 \quad (2)$$

$$(1)+(2) = \log\sin\gamma = 9{,}8903390 - 10$$
$$\gamma = 50^0 58' 24{,}09''$$
$${}^1/_2\gamma = 25^0 29' 12{,}04''$$
$$\log\text{tang}\,{}^1/_2\gamma = 29{,}6782362 - 30$$
$$\log\text{tang}\,\delta = 9{,}8927454 - 10$$
$$\delta = 37^0 59' 45{,}16''$$
$$2\delta = 75^0 59' 30{,}32''$$
$$\log\sin 2\delta = 9{,}9868886 - 10 \quad (3)$$
$$(2)-(3) = \log(-s) = 1{,}5051499$$
$$s = -32.$$

Daher ist $r = {}^1/_{18}(-32+23) = -{}^1/_2$. Setzt man die Werthe für a, b, c, r in (5), so erhält man zur Bestimmung von q die Gleichung:

$$4q^2 = 29; \text{ daher } q = {}^1/_2\sqrt{29}.$$

Setzt man die Werthe für a, b, c, d, q, r in (3), so erhalten wir die reciproke Gl.:

$$y^4 - \frac{24}{\sqrt{29}}y^3 + {}^{198}/_{29}y^2 - \frac{696}{29\sqrt{29}}y + 1 = 0 \text{ oder:}$$

$$y^4 - \frac{24\sqrt{29}}{29}y^3 + {}^{198}/_{29}y^2 - \frac{24\sqrt{29}}{29}y + 1 = 0.$$

Dividire diese Gl. durch y^2, so erhält man:

$$\left(y^2+\frac{1}{y^2}\right) - \frac{24\sqrt{29}}{29}\left(y+\frac{1}{y}\right) + {}^{198}/_{29} = 0.$$

Setze $y+\frac{1}{y} = u$, so wird $y^2+\frac{1}{y^2} = u^2-2$. Setze diese Werthe ein, so ist:

$$u^2 - 2 - \frac{24\sqrt{29}}{29}u + {}^{198}/_{29} = 0; \text{ daher:}$$

$$\left(u - \frac{12\sqrt{29}}{29}\right)^2 = \frac{4.29}{29^2}; \text{ folglich:}$$

Digitized by Google

$$u_1 = {}^{14}/_{29}\sqrt{29} \text{ und } u_2 = {}^{10}/_{29}\sqrt{29}.$$

Mithin ist: $\alpha)\ y + \frac{1}{y} = {}^{14}/_{29}\sqrt{29}$

$$\beta)\ y + \frac{1}{y} = {}^{10}/_{29}\sqrt{29}.$$

Aus α) folgt: $y^2 - {}^{14}/_{29}\sqrt{29}y + 1 = 0$; also:
y_1 und $y_2 = {}^{7}/_{29}\sqrt{29} \pm {}^{2}/_{29}\sqrt{5}.\sqrt{29} = {}^{1}/_{29}(7 \pm 2\sqrt{5})\sqrt{29}$.

Aus β) folgt: $y^2 - {}^{10}/_{29}\sqrt{29}y + 1 = 0$; also:
y_3 und $y_4 = {}^{5}/_{29}\sqrt{29} \pm {}^{2}/_{29}\sqrt{-1}.\sqrt{29} = {}^{1}/_{29}(5 \pm 2\sqrt{-1})\sqrt{29}$.

Nun haben wir $x = qy + r$ angenommen; mithin ist:

$$x_1 = {}^{1}/_{2}\sqrt{29}\{{}^{1}/_{29}(7+2\sqrt{5})\sqrt{29}\} + (-{}^{1}/_{2})$$
$$= {}^{1}/_{2}(7+2\sqrt{5}) - {}^{1}/_{2} = 3 + \sqrt{5}$$

$x_2 = 3 - \sqrt{5}$; $x_3 = 2 + \sqrt{-1}$ und $x_4 = 2 - \sqrt{-1}$.

Methode von Matthiessen.

§. 504. Heißen die Wurzeln der allgemeinen Gleichung:

$$(1)\ x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

x_1, x_2, x_3, x_4 und setzt man:

$$x_1x_2 = y_1,\ x_1x_3 = y_2,\ x_1x_4 = y_3,$$

so wird, da das Produkt der vier Wurzeln der gegebenen Gleichung gleich d ist:

$$x_3x_4 = \frac{d}{y_1} = \varphi_1,\ x_2x_4 = \frac{d}{y_2} = \varphi_2,\ x_2x_3 = \frac{d}{y_3} = \varphi_3.$$

Nun sind die Werthe $y_1, y_2, y_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ offenbar die Wurzelwerthe einer reciproken Gleichung vom sechsten Grade. Um dieselbe zu erhalten, erwäge man, daß, falls die Gleichung:

$$(2)\ x^4 - (x_1+x_2+x_3+x_4)x^3 + \{x_1x_2 + (x_1+x_2)(x_3+x_4) + x_3x_4\}x^2$$
$$- \{x_1x_2(x_3+x_4) + x_3x_4(x_1+x_2)\}x + x_1x_2x_3x_4 = 0$$

identisch ist mit der Gleichung (1), alsdann:

$$(3)\ (x_1+x_2) + (x_3+x_4) = -a$$
$$(4)\ x_1x_2 + (x_1+x_2)(x_3+x_4) + x_3x_4 = b$$
$$(5)\ x_1x_2(x_3+x_4) + x_3x_4(x_1+x_2) = -c$$
$$(6)\ x_1x_2x_3x_4 = d$$

sein muß. Setzt man jetzt:

$$x_1 + x_2 = s \text{ und } x_1x_2 = y,$$

so wird aus (3): $x_3 + x_4 = -(a+s)$

und aus (6): $x_3x_4 = \frac{d}{y}$.

Setzt man diese Werthe in (4) und (5), so erhält man:

Digitized by Google

$$(7)\quad y - s(a+s) + \frac{d}{y} = b$$

$$(8)\quad -y(a+s) + \frac{d}{y}s = -c.$$

Setze den aus (8) sich ergebenden Werth für $s = \frac{y(c-ay)}{y^2-d}$ in (7), so wird:

$$(9)\quad y - \frac{y(c-ay)}{y^2-d}\left\{a + \frac{y(c-ay)}{y^2-d}\right\} + \frac{d}{y} = 0.$$

Entwickelt und ordnet man diese Gleichung, so erhält man die verlangte reciproke Gleichung vom sechsten Grade in y, nämlich:

$$(10)\quad y^6 - by^5 + (ac-d)y^4 - (a^2d - 2bd + c^2)y^3 + \cdot(ac-d)dy^2 - bd^2y + d^3 = 0 \text{ oder:}$$

$$(11)\left(y+\frac{d}{y}\right)^3 - b\left(y+\frac{d}{y}\right)^2 + (ac-d)\left(y+\frac{d}{y}\right) - (a^2d - 4bd + c^2) = 0.$$

Combiniren wir nun die sich aus dieser Gleichung ergebenden Wurzeln, so erhalten wir folgende Werthe für x:

Da $x_1x_2 = y_1$ und $x_1x_3 = y_2$, so ist $x_1^2x_2x_3 = y_1y_2$. Setzen wir hierin den Werth für $x_2x_3 = \frac{d}{y_3}$, so haben wir:

$$x_1^2 = \frac{y_1y_2y_3}{d};\ \text{also}\ x_1 = \pm\sqrt{\frac{y_1y_2y_3}{d}}.$$

Da $x_2x_4 = \varphi_2$ und $x_2x_3 = \varphi_3$, so ist $x_2^2x_3x_4 = \varphi_2\varphi_3$ und weil $x_3x_4 = \frac{d}{y_1}$, so ist:

$$x_2^2 = \frac{y_1\varphi_2\varphi_3}{d},\ \text{also}\ x_2 = \pm\sqrt{\frac{y_1\varphi_2\varphi_3}{d}}.$$

Weil $x_3x_4 = \varphi_1$ und $x_2x_3 = \varphi_3$, so ist $x_3^2x_2x_4 = \varphi_1\varphi_3$ und weil $x_2x_4 = \frac{d}{y_2}$, so ist:

$$x_3^2 = \frac{\varphi_1y_2\varphi_3}{d},\ \text{daher}\ x_3 = \pm\sqrt{\frac{\varphi_1y_2\varphi_3}{d}}.$$

Endlich ist: $x_3x_4 = \varphi_1$ und $x_2x_4 = \varphi_2$, also $x_4^2x_2x_3 = \varphi_1\varphi_2$ und weil $x_2x_3 = \frac{d}{y_3}$, so ist:

$$x_4^2 = \frac{\varphi_1\varphi_2y_3}{d};\ \text{also}\ x_4 = \pm\sqrt{\frac{\varphi_1\varphi_2y_3}{d}}.$$

Diese Werthe finden statt, wenn:

$$\{y_1y_2y_3 + (y_1+y_2+y_3)d\} : \sqrt{y_1y_2y_3d} = \mp a.$$

Digitized by Google

Wenn aber $\{y_1y_2y_3+(y_1+y_2+y_3)d\}:\sqrt{y_1y_2y_3d}=\mp(c:\sqrt{d})$ ist, so wird:

$$x_{10}=\pm\sqrt{\frac{\varphi_1\varphi_2\varphi_3}{d}};\quad x_{20}=\pm\sqrt{\frac{\varphi_1y_2y_3}{d}};\quad x_{30}=\pm\sqrt{\frac{y_1\varphi_2y_3}{d}};$$

$$x_{40}=\pm\sqrt{\frac{y_1y_2\varphi_3}{d}}.$$

Setzt man: $y+\frac{d}{y}=z$, so wird:

$$\left(y+\frac{d}{y}\right)^2=z^2-2d \text{ und}$$

$$\left(y+\frac{d}{y}\right)^3=z^3-3d\left(y+\frac{d}{y}\right)=z^3-3dz.$$

Substituirt man diese Werthe in Gleichung (11), so wird:

(12) $z^3-bz^2+(ac-4d)z-(a^2d-4bd+c^2)=0.$

Setzt man zur Fortschaffung des zweiten Gliedes $z=\frac{1}{3}(u+b)$, so wird:

(13) $u^3-3u\{b^2-3(ac-4d)\}-\{2b^3+27(a^2d-4bd+c^2)-9b(ac-4d\}=0.$

Ist nun $a=-8$, $b=14$, $c=4$, $d=-8$, so erhält man aus Gleichung (13):

(14) $u^3-588u-4192=0.$

Weil in Gl. (14): $4p^3>27q^2$, so geschieht die Auflösung nach §. 495. VI. Es ist also:

$$\sin 3\varepsilon=\frac{3q}{p}\cdot\frac{1}{\sqrt{^4/_3p}}={}^{262}/_{343}$$

$$\log 262=2{,}4183013$$
$$\log 343=2{,}5352941$$
$$\log\sin 3\varepsilon=9{,}8830072-10$$
$$3\varepsilon=49^\circ48'17{,}86''$$
$$\varepsilon=16^\circ36'5{,}95''$$
$$\log\sin\varepsilon=9{,}4559346-10$$
$$\log\sqrt{^4/_3p}=1{,}4471580$$
$$\log(-u)=0{,}9030926$$
$$u=-8;$$

daher: $z_1=\frac{1}{3}(-8+14)=2.$

Diesen Werth für z hätte man auch direkt aus Gl. (12) herleiten können. Denn setzt man die Werthe für a, b, c, d in jene Gl., so wird:

(15) $z^3-14z^2+48=0$ oder:

$z^3-14z^2=-48$; hieraus erhält man:

$z^2(z-14)=2^2(2-14)$; folglich $z=2.$

Digitized by Google

Um die beiden andern Werthe für z zu finden, dividire man Gl. (15) durch $z-2$ und wir erhalten die quadratische Gleichung $z^2-12z-24=0$, woraus $z_2=6+2\sqrt{15}$ und $z_3=6-2\sqrt{15}$.

Da nun $z=y+\frac{d}{y}$ angenommen wurde, so haben wir:

(16) $y-\frac{8}{y}=2$; (17) $y-\frac{8}{y}=6+2\sqrt{15}$; (18) $y-\frac{8}{y}=6-2\sqrt{15}$.

Aus (16) resultirt: $y_1=4$

„ (17) „ $y_2=3+\sqrt{15}+\sqrt{32+6\sqrt{15}}$

„ (18) „ $y_3=3-\sqrt{15}+\sqrt{32-6\sqrt{15}}$.

Der Ausdruck $\sqrt{32+6\sqrt{15}}$ läßt sich nach §. 339 in die Summe zweier Quadratwurzeln umformen, und weil $m=32$, $\sqrt{n}=6\sqrt{15}$, also $n=540$ ist, so wird:

$$\sqrt{32+6\sqrt{15}}=\sqrt{{}^1/_2.32+{}^1/_2\sqrt{32^2-540}}+\sqrt{{}^1/_2.32-{}^1/_2\sqrt{32^2-540}}$$

$$=\sqrt{16+11}+\sqrt{16-11}=3\sqrt{3}+\sqrt{5};\ \text{daher ist:}$$

$$y_2=3+\sqrt{15}+3\sqrt{3}+\sqrt{5}=3(1+\sqrt{3})+\sqrt{5}(1+\sqrt{3})=(1+\sqrt{3})(3+\sqrt{5})$$

$$y_3=(1-\sqrt{3})(3+\sqrt{5}).$$

Weil nun $y_1=4$ und $d=-8$, so ist $\varphi_1=-{}^8/_4=-2$.

$$\varphi_2=\frac{-8}{(1+\sqrt{3})(3+\sqrt{5})}=\frac{-8(1-\sqrt{3})(3-\sqrt{5})}{-8}=(1-\sqrt{3})(3-\sqrt{5})$$

$$\varphi_3=\frac{-8}{(1-\sqrt{3})(3+\sqrt{5})}=(1+\sqrt{3})(3-\sqrt{5}).$$

Weil nun die erste der obigen Bedingungen zutrifft, so ist:

$$x_1=\sqrt{\frac{y_1y_2y_3}{d}}=\sqrt{\frac{4(1+\sqrt{3})(3+\sqrt{5})(1-\sqrt{3})(3+\sqrt{5})}{-8}}$$

$$=\sqrt{\frac{4(1-3)(3+\sqrt{5})^2}{-8}}=\sqrt{\frac{-8(3+\sqrt{5})^2}{-8}}=\sqrt{(3+\sqrt{5})^2}=3+\sqrt{5};\ \text{also:}$$

$$x_2=\sqrt{(3-\sqrt{5})^2}=3-\sqrt{5},\ x_3=1+\sqrt{3},\ x_4=1-\sqrt{3}.$$

3. Setzt man in Gleichung (12) der vorigen Nummer $a={}^2/_3$, $b=-{}^{149}/_{12}$, $c={}^{47}/_{12}$ und $d=1$, so wird:

$$z^3+{}^{149}/_{12}z^2-{}^{25}/_{18}z-{}^{9425}/_{144}=0.$$

Setze $z={}^1/_{36}(u-149)$, so hat man:

$$u^3-68403u+3830398=0.$$

Digitized by Google

Hier ist $4p^3 > 27q^2$, mithin nach §. 495. VI aufzulösen. Daher ist:

$$\sin 3\varepsilon = \frac{3q}{p} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{_3p}} = \frac{3.3830398}{68403} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{4.68403}{3}}} = \frac{1915199}{22801.151}$$

$$\log 1915199 = 6{,}2822139$$
$$\log 22801.151 = 6{,}5369309$$
$$\log \sin 3\varepsilon = 9{,}7452830 - 10$$
$$3\varepsilon = 33^\circ 47' 52{,}80''$$
$$\varepsilon = 11^\circ 15' 57{,}60''$$
$$\log \sin \varepsilon = 9{,}2908450 - 10$$
$$\log \sqrt[4]{_3p} = 2{,}4800069$$
$$\log u = 1{,}7708519$$
$$u = 59$$

Daher $z_1 = {}^1/_{36}(59 - 149) = -{}^5/_2$. Dividire die Gl. in z durch $z + {}^5/_2$, so erhält man: $z^2 + {}^{119}/_{12}z - {}^{1885}/_{72} = 0$; folglich $z_2 = {}^{13}/_6$ und $z_3 = -{}^{145}/_{12}$. Mithin ist:

(1) $y + \frac{1}{y} = -{}^5/_2$; daher $y_1 = -{}^1/_2$ und $\varphi_1 = -2$.

(2) $y + \frac{1}{y} = {}^{13}/_6$; daher $y_2 = {}^3/_2$ und $\varphi_2 = {}^2/_3$.

(3) $y + \frac{1}{y} = -{}^{145}/_{12}$; daher $y_3 = -{}^1/_{12}$ und $\varphi_3 = -12$.

Da hier die zweite obige Bedingung zutrifft, so ist:

$$x_{10} = -{}^1/_6;\ x_{20} = 3;\ x_{30} = {}^1/_2;\ x_{40} = -4.$$

Methode von Job *).

(Heis §. 98b.)

§. 505. Gegeben sei die allgemeine Gleichung vom vierten Grade:

$$(1)\quad x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Um den Grad der zu suchenden Resolvente zu bestimmen, setze man:

$$x = \varrho(1 \pm \sqrt{-n});$$

alsdann ist: $x_1 = \varrho_1(1 + \sqrt{-n_1})$; $x_2 = \varrho_2(1 - \sqrt{-n_1})$;

$x_3 = \varrho_2(1 + \sqrt{-n_2})$; $x_4 = \varrho_2(1 - \sqrt{-n_2})$ u. s. w.

*) Man sehe: „Beitrag zur Auflösung der Gleichungen von Oberlehrer Job in dem Programm der Dresdener Annen-Realschule vom Jahre 1864."

Digitized by Google

Hieraus folgt: $\varrho_1 = {}^1/_2(x_1+x_2)$; $\varrho_2 = {}^1/_2(x_3+x_4)$ u. s. w., mithin ist ϱ gleich der halben Summe zweier Wurzeln der gegebenen Gl. (1). Setzt man den Werth für x in Gl. (1), so verwandelt sich dieselbe in folgende:

$$\varrho^4(1\pm\sqrt{-n})^4+a\varrho^3(1\pm\sqrt{-n})^3+b\varrho^2(1\pm\sqrt{-n})^2+$$
$$c\varrho(1\pm\sqrt{-n})+d=0 \text{ oder:}$$
$$(2)\ \varrho^4(1\pm4\sqrt{-n}-6n\mp4n\sqrt{-n}+n^2)+$$
$$a\varrho^3(1\pm3\sqrt{-n}-3n\mp n\sqrt{-n})+b\varrho^2(1\pm2\sqrt{-n}-n)+$$
$$c\varrho(1\pm\sqrt{-n})+d=0.$$

Setzt man die Summe der reellen so wie der imaginären Glieder gleich 0, so erhält man:

$$(3)\ \varrho^4(1-6n+n^2)+a\varrho^3(1-3n)+b\varrho^2(1-n)+c\varrho+d=0$$
$$(4)\ \varrho^4(4-4n)+a\varrho^3(3-n)+2b\varrho^2+c\varrho=0.$$

Aus (4) folgt: $(5)\ n=\dfrac{4\varrho^3+3a\varrho^2+2b\varrho+c}{(4\varrho+a)\varrho^2}$.

Setzt man diesen Werth für n in (3) und entwickelt diese Gl., so wird:

$$(6)\ \varrho^6+{}^3/_2a\varrho^5+{}^1/_4(3a^2+2b)\varrho^4+{}^1/_8(a^3+4ab)\varrho^3+$$
$${}^1/_{16}(ac+2a^2b+b^2-4d)\varrho^2+{}^1/_{32}(a^2c+ab^2-4ad)\varrho+$$
$${}^1/_{64}(abc-a^2d-c^2)=0.$$

Um aus dieser Resolvente vom sechsten Grade eine solche vom dritten Grade zu erhalten, denke man sich die Gl. (6) in drei Faktoren zerlegt. Da nämlich:

$$\varrho_1={}^1/_2(x_1+x_2);\ \varrho_2={}^1/_2(x_1+x_3);\ \varrho_3={}^1/_2(x_1+x_4)$$
$$\varrho_4={}^1/_2(x_2+x_3);\ \varrho_5={}^1/_2(x_2+x_4);\ \varrho_6={}^1/_2(x_3+x_4)$$

und da ferner $x_1+x_2+x_3+x_4=-a$

ist, so ist $\varrho_1+\varrho_6=\varrho_2+\varrho_5=\varrho_3+\varrho_4=-{}^1/_2a.$

Sollen daher ϱ_1 und ϱ_6, ebenso ϱ_2 und ϱ_5, sowie ϱ_3 und ϱ_4 die Wurzeln einer Gleichung sein, so werden folgende drei Gleichungen diesen Bedingungen entsprechen:

$$(7)\ \varrho^2+{}^1/_2a\varrho+y_1=0$$
$$(8)\ \varrho^2+{}^1/_2a\varrho+y_2=0$$
$$(9)\ \varrho^2+{}^1/_2a\varrho+y_3=0,$$

worin die Coefficienten y_1, y_2, y_3 noch näher zu bestimmende Größen sind. Multiplicirt man diese 3 Gleichungen mit einander, so erhalten wir die Gleichung:

$$(10)\ \varrho^6+{}^3/_2a\varrho^5+(y_1+y_2+y_3+{}^5/_4a^2)\varrho^4+a(y_1+y_2+y_3+{}^1/_8a^2)\varrho^3$$
$$+\{y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3+{}^1/_4a^2(y_1+y_2+y_3)\}\varrho^2$$
$$+{}^1/_2a(y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3)\varrho+y_1y_2y_3=0,$$

welche mit Gl. (6) identisch sein muß. Alsdann ist:

Digitized by Google

(11) $y_1+y_2+y_3+{}^3/_4a^2={}^3/_4a^2+{}^1/_2b$; folglich:

(12) $-(y_1+y_2+y_3)=-{}^1/_2b$

$y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3+{}^1/_4a^2(y_1+y_2+y_3)={}^1/_{16}(ac+2a^2b+b^2-4d)$.

Setze hierin aus (12) den Werth für $y_1+y_2+y_3$, so wird:

(13) $y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3={}^1/_{16}(ac+b^2-4d)$

(14) $-y_1y_2y_3=-{}^1/_{64}(abc-a^2d-c^2)$.

Daher ist die cubische Resolvente der Gleichung des vierten Grades:

(15) $y^3-{}^1/_2by^2+{}^1/_{16}(ac+b^2-4d)-{}^1/_{64}(abc-a^2d-c^2)$.

Nach der Annahme ist allgemein: $\varrho^2+{}^1/_2a\varrho+y=0$; hieraus ergeben sich für die verschiedenen ϱ folgende Werthe:

$$\varrho_1=-{}^1/_4(a+\sqrt{a^2-16y_1})$$
$$\varrho_6=-{}^1/_4(a-\sqrt{a^2-16y_1})$$
$$\varrho_2=-{}^1/_4(a+\sqrt{a^2-16y_2})$$
$$\varrho_5=-{}^1/_4(a-\sqrt{a^2-16y_2})$$
$$\varrho_3=-{}^1/_4(a+\sqrt{a^2-16y_3})$$
$$\varrho_4=-{}^1/_4(a-\sqrt{a^2-16y_3})$$

Da nun $\varrho_1-\varrho_4={}^1/_2(x_1-x_3)$ und $\varrho_2={}^1/_2(x_1+x_3)$, so wird durch Addition dieser beiden Gleichungen:

(16) $x_1=\varrho_1+\varrho_2-\varrho_4$,

oder, wenn wir hierin die Werthe für ϱ_1, ϱ_2 und ϱ_4 einsetzen:

(17) $x_1=-{}^1/_4\{a+\sqrt{a^2-16y_1}+\sqrt{a^2-16y_2}+\sqrt{a^2-16y_3}\}$

Ferner ist: $\varrho_1-\varrho_2={}^1/_2(x_2-x_3)$ und $\varrho_4={}^1/_2(x_2+x_3)$; mithin:

(18) $x_2=\varrho_1-\varrho_2+\varrho_4$ oder:

(19) $x_2=-{}^1/_4\{a+\sqrt{a^2-16y_1}-\sqrt{a^2-16y_2}-\sqrt{a^2-16y_3}\}$

Ferner ist: $\varrho_2-\varrho_1={}^1/_2(x_3-x_2)$ und $\varrho_3={}^1/_2(x_2+x_3)$; folglich:

(20) $x_3=-\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3$ oder:

(21) $x_3=-{}^1/_4\{a-\sqrt{a^2-16y_1}+\sqrt{a^2-16y_2}-\sqrt{a^2-16y_3}\}$

Weil endlich $x_1+x_2+x_3+x_4=-a$ ist, so ist:

(22) $x_4=-a-(x_1+x_2+x_3)$ oder:

(23) $x_4=-{}^1/_4\{a-\sqrt{a^2-16y_1}-\sqrt{a^2-16y_2}+\sqrt{a^2-16y_3}\}$.

Setzt man $a=20$, $b=98$, $c=76$ und $d=-195$ in Gl. (15), so wird:

$$y^3-{}^1/_2.98y^2+{}^1/_{16}(20.76+98^2+4.195)y$$
$$-{}^1/_{64}(20.98.76+20^2.195-76^2)=0 \text{ oder:}$$
$$y^3-49y^2+744y-3456=0.$$

Setzt man hierin zur Fortschaffung des zweiten Gliedes $y={}^1/_3(z+49)$, so wird:

Digitized by Google

$$z^3 - 507z - 506 = 0.$$

Weil hier $4p^3 > 27q^2$, so ist die Gleichung nach §. 495. VI aufzulösen. Es ist also:

$$\sin 3\varepsilon = \frac{3q}{p} \cdot \frac{1}{\sqrt{4/3p}} = \frac{3.506}{507} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{4.507}{3}}} = \frac{253}{13^3}$$

$$\log 253 = 2{,}4031205$$
$$\log 13^3 = 3{,}3418302$$
$$\log \sin 3\varepsilon = 9{,}0612903 - 10$$
$$3\varepsilon = 6^0 36' 45{,}66''$$
$$\varepsilon = 2^0 12' 15{,}22''$$
$$60^0 - \varepsilon = 57^0 47' 44{,}88''$$
$$60^0 + \varepsilon = 62^0 12' 15{,}22''$$
$$\log \sin \varepsilon = 18{,}5850266 - 20$$
$$\log \sqrt{4/3p} = 1{,}4149734$$
$$\log(-z) = 0{,}0000000$$
$$z_1 = -1$$
$$\log \sin(60^0 - \varepsilon) = 9{,}9274495 - 10$$
$$\log \sqrt{4/3p} = 1{,}4149734$$
$$\log(-z_2) = 1{,}3424229$$
$$z_2 = -22$$
$$\log \sin(60^0 + \varepsilon) = 9{,}9467545 - 10$$
$$\log \sqrt{4/3p} = 1{,}4149734$$
$$\log z_3 = 1{,}3617279$$
$$z_3 = 23.$$

Daher ist $y_1 = 16$, $y_2 = 9$, $y_3 = 24$; folglich, wenn wir für a und y die Werthe in die Gleichungen (17), (19), (21), (23) einsetzen, so wird:

$$x_1 = -1/4\{20 + \sqrt{20^2 - 16^2} + \sqrt{20^2 - 16.9} + \sqrt{20^2 - 16.24}\}$$
$$= -1/4\{(20+12)+(16+4\} = -1/4.52 = -13$$
$$x_2 = -1/4.12 = -3;\ x_3 = -1/4.20 = -5;\ x_4 = -1/4.(-4) = +1.$$

Bestimmung der rationalen Wurzeln einer Gleichung.

(Heis §. 99.)

§. 506. Wenn die Coefficienten einer Gleichung ganze Zahlen sind und der Coefficient der höchsten Potenz der Unbekannten die Einheit ist, so können die rationalen Wurzeln wieder nur ganze Zahlen sein, welche sich, da nach §. 480 das Absolutglied das Produkt sämmtlicher Wurzeln ist, unter den Faktoren des Absolutgliedes vorfinden müssen. Um daher die rationalen

Digitized by Google

Wurzeln der Gleichung zu finden, zerlege man das Absolutglied in seine einfachen und zusammengesetzten Faktoren und substituire dieselben, sowohl positiv als negativ genommen, in die Gleichung; diejenigen unter diesen Faktoren, welche die Gleichung identisch machen, sind Wurzeln der Gleichung.

Nun sei die Gleichung gegeben:

(1) $ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots+rx^3+sx^2+tx+u=0$

und α sei ein Faktor des Absolutgliedes, so ist, wenn

$$\frac{u}{\alpha}=q_1,\ \frac{q_1+t}{\alpha}=q_2,\ \frac{q_2+s}{\alpha}=q_3,\ \frac{q_3+r}{\alpha}=q_4,\ \ldots\ \frac{q_{n-2}+c}{\alpha}=q_{n-1}$$

$$\frac{q_{n-1}+b}{\alpha}=q_n,\ \frac{q_n+a}{\alpha}=0$$

ist, α eine Wurzel der Gleichung (1). Denn es ist nach der Annahme:

$$u=q_1\alpha,\ t=q_2\alpha-q_1,\ s=q_3\alpha-q_2,\ r=q_4\alpha-q_3,$$
$$\ldots\ c=q_{n-1}\alpha-q_{n-2}$$
$$b=q_n\alpha-q_{n-1},\ a=-q_n.\ \text{Hieraus folgt:}$$
$$a\alpha^n=-q_n\alpha$$
$$b\alpha^{n-1}=q_n\alpha^n-q_{n-1}\alpha^{n-1}$$
$$c\alpha^{n-2}=q_{n-1}\alpha^{n-1}-q_{n-2}\alpha^{n-2}$$
$$\vdots$$
$$r\alpha^3=q_4\alpha^4-q_3\alpha^3$$
$$s\alpha^2=q_3\alpha^3-q_2\alpha^2$$
$$t\alpha=q_2\alpha^2-q_1\alpha$$
$$u=q_1\alpha,$$

mithin, wenn wir diese Gleichungen addiren, erhalten wir, da die Ausdrücke auf der rechten Seite sich aufheben, also $=0$ werden:

$$a\alpha^n+b\alpha^{n-1}+c\alpha^{n-2}+\ldots+r\alpha^3+s\alpha^2+t\alpha+u=0$$

und folglich α eine Wurzel der gegebenen Gl. (1). Wird aber bei diesem Verfahren a nicht $=-q_n$ oder bleibt bei der Division durch α ein Rest, so kann auch α keine Wurzel der Gl. sein und dasselbe Verfahren muß alsdann mit einem andern Faktor des Absolutgliedes wiederholt werden.

D. Auflösung der numerischen Gleichungen von höhern Graden mit einer unbekannten Größe.

§. 507. 1. Auflösung durch Zerlegung in Faktoren.

(Heis §. 99.)

1. Wenn diese Gleichung keine imaginären Wurzeln hat, so sind die Wurzeln alle positiv, weil sie nur Zeichenwechsel hat.

Digitized by Google

Da das Absolutglied das Produkt der 3 Wurzeln ist, so müssen sich unter den Divisoren desselben die Wurzeln der Gleichung befinden. Die Divisoren von 6 sind nun $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Da aber die Gleichung nur positive Wurzeln hat, so sind die Divisoren $-1, -2, -3, -6$ ausgeschlossen. Es ist leicht ersichtlich, daß auch $+6$ keine Wurzel dieser Gleichung sein kann, folglich ist $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ und in der That ist: $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3) = 0$.

2. Auch hier sind die Wurzeln alle positiv, weil nur Zeichenwechsel darin vorkommen, folglich sind auch alle negativen Divisoren des Absolutgliedes ausgeschlossen. Nun hat 60 die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60 zu Divisoren. Nach §. 483 ist die Grenze der positiven Wurzeln $12+1=13$; mithin braucht man blos die positiven Divisoren, die zwischen 2 bis 12 enthalten sind, zu versuchen. Es ist leicht ersichtlich, daß 1 keine Wurzel der Gl. sein kann. Bestimmen wir daher nach §. 506 die Wurzeln dieser Gleichung, so erhalten wir, da $a = 1$, $b = -12$, $c = +47$ und $d = -60$ ist:

Für $\alpha = 2$ ist:

$$q_1 = \frac{-60}{2} = -30$$

$$q_2 = \frac{-30+47}{2} = +8\frac{1}{2}$$

also ist 2 keine Wurzel nach §. 506.

Für $\alpha = 3$ ist:

$$q_1 = \frac{-60}{3} = -20$$

$$q_2 = \frac{-20+47}{3} = +9$$

$$q_3 = \frac{9-12}{3} = -1$$

$$q_4 = \frac{-1+1}{3} = 0$$

Für $\alpha = 4$ ist:

$$q_1 = \frac{-60}{4} = -15$$

$$q_2 = \frac{-15+47}{4} = +8$$

$$q_3 = \frac{8-12}{4} = -1$$

$$q_4 = \frac{-1+1}{4} = 0$$

Für $\alpha = 5$ ist:

$$q_1 = \frac{-60}{5} = -12$$

$$q_2 = \frac{-12+47}{5} = +7$$

$$q_3 = \frac{7-12}{5} = -1$$

$$q_4 = \frac{-1+1}{5} = 0$$

Da die cubische Gleichung nur 3 Wurzeln hat, so sind dieselben also in den Zahlen 3, 4, 5 gefunden; mithin ist:

$$f(x) = (x-3)(x-4)(x-5) = 0.$$

3. Diese Gleichung hat zwei Zeichenwechsel und eine Zeichenfolge; daher hat sie zwei positive und eine negative Wurzel. Die Divisoren des letzten Gliedes 24 sind: $\pm 2, \pm 3, \pm 4,$

Digitized by Google

$\pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24$. Da 1 keine Wurzel der Gl. sein kann, so stellen wir die Versuche mit den übrigen an. Nun ist $a = 1,\ b = -3,\ c = -10,\ d = +24$:

Für $\alpha = +2$ ist:
$q_1 = {}^{24}/_{2} = 12$
$q_2 = \frac{12-10}{2} = 1$
$q_3 = \frac{1-3}{2} = -1$
$q_4 = \frac{-1+1}{2} = 0$

Für $\alpha = -2$ ist:
$q_1 = \frac{24}{-2} = -12$
$q_2 = \frac{-12-10}{-2} = +11$
$q_3 = \frac{11-3}{-2} = -4$
$q_4 = \frac{-4+1}{-2} > 0$

Für $\alpha = +3$ ist:
$q_1 = {}^{24}/_{3} = 8$
$q_2 = \frac{8-10}{3}$
ist keine ganze Zahl

Für $\alpha = -3$ ist:
$q_1 = \frac{24}{-3} = -8$
$q_2 = \frac{-8-10}{-3} = +6$
$q_3 = \frac{6-3}{-3} = -1$
$q_4 = \frac{-1+1}{-3} = 0$

Für $\alpha = +4$ ist:
$q_1 = {}^{24}/_{4} = 6$
$q_2 = \frac{6-10}{4} = -1$
$q_3 = \frac{-1-3}{4} = -1$
$q_4 = \frac{-1+1}{4} = 0;$

folglich sind: $+2, -3, +4$ die Wurzeln der Gleichung, weshalb:

$$f(x) = (x-2)(x+3)(x-4) = 0.$$

4. In dieser Gleichung sind zwei Zeichenfolgen und ein Zeichenwechsel, daher hat die Gleichung eine positive und zwei negative Wurzeln. Die Theiler von 80 sind: 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40, 80. Ferner ist: $a = 1,\ b = +5,\ c = -34,\ d = -80$. Daher:

Für $\alpha = +2$ ist $q_1 = -40,\ q_2 = -37,\ q_3 = 16,\ q_4 = 8\,{}^{1}/_{2}$
„ $\alpha = -2$ „ $q_1 = +40,\ q_2 = -3,\ q_3 = -1,\ q_4 = 0$
„ $\alpha = +4$ „ $q_1 = -20,\ q_2$ keine ganze Zahl
„ $\alpha = -4$ „ $q_1 = +20,\ q_2$ „ „ „
„ $\alpha = +5$ „ $q_1 = -16,\ q_2 = -10,\ q_3 = -1,\ q_4 = 0$
„ $\alpha = -5$ „ $q_1 = +16,\ q_2$ keine ganze Zahl
„ $\alpha = +8$ „ $q_1 = -10,\ q_2$ „ „ „
„ $\alpha = -8$ „ $q_1 = +10,\ q_2 = +3,\ q_3 = -1,\ q_4 = 0.$

Hieraus folgt, daß die Divisoren des letzten Gliedes, nämlich $+2, +4, -4, -5$ und $+8$ nicht Wurzeln der Gleichung sein können, wohl aber $-2, +5$ und -8, weshalb:

$$f(x) = (x+2)(x-5)(x+8) = 0.$$

5. Diese Gleichung hat 3 Zeichenfolgen, also sind sämmtliche

Digitized by Google

Wurzeln der Gl. negativ. Die Theiler des Absolutgliedes sind 3, 7, 11, 21, 33, 77. Ferner ist:

$$a = 1,\ b = 21,\ c = 131,\ d = 231.$$ Nun ist:

Für $\alpha = -3$, $q_1 = -77$, $q_2 = -18$, $q_3 = -1$, $q_4 = 0$
„ $\alpha = -7$, $q_1 = -33$, $q_2 = -14$, $q_3 = -1$, $q_4 = 0$
„ $\alpha = -11$, $q_1 = -21$, $q_2 = -10$, $q_3 = -1$, $q_4 = 0$.

Mithin sind die Wurzeln der Gleichung: $-3, -7, -11$; weshalb: $f(x) = (x+3)(x+7)(x+11) = 0$.

6. Die Gleichung hat zwei positive und eine negative Wurzel, weil sie zwei Zeichenwechsel und eine Zeichenfolge enthält. Die Divisoren von 36 sind $\pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 18, \pm 36$. Nun ist $a = 1,\ b = -4,\ c = -9,\ d = 36$.

Für $\alpha = +2$ ist $q_1 = 18$, q_2 keine ganze Zahl
„ $\alpha = -2$ „ $q_1 = -18$, q_2 „ „ „
„ $\alpha = +3$ „ $q_1 = 12$, $q_2 = 1$, $q_3 = -1$, $q_4 = 0$
„ $\alpha = -3$ „ $q_1 = -12$, $q_2 = 7$, $q_3 = -1$, $q_4 = 0$
„ $\alpha = +4$ „ $q_1 = 9$, $q_2 = 0$, $q_3 = -1$, $q_4 = 0$.

Mithin sind $+3, -3, +4$ die Wurzeln der Gl., und es ist:

$$f(x) = (x-3)(x+3)(x-4).$$

Oder: Da $(x+a)(x-a)(x \pm b) = x^3 \pm bx^2 - a^2x \mp a^2b = 0$, so erhält man folgende allgemeine Regel für die Wurzeln einer solchen Gleichung: „Jede cubische Gleichung von der Form $x^3 \pm Ax^2 - Bx \mp C = 0$, in welcher $A.B = C$ ist, hat eine Wurzel $-A$ und zwei andere $\pm\sqrt{-B}$.“ Die beiden letztern Wurzeln sind reell oder imaginär, je nachdem der zweite Coefficient negativ oder positiv ist. In der hier gegebenen Gl. ist $A.B = C$ oder $4.9 = 36$, also ist die erste Wurzel 4 und weil der Coefficient von x, nämlich $B = 9$ negativ ist, so sind die beiden andern Wurzeln $\pm\sqrt{9} = \pm 3$.

7. In der hier gegebenen Gl. ist $A.B = C$ oder $2.4 = 8$; folglich sind die Wurzeln der Gl. 2 und $\pm\sqrt{4}$ oder $+2, +2, -2$; mithin ist:
$f(x) = (x-2)(x-2)(x+2) = (x-2)^2(x+2) = 0$.

8. Diese Gleichung hat nur Zeichenfolgen, also sind ihre sämmtlichen Wurzeln negativ. Durch Umformung der gegebenen Gl. erhält man:

$$x^3 + 3.3.x^2 + 3.3^2.x + 3^3 = 0.$$

Hieraus folgt, daß die linke Seite der Cubus von $x+3$ ist; weshalb: $f(x) = (x+3)^3 = 0$.

9 Diese Gleichung hat nur Zeichenwechsel, daher sind die vier Wurzeln positiv. Die Theiler von 24 sind: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. Untersuchen wir jetzt, welche von diesen Theilern Wurzeln der Gl. sind. Nun ist $a = 1,\ b = -10,\ c = 35,\ d = -50,\ e = 24$.

Digitized by Google

Für $\alpha = 1$ ist $q_1 = 24$, $q_2 = -26$, $q_3 = +9$, $q_4 = -1$, $q_5 = 0$
„ $\alpha = 2$ „ $q_1 = 12$, $q_2 = -19$, $q_3 = +8$, $q_4 = -1$, $q_5 = 0$
„ $\alpha = 3$ „ $q_1 = 8$, $q_2 = -14$, $q_3 = +7$, $q_4 = -1$, $q_5 = 0$
„ $\alpha = 4$ „ $q_1 = 6$, $q_2 = -11$, $q_3 = +6$, $q_4 = -1$, $q_5 = 0$,

folglich sind 1, 2, 3, 4 die Wurzeln der Gl.; daher ist:

$$f(x) \doteq (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 0.$$

10. Diese Gleichung hat zwei Zeichenwechsel und zwei Zeichenfolgen, daher zwei positive und ebenso viele negative Wurzeln. Die Theiler des Absolutgliedes sind: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60. Um die Theiler in engere Grenzen zu ziehen, setze man $x = y + 1$, dann wird das Absolutglied der transformirten Gleichung:

$$1 + 2 - 25 - 26 + 120 = +72,$$

dessen Theiler 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36 sind, und wenn dieselben um eine Einheit vermehrt werden, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 13, 19, 25, 37; daraus folgt, daß die Wurzeln der Gleichung nur unter den Theilern ± 2, ± 3, ± 4, ± 5, ± 10 zu suchen sind. Wird nun mit diesen Theilern der Versuch gemacht, so wird, weil $a = 1$, $b = 2$, $c = -25$, $d = -26$, $e = +120$.

Für $\alpha = +2$ wird $q_1 = 60$, $q_2 = 17$, $q_3 = -4$, $q_4 = -1$, $q_5 = 0$
„ $\alpha = -2$ „ $q_1 = -60$, $q_2 = 43$, $q_3 = -9$, q_4 keine g. Zahl
„ $\alpha = +3$ „ $q_1 = 40$, q_2 keine ganze Zahl
„ $\alpha = -3$ „ $q_1 = -40$, $q_2 = 22$, $q_3 = +1$, $q_4 = -1$, $q_5 = 0$
„ $\alpha = +4$ „ $q_1 = 30$, $q_2 = 1$, $q_3 = -6$, $q_4 = -1$, $q_5 = 0$
„ $\alpha = -4$ „ $q_1 = -30$, $q_2 = +14$, q_3 keine g. Zahl
„ $\alpha = +5$ „ $q_1 = 24$, q_2 keine ganze Zahl
„ $\alpha = -5$ „ $q_1 = -24$, $q_2 = +10$, $q_3 = +3$, $q_4 = -1$, $q_5 = 0$
„ $\alpha = +10$ „ $q_1 = 12$, q_2 keine ganze Zahl
„ $\alpha = -10$ „ $q_1 = -12$, q_2 keine ganze Zahl.

Mithin sind die vier Wurzeln der Gleichung $+2$, -3, $+4$, -5; es ist also:

$$f(x) = (x-2)(x+3)(x-4)(x+5) = 0.$$

11. Die Gleichung hat drei Zeichenfolgen und einen Zeichenwechsel, daher hat sie drei negative und eine positive Wurzel. Die Theiler des letzten Gliedes sind: 7, 11, 13, 19, 77, 91, 133, 143, 209, 247, 1001, 1463, 1729, 2717. Da dieser Theiler viele und zwar sehr große sind, so suche man die Grenze für die negativen Wurzeln zu bestimmen. Setzt man $x = -20$, so wird:

$$(-20)^4 + 28.(-20)^3 + 42.(-20)^2 - 3452.(-20) - 19019 = 2821.$$

Da diese Zahl noch immer groß ist, so folgt daraus, daß $x < -20$ angenommen werden muß. Wir brauchen also

Digitized by Google

blos mit den Theilern ± 7, ± 11, ± 13, ± 19 den Versuch zu machen. Für

$\alpha = +7$ wird $q_1 = -2717$, q_2 gibt keine ganze Zahl
$\alpha = -7$ „ $q_1 = +2717$, $q_2 = +105$, $q_3 = -21$, $q_4 = -1$, $q_5 = 0$
$\alpha = +11$ „ $q_1 = -1729$, $q_2 = -471$, $q_3 = -39$, $q_4 = -1$, $q_5 = 0$
$\alpha = -11$ „ $q_1 = +1729$, q_2 gibt keine ganze Zahl
$\alpha = +13$ „ $q_1 = -1463$, q_2 „ „ „ „
$\alpha = -13$ „ $q_1 = +1463$, $q_2 = +153$, $q_3 = -15$, $q_4 = -1$, $q_5 = 0$
$\alpha = +19$ „ $q_1 = -1001$, q_2 gibt keine ganze Zahl
$\alpha = -19$ „ $q_1 = +1001$, $q_2 = +129$, $q_3 = -9$, $q_4 = -1$, $q_5 = 0$.

Die vier Wurzeln der Gleichung sind also -7, $+11$, -13, -19, so daß also:

$$f(x) = (x+7)(x-11)(x+13)(x+19) = 0.$$

12. Hier sind drei Zeichenwechsel und zwei Zeichenfolgen, also hat die Gleichung drei positive und zwei negative Wurzeln. Die Theiler von 36 sind 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36. Um die Grenze der Wurzeln zu bestimmen, forme man die gegebene Gl. in folgende um:

$$x^3(x^2-13) - x^2(x^2-13) + 36(x-1) = 0 \text{ oder:}$$
$$\{x^2(x^2-13)+36\}(x-1) = 0,$$

so ist einleuchtend, daß $x = 4$ ein positives Resultat liefert. Da aus $x - 1 = 0$ folgt, daß $x = 1$ eine Wurzel der Gl. ist, so liegen die Wurzeln der Gl. zwischen 0 und 4. Für

$\alpha = +2$ wird $q_1 = -18$, $q_2 = +9$, $q_3 = +11$, $q_4 = -1$, $q_5 = -1$, $q_6 = 0$
$\alpha = -2$ „ $q_1 = +18$, $q_2 = -27$, $q_3 = +7$, $q_4 = +3$, $q_5 = -1$, $q_6 = 0$
$\alpha = +3$ „ $q_1 = -12$, $q_2 = +8$, $q_3 = +7$, $q_4 = -2$, $q_5 = -1$, $q_6 = 0$
$\alpha = -3$ „ $q_1 = +12$, $q_2 = -16$, $q_3 = +1$, $q_4 = +4$, $q_5 = -1$, $q_6 = 0$.

Die Wurzeln der Gleichung sind also $+1$, $+2$, -2, $+3$, -3; daher ist:

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x+2)(x-3)(x+3) = 0.$$

13. Setzen wir hier zur Fortschaffung der Brüche $x = {}^1/_{12}y$, so erhält man aus der gegebenen Gleichung folgende:

$$y^3 - 13y^2 + 54y - 72 = 0.$$

Die Gleichung hat drei Zeichenwechsel, sie hat daher 3 positive Wurzeln. Die Theiler von 72 sind 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36. Setzt man, um für die Theiler eine engere Grenze zu erhalten, $y = z + 1$, so wird:

$$1 - 13 + 54 - 72 = 30.$$

Die Theiler von 30 sind 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15; vermehrt man jeden derselben um 1, so entstehen die Theiler 2, 3, 4, 6, 7, 11, 16, wovon nur die vier ersten brauchbar sind, da sie zugleich Theiler von 72 sind. Wir brauchen daher blos mit $+2$, $+3$, $+4$, $+6$ den Versuch zu machen. Für

Digitized by Google

$\alpha = 2$ wird $q_1 = -36$, $q_2 = 9$, $q_3 = -2$, $q_4 > 0$
$\alpha = 3$ „ $q_1 = -24$, $q_2 = 10$, $q_3 = -1$, $q_4 = 0$
$\alpha = 4$ „ $q_1 = -18$, $q_2 = 9$, $q_3 = -1$, $q_4 = 0$
$\alpha = 6$ „ $q_1 = -12$, $q_2 = 7$, $q_3 = -1$, $q_4 = 0$.

Die Wurzeln der Gleichung in y sind also $+3, +4, +6$; daher ist:

$$f(y) = (y-3)(y-4)(y-6) = 0$$

und weil $^1/_{12}y = x$, so hat die gegebene Gleichung folgende 3 positive Wurzeln:

$^3/_{12}$, $^4/_{12}$, $^6/_{12}$ oder $^1/_4$, $^1/_3$, $^1/_2$, so daß also:

$$f(x) = (x-{}^1/_2)(x-{}^1/_3)(x-{}^1/_4) = 0.$$

14. Hier kommen nur Zeichenwechsel vor, daher diese Gleichung 3 positive Wurzeln hat. Um die Brüche fortzuschaffen, setze man $x = {}^1/_{12}y$ und man erhält:

$$y^3 - 23y^2 + 174y - 432 = 0.$$

Es ist leicht ersichtlich, daß 1 nicht Wurzel dieser Gleichung sein kann. Die Theiler von 432 sind: 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 27, 36, 48, 54, 72, 108, 144, 216. Da die Anzahl derselben sehr groß ist, so setze man, um dieselbe in engere Grenzen einzuschließen, $y = z+3$ und man erhält:

$$3^3 - 23 \cdot 3^2 + 174 \cdot 3 - 432 = -90.$$

Die Theiler von 90 sind 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45 und wenn sie um 3 vermehrt werden 5, 6, 8, 9, 12, 13, 18, 21, 33, 48, woraus folgt, daß die Wurzeln der Gleichung in y nur unter den Theilern 6, 8, 9, 12, 18, 48 zu suchen sind.

Für $\alpha = 6$ wird $q_1 = -72$, $q_2 = 17$, $q_3 = -1$, $q_4 = 0$
„ $\alpha = 8$ „ $q_1 = -54$, $q_2 = 15$, $q_3 = -1$, $q_4 = 0$
„ $\alpha = 9$ „ $q_1 = -48$, $q_2 = 14$, $q_3 = -1$, $q_4 = 0$.

Für $\alpha = 12, 18, 48$ erhalten wir für q keine ganzen Zahlen; folglich sind die Wurzeln der Gleichung in $y = 6, 8, 9$, so daß also:

$$f(y) = (y-6)(y-8)(y-9) = 0 \text{ ist.}$$

Da nun $x = {}^1/_{12}y$, so sind die Wurzeln der gegebenen Gl. $^6/_{12}$, $^8/_{12}$, $^9/_{12}$ oder $^1/_2$, $^2/_3$, $^3/_4$. Es ist also:

$$f(x) = (x-{}^1/_2)(x-{}^2/_3)(x-{}^3/_4) = 0.$$

15. Diese Gleichung hat 2 Zeichenfolgen und einen Zeichenwechsel, also 2 negative und eine positive Wurzel. Zur Fortschaffung der Brüche setze $x = {}^1/_{45}y$, so wird:

$$y^3 + 29y^2 - 1290y - 37800 = 0.$$

Die Theiler des absoluten Gliedes sind: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 18, 20, 21, 24, 25, 27, 28, 30, 35, 36, 40, 42, 45, 50, 54, 56 u. s. w. u. s. w.

Digitized by Google

Formt man die Gl. in y um, so hat man:

$$y(y^2-1290)+29(y^2-{}^{37800}/_{29})=0.$$

Setzt man hierin $y=\pm 37$, so wird das Resultat ein positives, daher $y<\pm 37$. Setzt man $y=\pm 29$, so entsteht ein negatives Resultat. Da also $y<\pm 37$ und $y>\pm 29$ ist, so liegen die Wurzeln zwischen ± 29 und ± 37; daher sind unter den Theilern des Absolutgliedes blos ± 30, ± 35 und ± 36 zu versuchen.

Für $\alpha=+30$ wird $q_1=-1260$, $q_2=-85$, q_3 gibt keine g. Zahl
„ $\alpha=-30$ „ $q_1=+1260$, $q_2=+1$, $q_3=-1$, $q_4=0$
„ $\alpha=+35$ „ $q_1=-1080$, q_2 gibt keine g. Zahl
„ $\alpha=-35$ „ $q_1=+1080$, $q_2=+6$, $q_3=-1$, $q_4=0$
„ $\alpha=+36$ „ $q_1=-1050$, $q_2=-65$, $q_3=-1$, $q_4=0$
„ $\alpha=-36$ „ $q_1=+1050$, q_2 gibt keine g. Zahl.

Mithin sind -30, -35 und $+36$ die Wurzeln der Gl. in y; es ist also:

$$f(y)=(y+30)(y+35)(y-36)=0.$$

Da nun $x={}^1/_{45}y$, so sind die Wurzeln der gegebenen Gleichung:

$-{}^{30}/_{45}$, $-{}^{35}/_{45}$, ${}^{36}/_{45}$ oder $-{}^2/_3$, $-{}^7/_9$, ${}^4/_5$; daher ist:

$$f(x)=(x+{}^2/_3)(x+{}^7/_9)(x-{}^4/_5)=0.$$

16. Diese Gl. hat zwei Zeichenfolgen und einen Zeichenwechsel, daher zwei negative und eine positive Wurzel. Setze $x={}^1/_6(y+1)$, so wird:

$$y^3+16y^2+35y-52=0.$$

Es ist sofort ersichtlich, daß durch die Substitution von $y=+1$ diese Gleichung annullirt wird. Hiermit ist die positive Wurzel der Gl. gefunden. Die Theiler von 52 sind: 2, 4, 13, 26, 52. Da die Gl. nur eine positive Wurzel hat, so brauchen wir blos den Versuch zur Entdeckung der beiden negativen Wurzeln mit -2, -4, -13, -26, -52 zu machen.

Für $\alpha=-2$ wird $q_1=+26$, q_2 gibt keine g. Zahl
„ $\alpha=-4$ „ $q_1=+13$, $q_2=-12$, $q_3=-1$, $q_4=0$
„ $\alpha=-13$ „ $q_1=+4$, $q_2=-3$, $q_3=-1$, $q_4=0$.

Daher sind die Wurzeln der Gl. in $y=+1$, -4, -13; folglich hat die gegebene Gl. die Wurzeln:

${}^1/_6(1+1)$, ${}^1/_6(-4+1)$, ${}^1/_6(-13+1)$ oder $+{}^1/_3$, $-{}^1/_2$, -2.

Es ist also:

$$f(x)=(x+{}^1/_2)(x-{}^1/_3)(x+2)=0.$$

17. Ersetzt man die fehlenden Glieder dieser Gl., so wird:

$$f(x)=x^6\pm 0x^5-14x^4\pm 0x^3+49x^2\pm 0x-36=0.$$

Hieraus geht hervor, daß diese Gl. drei Zeichenwechsel und

Digitized by Google

ebenso drei Zeichenfolgen hat; mithin sind drei Wurzeln positiv und drei negativ. Um die obere Grenze der Wurzeln zu bestimmen, gebe man der Gl. folgende Form:

$$x^4(x^2-14)+49(x^2-{}^{36}/_{49})=0.$$

Für $x=\pm 5$ gesetzt, entsteht ein positives Resultat; folglich liegen die Wurzeln zwischen 0 und 5 und wir haben daher von den Theilern des absoluten Gliedes blos mit ± 1, ± 2, ± 3, ± 4 den Versuch machen.

Für $\alpha=+1$ wird $q_1=-36$, $q_2=-36$, $q_3=+13$, $q_4=13$,
„ $\alpha=-1$ „ $q_1=+36$, $q_2=-36$, $q_3=-13$, $q_4=13$,
„ $\alpha=+2$ „ $q_1=-18$, $q_2=-9$, $q_3=+20$, $q_4=10$,
„ $\alpha=-2$ „ $q_1=+18$, $q_2=-9$, $q_3=-20$, $q_4=10$,
„ $\alpha=+3$ „ $q_1=-12$, $q_2=-4$, $q_3=+15$, $q_4=5$,
„ $\alpha=-3$ „ $q_1=+12$, $q_2=-4$, $q_3=-15$, $q_4=5$,

$q_5=-1$, $q_6=-1$, $q_7=0$
$q_5=+1$, $q_6=-1$, $q_7=0$
$q_5=-2$, $q_6=-1$, $q_7=0$
$q_5=+2$, $q_6=-1$, $q_7=0$
$q_5=-3$, $q_6=-1$, $q_7=0$
$q_5=+3$, $q_6=-1$, $q_7=0$.

Für $\alpha=\pm 4$ wird q keine ganze Zahl; folglich sind die 6 Wurzeln der Gleichung: ± 1, ± 2, ± 3 und es ist daher:

$$f(x)=(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)(x+3)(x-3)=0$$
$$=(x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)=0.$$

18. Diese Gleichung hat nur Zeichenwechsel, weshalb alle 6 Wurzeln positiv sind. Da es eine reciproke Gleichung ist, so dividiren wir dieselbe durch x^3 und es wird:

$$\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+14\left(x+\frac{1}{x}\right)-18=0.$$

Setze $x+\frac{1}{x}=y$, so wird $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$ und $x^3+\frac{1}{x^3}=y^3-3y$; es ist daher:

$$y^3-3y-6(y^2-2)+14y-18=0 \text{ oder:}$$
$$y^3-6y^2+11y-6=0.$$

Diese Gleichung hat nach Nr. 1 dieses §. die positiven Wurzeln 1, 2, 3: mithin:

(1) $x+\frac{1}{x}=1$; folglich x_1 und $x_2={}^1/_2(1\pm\sqrt{-3})$

(2) $x+\frac{1}{x}=2$; „ x_3 und $x_4={}^1/_2(2\pm 0)$

(3) $x+\frac{1}{x}=3$; „ x_5 und $x_6={}^1/_2(3\pm\sqrt{5})$.

Digitized by Google

Oder: Es ist leicht ersichtlich, daß durch Substitution von $x = 1$ das Resultat der gegebenen Gleichung $= 0$ wird, weshalb $+1$ eine Wurzel der Gl. ist. Dividirt man daher dieselbe durch $x - 1$, so erhalten wir:

$$x^5 - 5x^4 + 9x^3 - 9x^2 + 5x - 1 = 0.$$

Dieses ist eine reciproke Gleichung von einem ungeraden Grade, worin die gleichnamigen Coefficienten gleiche Vorzeichen haben, weshalb sie nach §. 183 durch $x - 1$ theilbar ist. Nehmen wir diese Division vor, so entsteht die reciproke Gleichung:

$$x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0.$$

Hieraus erhalten wir:

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) + 5 = 0.$$

Setzt man $x + \frac{1}{x} = y$, so wird $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$; daher ist:

$y^2 - 4y + 3 = 0$ oder $(y-1)(y-3) = 0$; mithin:

$y_1 = 1$ und $y_2 = 3$; daher ist:

(1) $x + \frac{1}{x} = 3$; folglich x_3 und $x_4 = {}^1/_2(3 \pm \sqrt{5})$

(2) $x + \frac{1}{x} = 1$; „ x_5 und $x_6 = {}^1/_2(1 \pm \sqrt{-3})$.

Mithin ist:

$$f(x) = (x-1)^2(x - {}^1/_2(3+\sqrt{5}))(x - {}^1/_2(3-\sqrt{5})) \times (x - {}^1/_2(1+\sqrt{-3}))(x - {}^1/_2(1-\sqrt{-3})) = 0.$$

19. Diese Gleichung hat zwei Zeichenwechsel und zwei Zeichenfolgen, also zwei positive und zwei negative Wurzeln. Dividiren wir die Gl. durch 3, so entsteht die Gl.:

$$x^4 - {}^4/_3x^3 - {}^{14}/_3x^2 - {}^4/_3x + 1 = 0.$$

Substituiren wir für x in diese Gl. $+1$ und -1, so finden wir, daß im zweiten Falle das Resultat $= 0$ wird, also ist -1 eine Wurzel der Gl. Dividiren wir dieselbe durch $x+1$, so erhalten wir:

$$x^3 - {}^7/_3x^2 - {}^7/_3x + 1 = 0.$$

Formen wir diese Gl. um, so erhalten wir:

$(x^3+1) - {}^7/_3x(x+1) = 0$ oder:

$(x^2 - x + 1)(x+1) - {}^7/_3x(x+1) = 0$; daher:

$(x^2 - {}^{10}/_3x + 1)(x+1) = 0$; folglich:

$x + 1 = 0$; daher auch $x_2 = -1$. Ferner ist:

$x^2 - {}^{10}/_3x + 1 = 0$ oder $(x-3)(x - {}^1/_3) = 0$; daher:

$x_3 = 3$ und $x_4 = {}^1/_3$; demnach ist:

$$f(x) = (x+1)(x+1)(x-3)(x - {}^1/_3) = 0.$$

Digitized by Google

20. Ergänzen wir in dieser Gl. die fehlenden Potenzen, so erhalten wir:

$$x^5 \pm 0x^4 \pm 0x^3 \pm 0x^2 \pm 0x - 1 = 0.$$

Diese Gl. hat nur eine positive, aber vier negative Wurzeln. Theilen wir dieselbe durch $x-1$, so erhalten wir:

$$x^4+x^3+x^2+x+1 = 0 \text{ oder:}$$

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)+1=0.$$

Wenn wir hierin $x+\frac{1}{x}=y$ setzen, so wird:

$$y^2+y-1=0; \text{ folglich } y = {}^1/_2(-1 \pm \sqrt{5}).$$

Setzen wir diesen Werth für y ein und bestimmen x, so wird, da $x_1 = 1$ ist:

$$x_2 \text{ und } x_3 = {}^1/_4\{-1+\sqrt{5} \pm \sqrt{-10-2\sqrt{5}}\}$$

$$x_4 \text{ und } x_5 = {}^1/_4\{-1-\sqrt{5} \pm \sqrt{-10-2\sqrt{5}}\}$$

21. Diese Gleichung läßt sich in das Produkt zweier binomischer Faktoren zerlegen und dadurch entsteht die Gleichung:

$$(x^3-1)(x^3+1) = 0; \text{ hieraus:}$$

$$(1)\ x^3-1=0 \text{ und } (2)\ x^3+1=0.$$

Aus (1) und (2) folgt $x_1 = 1$, $x_2 = -1$. Die ferneren Wurzeln für x ergeben sich aus §. 486 Nr. 1.

Oder: Substituirt man sowohl $+1$ als auch -1 in die gegebene Gl., so wird das Resultat $= 0$; folglich ist die Gl. sowohl durch $x-1$ als auch durch $x+1$ theilbar. Dividirt man daher x^6-1 durch $(x-1)(x+1) = x^2-1$, so erhält man:

$$x^4+x^2+1 = 0; \text{ hieraus folgt:}$$

$x^2 = {}^1/_2(-1 \pm \sqrt{-3})$; demnach $x = \pm\sqrt{{}^1/_2(-1 \pm \sqrt{-3})}$.

Verwandelt man nach §. 339 diesen Ausdruck in die Summe zweier Quadratwurzeln, so hat man, da $m = -1$, also $m^2 = (-1)^2 = 1$, $\sqrt{n} = \sqrt{-3}$, also $n = -3$:

$$\pm\sqrt{{}^1/_2(-1 \pm \sqrt{-3})} = \pm\sqrt{{}^1/_2(-{}^1/_2+{}^1/_2\sqrt{1+3})} \pm$$

$$\sqrt{{}^1/_2(-{}^1/_2-{}^1/_2\sqrt{1+3})} = \pm\sqrt{{}^1/_2(-{}^1/_2+1)} \pm \sqrt{{}^1/_2(-{}^1/_2-1)}$$

$$= \pm\sqrt{{}^1/_4} \pm \sqrt{-{}^3/_4} = \pm\,{}^1/_2(1 \pm \sqrt{-3}).$$

Mithin ist: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, x_3 und $x_4 = {}^1/_2(1 \pm \sqrt{-3})$, x_5 und $x_6 = {}^1/_2(-1 \pm \sqrt{-3})$.

22. Eine Wurzel dieser Gleichung ist $= 1$. Die gegebene Gl. durch $x-1$ dividirt, gibt:

$$x^3+7x^2+18x+24 = 0.$$

Digitized by Google

Die Wurzeln dieser Gl. sind alle negativ, weil nur Zeichenfolgen darin vorkommen. Da -1 keine Wurzel dieser Gl. ist, so untersuchen wir, welche von den übrigen Theilern des absoluten Gliedes Wurzeln derselben sind.

Für $\alpha = -2$ wird $q_1 = -12$, $q_2 = -3$, $q_3 = -2$, $q_4 > 0$
„ $\alpha = -3$ „ $q_1 = -8$, q_2 keine g. Zahl
„ $\alpha = -4$ „ $q_1 = -6$, $q_2 = -3$, $q_3 = -1$, $q_4 = 0$
„ $\alpha = -6, -8, -12$ wird q keine ganze Zahl.

Hieraus folgt, daß die einzige reelle Wurzel der cubischen Gleichung $= -4$ ist. Dividiren wir daher die Gl. durch $x+4$, so wird:

$$x^2 + 3x + 6 = 0.$$

Aus dieser quadratischen Gl. folgt:

$$x_3 \text{ und } x_4 = \tfrac{1}{2}(-3 \pm \sqrt{-15}).$$

2. Auflösung der Gleichungen durch die Newton'sche Näherungs-Methode.

(Heis §. 100.)

§. 509. Die Wurzeln einer Gleichung sind entweder reell oder imaginär. Die reellen Wurzeln unterscheiden sich in rationale und irrationale. In dem Vorhergehenden haben wir die verschiedenen Wege kennen gelernt, auf denen die rationalen Wurzeln einer Gl. gefunden werden können. Indessen nicht so einfach ist das Verfahren, um die irrationalen Wurzeln aufzufinden. Dasselbe besteht in den sogenannten Näherungs-Methoden, wodurch wir solche Wurzeln, wenn auch nicht genau, doch immerhin so genau, als nur verlangt werden kann, bestimmen können.

Um nun eine numerische Gleichung, deren Wurzeln irrational sind, aufzulösen, müssen wir ihr immer die Form $N = 0$ geben und in dieselbe für die Unbekannte der Reihe nach 0, 1, 2, 3..., dann -1, -2, -3,... setzen. Dadurch erhalten wir im Allgemeinen Werthe für N, die nicht gleich 0 sind. Finden wir nun in der Reihe der so erhaltenen N zwei aufeinander folgende, die verschiedene Vorzeichen haben, also etwa die den Werthen a und $a+1$ von der Unbekannten entsprechenden N, so können wir nach §. 482 schließen, daß zwischen a und $a+1$ wenigstens eine Wurzel der Gleichung liegt. Wenn wir den Bruch vernachlässigen, so können wir also schon a oder $a+1$ als Wurzel der Gl. annehmen. Ehe wir aber die eigentliche Näherungs-Methode beginnen, ist es rathsam, noch die Zehntel wenigstens der Wurzel durch Versuche zu bestimmen. Wir setzen also in

Digitized by Google

die Gleichung die Werthe $a+{}^1/_{10}$, $a+{}^2/_{10}\ldots a+{}^9/_{10}$ ein und erhalten dann durch Berechnung der entsprechenden Werthe von N folgende zwei korrespondirende Reihen:

a,	a+0,1,	a+0,2,	a+0,3,	a+0,4,	a+0,5,	a+0,6,	a+0,7,
N_0,	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	N_7

a+0,8,	a+0,9,	a+1
N_8	N_9	N_{10}.

Da nun N_0 und N_{10} nach der Voraussetzung entgegengesetzte Vorzeichen haben (angenommen N_0 sei positiv, N_{10} negativ), so können z. B. N_0, N_1, $N_2\ldots$ bis etwa N_6 alle positiv, alle folgenden aber negativ sein; dann wissen wir, daß zwischen a+0,6 und a+0,7 eine Wurzel der Gleichung liegt. Ueberhaupt aber da die letzten Glieder der Reihe N_0 und N_{10} entgegengesetzte Zeichen haben, so müssen sich in der Reihe wenigstens ein Paar aufeinander folgende Glieder finden, die verschiedene Zeichen haben; dann liegt zwischen den entsprechenden Werthen von der Unbekannten wenigstens eine Wurzel der Gleichung. In derselben Weise könnte man die Wurzeln der Gleichung noch weiter verfolgen. Wir nehmen also an, daß man zwei sehr wenig von einander verschiedene Grenzen habe, zwischen denen wenigstens eine Wurzel der Gleichung liegt; wir können dann aber nur unter der Voraussetzung weiter rechnen, daß zwischen denselben nur eine Wurzel liegt, welches allerdings auch mittelst gewisser Sätze weiter untersucht werden kann.

Nehmen wir nun etwa die Gleichung vom dritten Grade $x^3+ax^2+bx+c=0$ und setzen n gleich einer der Grenzen, welche für eine Wurzel gefunden wurden, so daß also $x=n+h$ ist, wo h sehr klein, etwa $<0{,}1$ ist. Führen wir diesen Werth in die gegebene Gleichung ein, so wird:

$$\left.\begin{array}{ll} x^3 & =(n+h)^3 \;=n^3+3n^2h+3nh^2+h^3 \\ ax^2 & =a(n+h)^2=an^2+2anh+ah^2 \\ bx & =b(n+h) \;=bn+bh \\ c & = \qquad\quad c \end{array}\right\} =0.$$

Da h sehr klein ist, so ist h^2, h^3 um so kleiner und wir können daher für eine erste Annäherung die mit höhern Potenzen von h behafteten Glieder den andern gegenüber vernachlässigen, dann wird die vorhergehende Gleichung:

$$n^3+3n^2h+an^2+2anh+bn+bh+c=0.$$

Aus dieser Gleichung folgt:

$$h=-\frac{n^3+an^2+bn+c}{3n^2+2an+b}.$$

Addirt man diesen Werth von h zu n, so erhält man einen genauern Werth für x, den man wieder als Näherungs-

Digitized by Google

werth der Wurzel ansehen und n gleichsetzen kann, worauf man dann wieder eine neue Correktion h findet u. s. w. Der Zähler von h ist = N für x = n; der Nenner ist die Ableitung von N, die erhalten wird, wenn man in N jedes Glied mit dem Exponenten von x multiplicirt und die Exponenten jeden Gliedes selbst um 1 vermindert, auch für x = n. Den Bruch für h wollen wir $= -\frac{N}{N_1}$ setzen. Folglich ist:

$$x = n - \frac{N}{N_1} = \frac{2n^3 + an^2 - c}{3n^2 + 2an + b}.$$

2. α) Setzt man hier $x = n + h$ und läßt gleich bei der Entwickelung die Potenzen h^2, h^3.. unberücksichtigt, so hat man:

$$n^4 + 4n^3h + an^3 + 3an^2h + bn^2 + 2bnh + cn + ch + d = 0.$$

Folglich: $h = -\frac{n^4 + an^3 + bn^2 + cn + d}{4n^3 + 3an^2 + 2bn + c} = -\frac{N}{N_1}$; daher:

$$x = n - \frac{N}{N_1} = \frac{3n^4 + 2an^3 + bn^2 - d}{4n^3 + 3an^2 + 2bn + c}.$$

β) Setzt man in die Gleichung vom fünften Grade $x = n + h$ und vernachlässigt die höhern Potenzen von h^2 an, so wird:

$$n^5 + 5n^4h + an^4 + 4an^3h + bn^3 + 3bn^2h + cn^2 + 2cnh + dn + dh + e = 0.$$

Hieraus ergibt sich:

$$h = -\frac{n^5 + an^4 + bn^3 + cn^2 + dn + e}{5n^4 + 4an^3 + 3bn^2 + 2cn + d} = -\frac{N}{N_1}; \text{ daher:}$$

$$x = n - \frac{N}{N_1} = \frac{4n^5 + 3an^4 + 2bn^3 + cn^2 - e}{5n^4 + 4an^3 + 3bn^2 + 2cn + d}.$$

3. Es sei in der allgemeinen Gleichung: $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} \ldots + p = 0$, der Näherungswerth für $x = n + h$, wo h so klein sein soll, daß die Entwickelung nur bis zu dem Gliede, welches mit der ersten Potenz von h behaftet ist, auszuführen nöthig ist, so ergibt sich:

$$n^m + mn^{m-1}h \ldots + an^{m-1} + (m-1)an^{m-2}h + \ldots + bn^{m-2} + (m-2)bn^{m-3}h + \ldots + cn^{m-3} + (m-3)cn^{m-4}h + \ldots + kn + kh + p = 0.$$

Folglich:

$$h = -\frac{n^m + an^{m-1} + bn^{m-2} + cn^{m-3} + \ldots + kn + p}{mn^{m-1} + (m-1)an^{m-2} + (m-2)bn^{m-3} + (m-3)cn^{m-4} + \ldots + k} = -\frac{N}{N_1}.$$

Mithin:

$$x = n - \frac{N}{N_1} = \frac{(m-1)n^m + (m-2)an^{m-1} + (m-3)bn^{m-2} + (m-4)cn^{m-3} + \ldots - p}{mn^{m-1} + (m-1)an^{m-2} + (m-2)bn^{m-3} + (m-3)cn^{m-4} + \ldots k}.$$

Digitized by Google

Substituirt man in dieser allgemeinen Formel $m = 3, 4, 5$, so ergeben sich die vorhergehenden Formeln in Nr. 1 und 2.

4. Wenden wir jetzt das vorhin Gesagte auf die folgenden Gleichungen an.

Setzt man hier:

$$x = 0, \text{ so wird } N = -5$$
$$x = 1, \text{ „ „ } N = -1$$
$$x = 2, \text{ „ „ } N = +9.$$

Daraus folgt, daß eine Wurzel der Gl. zwischen 1 und 2 liegt, aber näher bei 1 als bei 2. Setzen wir daher $x = 1{,}1$ und $x = 1{,}2$, so wird in jenem Falle $N = -0{,}039$ und in diesem Falle $N = +0{,}048$. Daraus folgt, daß die Wurzel zwischen 1,1 und 1,2 liegt. Daher nehmen wir $n = 1{,}1$ und suchen die Correktion h. Nun ist:

$$h = -\frac{1{,}1^3 + 3.1{,}1 - 5}{3.1{,}1^2 + 3} = \frac{0{,}369}{6{,}63} = 0{,}055.$$

Wir haben also schon einen genauern Werth der Wurzel, nämlich $1{,}1 + 0{,}055 = 1{,}155$. Setzen wir diesen Werth für x in die Gl., so wird:

$$N = 1{,}155^3 + 3 \,.\, 1{,}155 - 5 = +0{,}0057988;$$

also sehr klein, so daß der Werth $x = 1{,}155$ schon ziemlich genau ist. Da dieser Werth von N positiv ist, so wissen wir schon, daß der wahre Werth etwas kleiner ist, als 1,155, so daß die folgende Correktion negativ sein muß, was sich auch ergeben wird. Es ist nämlich:

$$N_1 = 3 \,.\, 1{,}115^2 + 3 = 7{,}002075; \text{ daher:}$$
$$h_1 = -\frac{0{,}0057988}{7{,}002075} = -0{,}000828.$$

Der noch genauere Wurzelwerth ist mithin $1{,}155 - 0{,}000828 = 1{,}154172$. Um nun zu sehen, wie genau dieser Werth ist, um nöthigenfalls eine neue Correction eintreten zu lassen, müssen wir N für $x = 1{,}154172$ berechnen. Nun ist:

$$N = 1{,}154172^3 + 3.1{,}154172 - 5 = 0{,}00000353.$$

Der Werth von N ist also schon in den 5 ersten Decimalstellen nicht mehr von Null verschieden. Suchen wir daher eine neue Correktion, so wird, weil:

$$N_1 = 3 \,.\, 1{,}154172^2 + 3 = 6{,}99633902;$$
$$h_2 = -\frac{0{,}00000353}{6{,}99633902} = -0{,}000000504; \text{ hiernach ist also:}$$
$$x = 1{,}154172 - 0{,}000000504 = 1{,}154171496.$$

Zur Verificirung dieses Werthes von x berechnen wir denselben nach der Cardanischen Formel 2 in §. 489, so erhalten wir, da $p = 3$, $q = 5$ ist:

Digitized by Google

$$x = \sqrt[3]{2{,}5+\sqrt{{}^{25}/_{4}+1}} + \sqrt[3]{2{,}5-\sqrt{{}^{25}/_{4}+1}} =$$

$$\sqrt[3]{2{,}5+{}^{1}/_{2}\sqrt{29}} + \sqrt[3]{2{,}5-{}^{1}/_{2}\sqrt{29}}$$

$$= \sqrt[3]{5{,}1925824035672} + \sqrt[3]{-0{,}1925824035672}$$

$$= 1{,}73165404 - 0{,}57748255 = 1{,}15417149.$$

Mithin ist der mittelst der Näherungs-Methode berechnete Wurzelwerth in den 8 ersten Decimalstellen ganz genau.

Dividirt man die gegebene Gl. durch $x-1{,}15417149$, so erhalten wir:

$$x^2 + 1{,}15417149x + 4{,}332110697 = 0;$$

daher sind die beiden andern Wurzelwerthe der Gleichung:

$$x_2 \text{ und } x_3 = -0{,}57708574 \pm 1{,}99977067\sqrt{-1}.$$

5. Setzt man in dieser Gleichung $x = 0$, so wird $N = +3$ und für $x = -1$ wird $N = -5$, woraus folgt, daß der reelle Wurzelwerth zwischen 0 und -1 liegt, also unter den Brüchen $-{}^{1}/_{10}$, $-{}^{2}/_{10}$, $-{}^{3}/_{10}$, $-{}^{4}/_{10}$, $-{}^{5}/_{10}$ u. s. w. zu suchen ist.

Für $x = -{}^{1}/_{10}$ wird $N = +2{,}299$
„ $x = -{}^{2}/_{10}$ „ $N = +1{,}592$
„ $x = -{}^{3}/_{10}$ „ $N = +0{,}873$
„ $x = -{}^{4}/_{10}$ „ $N = +0{,}136$
„ $x = -{}^{5}/_{10}$ „ $N = -0{,}625.$

Wir ersehen hieraus schon genauer, daß der Wurzelwerth zwischen $-{}^{4}/_{10}$ und $-{}^{5}/_{10}$ liegt. Setzen wir also $n = -0{,}4$, so wird:

$$h = -\frac{N}{N_1} = -\frac{0{,}4^3+7.(-0{,}4)+3}{3.(-0{,}4)^2+7} = -\frac{0{,}136}{7{,}48} = -0{,}018.$$

Daher: $n_1 = -0{,}4 - 0{,}018 = -0{,}418.$

Nun ist ferner:

$N = (-0{,}418)^3+7.(-0{,}418)+3 = +0{,}000965368$ und
$N_1 = 3.(-0{,}418)^2+7 = 7{,}524172$; mithin:

$$h_1 = -\frac{N}{N_1} = -\frac{0{,}000965368}{7{,}524172} = -0{,}0001283; \text{ folglich:}$$

$$x_1 = -0{,}418 - 0{,}0001283 = -0{,}4181283.$$

Setzen wir diesen Werth für x in die Gl., so wird:

$$-0{,}4181283^3+7.(-0{,}4181283)+3 = -3{,}00000003+3 = 0.$$

Demnach ist der Werth für x in den 7 Decimalstellen ganz genau, weshalb es daher keiner fernern Correktion mehr bedarf. Dividire die gegebene Gleichung durch $x+0{,}4181283$, so erhalten wir die quadratische Gl.:

Digitized by Google

$$x^2 - 0{,}4181283x + 7{,}1748313 = 0,$$

woraus x_2 und $x_3 = 0{,}2090642 \pm 2{,}6704163\sqrt{-1}$.

6. Es ist leicht ersichtlich, daß durch Substitution von positiven Werthen für x keine mit entgegengesetzten Zeichen behafteten Resultate entstehen können. Nun wird für $x = -1$ $N = +17$ und für $x = -2$ $N = +17$, für $x = -3$ $N = +5$, für $x = -4$ $N = -25$, woraus folgt, daß der reelle Wurzelwerth zwischen -3 und -4 liegt und zwar näher bei -3 als bei -4. Setzen wir daher, um einen genauern Werth zu erhalten, $n = -3{}^1/_{10}$, $-3{}^2/_{10}$, $-3{}^3/_{10}$ u. s. w. und bestimmen den Werth, der sich bei dieser Annahme für N ergibt. Für $n = -3{,}1$ wird $N = +2{,}909$ und für $n = -3{,}2$ wird $N = 0{,}632$ und für $n = -3{,}3$ wird $N = -1{,}837$. Mithin ist $n = -3{,}2$ eine genauere Wurzel; daher ist die Correktion:

$$h = -\frac{N}{N_1} = -\frac{0{,}632}{23{,}72} = -0{,}026; \text{ mithin:}$$

$$n_1 = -3{,}2 - 0{,}026 = -3{,}226.$$

Für diesen Werth von n wird:

$N = (-3{,}226)^3 + 7.3{,}226 + 11 = 0{,}008772824$

$N_1 = 3.(-3{,}226)^2 - 7 = 24{,}221228$; daher:

$$h_1 = -\frac{N}{N_1} = -\frac{0{,}008772824}{24{,}221228} = -0{,}000362; \text{ daher:}$$

$$n_2 = -3{,}226 - 0{,}000362 = -3{,}226362.$$

Für diesen Werth von n wird:

$N = 0{,}000003471172730072$ und $N_1 = 24{,}428235265132$;

$$\text{daher: } h_2 = -\frac{N}{N_1} = -0{,}000000142; \text{ mithin:}$$

$$x_1 = -3{,}226362 - 0{,}000000142 = -3{,}226362142.$$

Dividire die gegebene Gl. durch $x + 3{,}226362142$, so erhalten wir:

$x^2 - 3{,}226362142x + 3{,}409412671 = 0$; mithin:

x_2 und $x_3 = +1{,}613181071 \pm 0{,}898364905\sqrt{-1}$.

7. Für $x = 1$ wird $N = -8$, für $x = 2$ wird $N = -5$, für $x = 3$ wird $N = +10$; also liegt zwischen 2 und 3 eine reelle Wurzel der Gl. Setzt man nacheinander $x = 2{,}1$, 2,2, 2,3, 2,4, 2,5, so hat für die vier ersten Annahmen N einen negativen Werth und für letztere einen positiven. Für $x = 2{,}4$ wird nämlich $N = -0{,}776$ und für $x = 2{,}5$ wird $N = +0{,}625$. Ein genauerer Werth als 2 ist also 2,4. Bei dieser Annahme wird $N_1 = 13{,}28$; also:

Digitized by Google

$h = -\frac{N}{N_1} = +\frac{0{,}776}{13{,}28} = +0{,}05$; daher $n = 2{,}4 + 0{,}05 = 2{,}45$.

Für dieſen Werth von n wird:

$N = -0{,}093875$ und $N_1 = +14{,}0075$; daher:

$h_1 = -\frac{N}{N_1} = +0{,}0067$; alſo $n_1 = 2{,}45 + 0{,}0067 = 2{,}4567$.

Für dieſen Werth von n wird:

$N = +0{,}000305492263$ und $N_1 = 14{,}10612467$; daher:

$$h_2 = -\frac{N}{N_1} = -0{,}0000217;$$ folglich:

$$x_1 = 2{,}4567 - 0{,}0000217 = 2{,}4566783.$$

Dividire die Gl. durch $x - 2{,}4566783$, ſo erhalten wir die Gl.:

$$x^2 + 2{,}4566783x + 2{,}0352683 = 0,$$

woraus x_2 und $x_3 = -1{,}2283392 \pm 0{,}7255697\sqrt{-1}$.

8. Setzt man $x = 1$, ſo wird $N = 0$; folglich iſt $x_1 = 1$.

Setzt man nun nacheinander $x = 1^1/_{10}$, $1^2/_{10}$, $1^3/_{10}$, $1^4/_{10}$, $1^5/_{10}$, $1^6/_{10}$ u. ſ. w., ſo wird für $x = 1{,}5$ $N = -0{,}125$ und für $x = 1{,}6$ $N = +0{,}96$. Daraus folgt, daß eine zweite Wurzel zwiſchen 1,5 und 1,6 liegt. Für $n = 1{,}5$ wird $N = -0{,}125$ und $N_1 = 1{,}75$; daher:

$h = -\frac{N}{N_1} = -\frac{-0{,}125}{1{,}75} = 0{,}07$; alſo $n_1 = 1{,}5 + 0{,}07 = 1{,}57$;

daher $N = 0{,}019893$ und $N_1 = 2{,}3947$; mithin:

$h_1 = -\frac{N}{N_1} = -0{,}008$; daher $n_2 = 1{,}57 - 0{,}008 = 1{,}561$.

Für dieſen Werth von n wird:

$N = -0{,}001278519$ und $N_1 = 2{,}310163$; mithin:

$h_2 = -\frac{N}{N_1} = +0{,}00055$; daher $n_3 = 1{,}561 + 0{,}00055 = 1{,}56155$.

Für dieſen Werth von n wird:

$N = -0{,}000006512576125$ und $N_1 = 2{,}3153152075$; daher:

$$h_3 = -\frac{N}{N_1} = +0{,}000002813;$$ folglich:

$$x_2 = 1{,}56155 + 0{,}000002813 = 1{,}561552813.$$

Ergänzen wir in der gegebenen Gl. das fehlende Glied, ſo wird $x^3 \pm 0x^2 - 5x + 4 = 0$. Mag nun das obere oder untere Zeichen gelten, ſo hat die Gl. in jedem Falle eine Zeichenfolge und zwei Zeichenwechſel, daher eine negative

Digitized by Google

und zwei positive Wurzeln. Nun sind die positiven Wurzeln in den Werthen von x_1 und x_2 gefunden, daher muß x_3 negativ sein. Weil nun der Coefficient von x^2 Null ist und derselbe aus der algebraischen Summe der Wurzeln besteht, so muß die dritte Wurzel also:

$$x_3 = -(x_1 + x_2) = -2{,}561552813 \text{ sein.}$$

9. Diese Gl. kann nur negative Wurzeln haben, weil sie nur Zeichenfolgen hat. Nun wird für $x = -1$ $N = +2$ und für $x = -2$ wird $N = -2$; die Wurzel liegt also zwischen -1 und -2. Für $x = -1{,}5$ wird $N = +0{,}625$; für $x = -1{,}6$ wird $N = +0{,}224$; für $x = -1{,}7$ wird $N = -0{,}233$. Wir wissen also, daß die Wurzel zwischen $-1{,}6$ und $-1{,}7$ liegt. Für $n = -1{,}6$ wird $N_1 = -4{,}28$; daher:

$$h = -\frac{N}{N_1} = -\frac{0{,}224}{4{,}28} = -0{,}05; \text{ also } n_1 = -1{,}6 - 0{,}05 = -1{,}65.$$

Setzen wir diesen Werth in die gegebene Gleichung, so wird $N = +0{,}002875$ und $N_1 = 4{,}5675$; daher:

$$h_1 = -\frac{N}{N_1} = -0{,}000629; \text{ also } n_2 = -1{,}65 - 0{,}000629 = -1{,}650629.$$

Für diesen Werth von n wird:

$$N = +0{,}00000875110191811 \text{ und } N_1 = +4{,}571222286923;$$

daher: $h_2 = -\frac{N}{N_1} = -0{,}000000191$; mithin ist:

$$x_1 = -1{,}650629 - 0{,}000000191 = -1{,}650629191.$$

Die beiden andern Werthe nämlich:

$$x_2 \text{ und } x_3 = -0{,}174685404 \pm 1{,}5468688\sqrt{-1}$$

ergeben sich aus der quadratischen Gleichung:

$$x_2 + 0{,}349370809x + 2{,}423318344 = 0.$$

10. Für $x = 0$ wird $N = +5$ und für $x = 1$ wird $N = -3$; folglich liegt zwischen 0 und 1 eine Wurzel der Gleichung. Versucht man die verschiedenen Zehntel, so findet man, daß $N = +0{,}2841$ für $x = 0{,}7$ und $N = -0{,}7344$ für $x = 0{,}8$; mithin liegt die erste Wurzel der Gl. zwischen 0,7 und 0,8.

Für $x = 0{,}7$ wird $N = 0{,}2841$ und $N_1 = -9{,}768$; also:

$$h = -\frac{N}{N_1} = +0{,}029; \text{ daher } n = 0{,}7 + 0{,}029 = 0{,}729.$$

Für diesen Werth von n wird:

$$N = -0{,}002734441519 \text{ und } N_1 = -10{,}012964044; \text{ also:}$$

Digitized by Google

$h_1 = -\frac{N}{N_1} = -0{,}000273$; daraus folgt, daß:

$x_1 = 0{,}729 - 0{,}000273 = 0{,}728727.$

Nun liegt ferner eine Wurzel der Gl. zwischen 3 und 4. Denn für $x = 3$ wird $N = -6$ und für $x = 4$ wird $N = +69$. Setzen wir $x = 3{,}1$, so wird $N = -3{,}4599$ und $x = 3{,}2$, so wird $N = +0{,}8016$; wir wissen also jetzt genauer, daß sie zwischen 3,1 und 3,2 liegt. Setzen wir also $n = 3{,}1$, so wird $N = -3{,}4599$ und $N_1 = 38{,}74$; also $h = -\frac{N}{N_1} = +0{,}08$; folglich $n_1 = 3{,}1 + 0{,}08 = 3{,}18$. Für diesen Werth von n_1 wird:

$N = -0{,}11143024$ und $N_1 = 44{,}875328$; folglich:

$h_1 = -\frac{N}{N_1} = +0{,}0024$; mithin $n_2 = 3{,}18 + 0{,}0024 = 3{,}1824$.

Für diesen Werth von n wird:

$N = -0{,}0035070008297424$; $N_1 = 45{,}060766414896$; daher:

$h_2 = -\frac{N}{N_1} = +0{,}0000777$; folglich:

$x_2 = 3{,}1824 + 0{,}0000777 = 3{,}1824777.$

Dividiren wir die gegebene Gl. durch:

$(x - 0{,}728727)(x - 3{,}1824777)$,

so erhalten wir: $x^2 + 1{,}911196x + 2{,}15595035 = 0$, woraus:

x_3 und $x_4 = -0{,}955598 \pm 1{,}114803\sqrt{-1}$.

11. Setzt man zur Abkürzung das Absolutglied $= k$, so wird:

$$x = \frac{k}{16x^4 - 20x^2 + 5}.$$

Da x sehr klein ist, so können in diesem Quotienten die Potenzen x^4 und x^2 als Null angenommen werden; für diesen Fall wird:

$x = {}^1/_5 k.$

Substituirt man diesen Werth für x in die gegebene Gl., so erhält man mit Vernachlässigung des ersten Gliedes x^5 annähernd:

$5x - 20({}^1/_5 k)^3 = k$; mithin:

$x = {}^1/_5 k + 4({}^1/_5 k)^3.$

Nun ist:

${}^1/_5 k = 0{,}0156918191$ und $4({}^1/_5 k)^3 = 0{,}000015456$.

Mithin hat man als ersten Näherungswerth $x = 0{,}015707275$, ein Werth, der bis zur siebenten Decimale ganz genau ist. Um einen noch genaueren Werth zu erhalten, setze man $x = 0{,}0157073 + h$. Substituirt man diesen Werth für x

Digitized by Google

in die gegebene Gl. und läßt die Potenzen von h^2 an unberücksichtigt, so wird:

$$0{,}078459009424927 + 4{,}9852017h = 0{,}078459095727845;$$

folglich $h = 0{,}0000000173118207$; daher:

$$x = 0{,}0157073173118207.$$

12. Für $x = 0$ wird $N = +5000$

$x = 1$ „ $N = -8018$.

Also liegt eine Wurzel zwischen 0 und 1. Ferner liegt zwischen 12 und 13 ebenfalls eine Wurzel der Gl., weil für $x = 12$ $N = -4036$ und für $x = 13$ $N = +1282$ wird. Sucht man nun nach §. 409 vermittelst der regula falsi die Wurzel genauer zu bestimmen, so hat man, da

$$\alpha' = 12,\ \varphi' = -4036$$
$$\alpha'' = 13,\ \varphi'' = +1282$$

$$n = \frac{\varphi'\alpha'' - \varphi''\alpha'}{\varphi' - \varphi''} = \frac{-4036.13 - 1282.12}{-4036 - 1282} = \frac{67852}{5318} = 12{,}75.$$

Für diesen Werth von n wird:

$N = -34{,}05859375$ und $N_1 = 5287{,}6875$; daher:

$$h = -\frac{N}{N_1} = +0{,}0064;\ \text{also}\ n_1 = 12{,}7564.$$

Substituiren wir diesen Werth in die Gl., so wird:

$N = -0{,}22094934$ und $N_1 = 5286{,}57513752$; daher:

$$h = -\frac{N}{N_1} = +0{,}000041;\ \text{also:}$$

$$x_1 = 12{,}7564 + 0{,}000041 = 12{,}756441\ldots.$$

13. Für $x = 0$ wird $N = 263$
$x = 1$ „ $N = 128$
$x = 2$ „ $N = 29$
$x = 3$ „ $N = 2$
$x = 4$ „ $N = 83$

} Hieraus ist ersichtlich, daß die gegebene Gl. zwei reelle Wurzeln zwischen 2 und 3 habe, wenn N aus dem Positiven ins Negative und aus dem Negativen ins Positive geht, während x von 2 auf 3 steigt. Setzt man daher $x = 3 - h$, so wird:

$$N = 6(3-h)^3 - 141(3-h) + 263$$
$$(1)\quad = 2 - 6h^3 + 54h^2 - 21h.$$

Setzt man mit Vernachlässigung von $6h^3$ näherungsweise:

$$(2)\quad 54h^2 - 21h + 2 = 0,$$

so sind die positiven Wurzeln dieser Gl. $^2/_9 = 0{,}22$ und $^1/_6 = 0{,}17$. Hiernach hat x den Werth von 2,78 und 2,83. Um noch genauere Wurzeln der gegebenen Gl. zu erhalten, setze man a) $h_1 = 0{,}22 + h_2$ und b) $h_1 = 0{,}17 + h_2$.

Setzen wir den ersten Werth unter a) in Gl. (1), so finden wir:

Digitized by Google

$$N = 2 - 6(0{,}22+h_2)^3 + 54(0{,}22+h_2)^2 - 21(0{,}22+h_2)$$
$$(3) \quad = -0{,}070288 - 6h_2^3 + 50{,}04h_2^2 + 1{,}8888h_2.$$

Nun setze man;

$$(4) \quad 50{,}04h_2^2 + 1{,}8888h_2 - 0{,}070288 = 0.$$

Die positive Wurzel dieser Gl. ist $h_2 = 0{,}0231$, mithin ist der genauere Werth für $x = 2{,}78 - 0{,}0231 = 2{,}7569$. Setzen wir endlich $h_2 = 0{,}0231 + h_3$ in (3), so wird, wenn wir blos die erste Potenz von h_2 berücksichtigen;

$$(5) \quad N = 0{,}000071 + 4{,}19h_3 = 0.$$

Hieraus folgt $h_3 = -0{,}000017$; folglich $x_1 = 2{,}756917$. Setzt man den zweiten unter b) für h_1 gefundenen Werth in (1), so wird:

$$(6) \quad N = -0{,}038878 - 6h_2^3 + 50{,}94h_2^2 - 3{,}1602h_2.$$

Nun ergibt sich aus der Gleichung:

$$(7) \quad 50{,}94h_2^2 - 3{,}1602h_2 - 0{,}038878 = 0,$$

daß $h_2 = -0{,}0105$.

Setzt man weiter $h_2 = -0{,}0105 + h_3$, so wird:

$$(8) \quad N = -0{,}000087 - 4{,}23h_3.$$

Damit nun $N = 0$ werde, muß $h_3 = -0{,}000020$ sein. Mithin ist:

$$x_2 = 3 - (h_1 - h_2 - h_3) = 2{,}840520.$$

Die dritte negative Wurzel der Gleichung ist:

$$x_3 = -(x_1 + x_2) = -5{,}597437.$$

14. Lösen wir diese Gl. vermittelst der regula falsi auf, so haben wir:

Für $x = 0$ wird $N = 1$
$x = 1 = (\alpha')$ „ $N = 0{,}22 = \varphi'$
$x = 2 = (\alpha'')$ „ $N = -0{,}19 = \varphi''$; mithin:

$$x = \frac{0{,}22 \,.\, 2 + 0{,}19 \,.\, 1}{0{,}22 + 0{,}19} = \frac{0{,}63}{0{,}41} = 1{,}5.$$

Für $\alpha' = 1{,}5$ und $\alpha'' = 1{,}6$ wird bezüglich:

$$\varphi' = 1 - 1{,}5 + 0{,}5625 - 0{,}09375 + 0{,}008789 = -0{,}022461$$
$$\varphi'' = 1 - 1{,}6 + 0{,}64 - 0{,}113778 + 0{,}011378 = -0{,}0624.$$

Daher $x = \dfrac{-0{,}022461 \,.\, 1{,}6 + 0{,}0624 \,.\, 1{,}5}{-0{,}022461 + 0{,}0624} = \dfrac{0{,}0576624}{0{,}039939} = 1{,}444.$

Setzen wir $\alpha' = 1{,}444$ und $\alpha'' = 1{,}445$, so wird:

$$\varphi' = 1 - 1{,}444 + 0{,}521284 - 0{,}8363712 + 0{,}00754825 = 0{,}00119513$$
$$\varphi'' = 1 - 1{,}445 + 0{,}522006 - 0{,}83811 + 0{,}007569 = 0{,}000764.$$

Also $x = \dfrac{0{,}00119513 \,.\, 1{,}445 - 0{,}000764 \,.\, 1{,}444}{0{,}00119513 - 0{,}000764}$

$$= \frac{0{,}000623746}{0{,}00043113} = 1{,}44674.$$

Digitized by Google

Für $\alpha' = 1{,}44674$ und $\alpha'' = 1{,}44675$ wird:

$$\varphi' = 1 - 1{,}44674 + 0{,}52326415 - 0{,}08411413 + 0{,}00760570 = 0{,}00001572$$

$$\varphi'' = 1 - 1{,}44675 + 0{,}52327139 - 0{,}08411587 + 0{,}00760591 = 0{,}00001143.$$

$$\text{Daher } x = \frac{0{,}00001572.1{,}44675 - 0{,}00001143.1{,}44674}{0{,}00001572 - 0{,}00001143} = \frac{0{,}0000227429100 - 0{,}0000165362382}{0{,}00000429} = 1{,}446776\ldots$$

3. Auflösung durch Kettenbrüche. Methode von Lagrange.

(Heis §. 101.)

§. 510. Wenn in der Gleichung:

(1) $Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \ldots + M = 0$

α ein Näherungswerth für x ist, doch so, daß $x > \alpha$ und $x < \alpha + 1$, so kann man $x = \alpha + \frac{1}{y}$ setzen, wo also, da $\frac{1}{y} < 1$, $y > 1$ sein muß. Substituirt man diesen Werth für x in obige Gl., so erhält man folgende Gl. in y, nämlich:

(2) $A'y^n + B'y^{n-1} + Cy^{n-2} + \ldots + M' = 0.$

Weil nun $y > 1$ sein muß, so hat die Gl. (2) nothwendig wenigstens eine reelle Wurzel, die größer als 1 ist. Dieselbe sei β, und zwar $y > \beta$ und $y < \beta + 1$. Daher kann man ferner $y = \beta + \frac{1}{z}$ setzen. Substituirt man den Werth für y in (2), so erhält man eine Gl. in z von folgender Form:

(3) $A''z^n + B''z^{n-1} + C''z^{n-2} + \ldots M'' = 0.$

Diese Gleichung hat wieder wenigstens eine reelle Wurzel. Ist nun $z > \gamma$, aber $z < \gamma + 1$, so setze man ferner $z = \gamma + \frac{1}{u}$, wodurch eine Gl. in u von der Form der bisher in z und y erhaltenen entsteht, und man kann, wenn $u > \delta$ aber $u < \delta + 1$ ist, $u = \delta + \frac{1}{v}$ setzen und auf diese Weise die Operation bis zu einer gewissen Grenze fortsetzen. Sind nun die Werthe $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \ldots$ die ganzzahligen Näherungswerthe der Gleichungen in x, y, z, u, v ... und zwar derart, daß:

Digitized by Google

$x = \alpha + \frac{1}{y}$, $y = \beta + \frac{1}{z}$, $z = \gamma + \frac{1}{u}$, $u = \delta + \frac{1}{v}$, $v = \varepsilon + \frac{1}{\omega} \ldots$

so wird, wenn man diese Werthe nacheinander substituirt, der Werth für x durch folgenden Kettenbruch ausgedrückt werden:

$$x = \alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{\delta + \cfrac{1}{\varepsilon \ldots}}}}$$

Entwickelt man hieraus die Partialbrüche, so werden je zwei aufeinander folgende die Grenzen angeben, zwischen denen der wahre Werth der Wurzel liegt und diese Grenzen werden sich immer mehr einander nähern, je weiter dieselben vom ersten Näherungswerth entfernt liegen.

Um die Substitutionen von $\alpha + \frac{1}{y}$, $\beta + \frac{1}{z}$, $\gamma + \frac{1}{u}$ u. s. w. an Stelle bezüglich von x, y, z, ... zu erleichtern, bemerke man, daß die Coefficienten der transformirten Gleichung (2) sich unmittelbar aus den Coefficienten der Gl. (1) herleiten lassen und zwar ist auf Grund des binomischen Satzes:

$A' = A\alpha^n + B\alpha^{n-1} + C\alpha^{n-2} + \ldots$

$B' = \binom{n}{1} A\alpha^{n-1} + \binom{n-1}{1} B\alpha^{n-2} + \binom{n-2}{1} C\alpha^{n-3} + \ldots$

$C' = \binom{n}{2} A\alpha^{n-2} + \binom{n-1}{2} B\alpha^{n-3} + \binom{n-2}{2} C\alpha^{n-4} + \ldots$

$D' = \binom{n}{3} A\alpha^{n-3} + \binom{n-1}{3} B\alpha^{n-4} + \binom{n-2}{3} C\alpha^{n-5} + \ldots$

. . . . . .

. . . . . .

Auf dieselbe Weise werden die Coefficienten der Gl. (3) aus denen der Gl. (2) und überhaupt die Coefficienten jeder folgenden Gl. aus denen der unmittelbar vorhergehenden abgeleitet.

1. Suchen wir nun die Grenzen zu bestimmen, zwischen welchen der Werth von x in der hier gegebenen Gleichung liegt.

Für $x = 0$ wird $N = -5$
$x = 1$ „ $N = -1$
$x = 2$ „ $N = +9$

Also liegt der positive Wurzelwerth von x zwischen 1 und 2 und besteht also aus der ganzen Zahl 1 und einem Bruche. Nennen wir diesen

Digitized by Google

Bruch $\frac{1}{y}$, so daß also $x = 1 + \frac{1}{y}$ ist, wobei $y > 1$ und substituiren wir den Werth von x in die gegebene Gl., so erhalten wir, weil $A = 1$, $B = 0$, $C = +3$, $M = -5$, $n = 3$, $\alpha = 1$:

$$A' = 1.1 + 0.1 + 3.1 - 5 = -1$$
$$B' = 3.1 + 2.0 + 3.1 \ldots = +6$$
$$C' = 3.1 + 3.0 \ldots = +3$$
$$M' = A \ldots = +1.$$

Die transformirte Gl. heißt also: $-y^3 + 6y^2 + 3y + 1 = 0$
oder: $y^3 - 6y^2 - 3y - 1 = 0$.
Um den positiven Werth für y zu finden, setze man für y nacheinander 2, 3, 4, 5, 6, 7 und wir finden, daß für $y = 7$ der bisherige negative Werth für N in den positiven übergeht, so daß $y = 6 + \frac{1}{z}$ gesetzt werden kann. Nun ist

$A' = 1$, $B' = -6$, $C' = -3$, $M' = -1$, $\alpha = 6$;
daher ist:

$$A'' = 6^3 - 6.6^2 - 3.6 - 1 = -19$$
$$B'' = 3.6^2 - 2.6^2 - 3 \ldots = +33$$
$$C'' = 3.6 - 6 \ldots = +12$$
$$M'' = A' \ldots = +1.$$

Wir haben also:

$$-19z^3 + 33z^2 + 12z + 1 = 0 \text{ oder:}$$
$$19z^3 - 33z^2 - 12z - 1 = 0.$$

Für $z = 1$ wird $N = -27$
„ $z = 2$ „ $N = -5$
„ $z = 3$ „ $N = +179$
} Der Werth für z liegt also zwischen 2 und 3. Setzen wir daher $z = 2 + \frac{1}{t}$.

Nun ist:

$A'' = 19$, $B'' = -33$, $C'' = -12$, $M'' = -1$; daher ist:

$$A''' = 19.2^3 - 33.2^2 - 12.2 - 1 = -5$$
$$B''' = 3.19.2^2 - 2.33.2 - 12 \ldots = +84$$
$$C''' = 3.19.2 - 33 \ldots = +81$$
$$M''' = A'' \ldots = +19.$$

Mithin ist: $5t^3 - 84t^2 - 81t - 19 = 0$.
Die Werthe für N werden für $t = 1, 2, 3 \ldots 17$ alle negativ, erst $t = 18$ liefert ein positives N; wir setzen daher $t = 17 + \frac{1}{u}$. Nun ist:

$A''' = 5$, $B''' = -84$, $C''' = -81$, $M''' = -19$, $\alpha = 17$, mithin ist:

Digitized by Google

$A^{IV} = 5.17^3 - 84.17^2 - 81.17 - 19 = -1107$
$B^{IV} = 3.5.17^2 - 2.84.17 - 81 \ . \ . = +1398$
$C^{IV} = 3.5.17 - 84 \ . \ . \ . \ . \ . \ . = +171$
$M^{IV} = A''' \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . = +5;$

mithin haben wir:

$$1107u^3 - 1398u^2 - 171u - 5 = 0.$$

Substituiren wir hierin $u = 1$ und 2, so erhalten wir für N Werthe mit entgegengesetzten Zeichen. Setzen wir daher $u = 1 + \frac{1}{v}$. Nun ist:

$A^{IV} = 1107$; $B^{IV} = -1398$; $C^{IV} = -171$, $M^{IV} = -5$, $\alpha = 1$;

daher:

$A^V = 1107.1^3 - 1398.1^2 - 171.1 - 5 = -476$
$B^V = 3.1107.1^2 - 1.1398.1 - 171 \ . = +354$
$C^V = 3.1107.1 - 1398 \ . \ . \ . \ . \ . = +1923$
$M^V = A^{IV} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . = +1107.$

Mithin ist:

$$467v^3 - 354v^2 - 1923v - 1107 = 0.$$

Der Werth für v liegt zwischen 2 und 3, da N für $v = 2$ negativ und für $v = 3$ positiv wird. Wir können daher $v = 2$ setzen und hiermit die weitere Operation abbrechen, weil durch die bisher ermittelten Werthe ein bis zur sechsten Decimale genauer Wurzelwerth der Gl. gefunden wird. Es ist also

$$x = 1 + \frac{1}{y}; \ y = 6 + \frac{1}{z}; \ z = 2 + \frac{1}{t}; \ t = 17 + \frac{1}{u}; \ u = 1 + \frac{1}{v}; \ v = 2.$$

Mithin ist:

$$x = 1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{17 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 \ldots}}}}}$$

Nach §. 211 erhalten wir nun folgende Näherungswerthe für x:

$1^1/_6 = 1{,}16$; $1^2/_{13} = 1{,}153$; $1^{35}/_{227} = 1{,}1541$;
$1^{37}/_{240} = 1{,}15417$; $1^{109}/_{707} = 1{,}154172$. (Vgl. §. 509. 1.)

2. Da diese Gleichung nur negative Wurzeln hat, so setze man $x = -x_1$ in die gegebene Gl., wodurch wir erhalten:

$$-x_1^3 - 7x_1 + 3 = 0.$$

Aendern wir hierin sämmtliche Zeichen, so wird:

$$x_1^3 + 7x_1 - 3 = 0,$$

Digitized by Google

eine Gl. welche, da das Absolutglied negativ ist, nothwendig eine positive reelle Wurzel haben muß. Nun liegt diese Wurzel zwischen 0 und 1, weil für diese beiden Substitutionen N bezüglich $= -3$ und $+5$ wird. Setzen wir also $x_1 = \frac{1}{y}$, so wird durch diese Substitution:

$$3y^3 - 7y^2 - 1 = 0.$$

Für $y = 2$ wird $N = -5$
„ $y = 3$ „ $N = +17$ } Setze also $y = 2 + \frac{1}{z}$, so wird:

$$5z^3 - 8z^2 - 11z - 3 = 0.$$

Für $z = 2$ wird $N = -17$
„ $z = 3$ „ $N = +27$ } Setzen wir $z = 2 + \frac{1}{r}$, so wird:

$$17r^3 - 17r^2 - 22r - 5 = 0.$$

Für $r = 1$ wird $N = -27$
„ $r = 2$ „ $N = +19$ } Setze $r = 1 + \frac{1}{s}$, so haben wir:

$$27s^3 + 5s^2 - 34s - 17 = 0.$$

Für $s = 1$ wird $N = -19$
„ $s = 2$ „ $N = +151$ } Setze $s = 1 + \frac{1}{t}$, so ist:

$$19t^3 - 57t^2 - 86t - 27 = 0.$$

Für $t = 1$ wird $N = -151$; für $t = 2$ wird $N = -275$;
„ $t = 3$ „ $N = -285$; „ $t = 4$ „ $N = -67$;
„ $t = 5$ „ $N = +493$. Setze $t = 4 + \frac{1}{u}$, so wird:

$$67u^3 - 370u^2 - 171u - 19 = 0.$$

Für $u = 2$ wird $N = -1305$; für $u = 3$ wird $N = -2051$;
„ $u = 4$ „ $N = -1335$; „ $u = 5$ „ $N = -1749$;
„ $u = 6$ „ $N = +107$. Setze $u = 5 + \frac{1}{v}$, so wird:

$$1749v^3 - 1154v^2 - 635v - 67 = 0.$$

Für $v = 1$ wird $N = -107$;
„ $v = 2$ „ $N = +8039$. Setze $v = 1$.

Es ist also:

$$x_1 = \frac{1}{y},\ y = 2 + \frac{1}{z},\ z = 2 + \frac{1}{r},\ r = 1 + \frac{1}{s},\ s = 1 + \frac{1}{t},$$

$$t = 4 + \frac{1}{u},\ u = 5 + \frac{1}{v},\ v = 1;\ \text{daher:}$$

Digitized by Google

$$x = -x_1 = -\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1}\ldots}}}}}}$$

Die Näherungswerthe für x sind daher:
$-{}^1/_2 = -0{,}5$; $-{}^2/_5 = -0{,}4$; $-{}^5/_7 = -0{,}42$; $-{}^5/_{12} = -0{,}416$;
$-{}^{23}/_{55} = -0{,}4181$; $-{}^{120}/_{287} = -0{,}41811$;
$-{}^{143}/_{342} = -0{,}4181286$. (Vgl. §. 509. 5.)

3. Nach §. 509. 6 liegt der reelle Wurzelwerth zwischen -3 und -4. Setzen wir also:
$x = -x_1$, so wird: $x_1^3 - 7x_1 - 11 = 0$.

Für $x_1 = 2$ wird $N = -17$; für $x_1 = 3$ wird $N = -5$;
„ $x_1 = 4$ „ $N = +25$. Setze $x_1 = 3 + \frac{1}{y}$, so wird:

$$5y^3 - 20y^2 - 9y - 1 = 0.$$

Für $y = 2$ wird $N = -59$; für $y = 3$ wird $N = -73$;
„ $y = 4$ „ $N = -37$; „ $y = 5$ „ $N = +79$.

Setze $y = 4 + \frac{1}{z}$, so haben wir:

$$37z^3 - 71z^2 - 40z - 5 = 0.$$

Für $z = 2$ wird $N = -73$;
„ $z = 3$ „ $N = +235$. Setze $z = 2 + \frac{1}{r}$, so ist:

$$73r^3 - 120r^2 - 151r - 37 = 0.$$

Für $r = 2$ wird $N = -235$.
„ $r = 3$ „ $N = +401$. Setze $r = 2 + \frac{1}{s}$, so erhalten wir:

$$235s^3 - 245s^2 - 318s - 73 = 0.$$

Für $s = 1$ wird $N = -401$;
„ $s = 2$ „ $N = +191$. Setze $s = 1 + \frac{1}{t}$, so wird:

$$401t^3 + 103t^2 - 460t - 235 = 0.$$

Für $t = 1$ wird $N = -191$;
„ $t = 2$ „ $N = +2465$. Setze $t = 1 + \frac{1}{u}$, so ist:

$$191u^3 - 949u^2 - 1306u - 401 = 0.$$

Der Werth für u liegt zwischen 6 und 7; man kann daher

Digitized by Google

$u = 6$ setzen und hiermit die weitere Operation abbrechen. Es ist also:

$$x_1 = 3+\frac{1}{y},\ y = 4+\frac{1}{z},\ z = 2+\frac{1}{r},\ r = 2+\frac{1}{s},\ s = 1+\frac{1}{t},$$

$$t = 1+\frac{1}{u},\ u = 6.$$

Die Näherungswerthe für x sind also, da $x = -x_1$ ist:

$-3^1/_4 = -3{,}25$; $-3^2/_9 = -3{,}22$; $-3^5/_{22} = -3{,}227$;
$-3^7/_{31} = -3{,}2258$; $-3^{12}/_{53} = -3{,}22641$;
$-3^{79}/_{349} = -3{,}226361$. (Vergl. §. 509. 6.)

4. Nach §. 509. 7 liegt der positive Wurzelwerth dieser Gl. zwischen 2 und 3. Setzen wir also $x = 2+\frac{1}{y}$, so wird:

$$5y^3 - 8y^2 - 6y - 1 = 0.$$

Für $y = 1$ wird $N = -10$; für $y = 2$ wird $N = -5$;
„ $y = 3$ „ $N = +44$. Setze also $y = 2+\frac{1}{z}$, alsdann wird:

$$5z^3 - 22z^2 - 22z - 5 = 0.$$

Für $z = 2$ wird $N = -97$; für $z = 3$ wird $N = -134$;
„ $z = 4$ „ $N = -125$; „ $z = 5$ „ $N = -40$;
„ $z = 6$ „ $N = +151$. Setze also $z = 5+\frac{1}{r}$, so wird:

$$40r^3 - 133r^2 - 53r - 5 = 0.$$

Für $r = 1$ wird $N = -151$; für $r = 2$ wird $N = -323$;
„ $r = 3$ „ $N = -281$; „ $r = 4$ „ $N = +215$.

Setze $r = 3+\frac{1}{s}$, alsdann erhalten wir:

$$281s^3 - 229s^2 - 227s - 40 = 0.$$

Für $s = 1$ wird $N = -215$;
„ $s = 2$ „ $N = +838$; setze $s = 1+\frac{1}{t}$, so wird:

$$215t^3 - 158t^2 - 614t - 281 = 0.$$

Für $t = 2$ wird $N = -421$;
„ $t = 3$ „ $N = +2260$. Setze $t = 2+\frac{1}{u}$, so ist:

$$421u^3 - 1334u^2 - 1132u - 215 = 0.$$

Für $u = 2$ wird $N = -4447$: für $u = 3$ wird $N = -4250$;
„ $u = 4$ „ $N = +857$. Setze $u = 3+\frac{1}{v}$, so hat man:

$$4250v^3 - 2231v^2 - 2455v - 421 = 0.$$

Digitized by Google

Für $v = 1$ wird $N = -857$;
„ $v = 2$ „ $N = +19745$. Setze schließlich $v = 1$. Nun ist:

$$x = 2+\frac{1}{y},\ y = 2+\frac{1}{z},\ z = 5+\frac{1}{r},\ r = 3+\frac{1}{s},\ s = 1+\frac{1}{t},$$

$$t = 2+\frac{1}{u},\ u = 3+\frac{1}{v},\ v = 1.$$

Die Näherungswerthe für x sind also:

$2^1/_2 = 2{,}5$; $2^5/_{11} = 2{,}45$; $2^{16}/_{35} = 2{,}457$; $2^{21}/_{46} = 2{,}4565$;
$2^{58}/_{127} = 2{,}45669$; $2^{195}/_{427} = 2{,}4566744$; $2^{253}/_{554} = 2{,}4566786$.

5. Für $x = 0$ wird $N = 1$; für $x = 1$ wird $N = -1$;
„ $x = 2$ „ $N = +1$.

Hieraus folgt, daß sowohl zwischen 0 und 1 als auch zwischen 1 und 2 eine Wurzel der Gleichung liegt. Indessen liegt auch noch eine dritte Wurzel zwischen -1 und -2, die also negativ ist. Suchen wir zunächst die Wurzel zu bestimmen, welche zwischen 0 und 1 liegt. Wir setzen also:

$$(1)\ x = \frac{1}{y},\ \text{so wird:}$$

$$y^3 - 2y^2 - y + 1 = 0.$$

Für $y = 0$ wird $N = +1$; für $y = 1$ wird $N = -1$;
„ $y = 2$ „ $N = -1$; „ $y = 3$ „ $N = +7$.

$$\text{Setze } y = 2+\frac{1}{z},\ \text{so ist:}$$

$$z^3 - 3z^2 - 4z - 1 = 0.$$

Für $z = 0$ wird $N = -1$; für $z = 1$ wird $N = -7$;
„ $z = 2$ „ $N = -13$; „ $z = 3$ „ $N = -13$;
„ $z = 4$ „ $N = -1$; „ $z = 5$ „ $N = +29$.

$$\text{Setze } z = 4+\frac{1}{r},\ \text{so ist:}$$

$$r^3 - 20r^2 - 9r - 1 = 0.$$

Da es blos darauf ankommt, einen Näherungswerth für r zu finden, so kann man die beiden letzen Glieder dieser Gl. unberücksichtigt lassen und zur engern Begrenzung des Werthes für r:

$$r^3 - 20r^2 = 0 \text{ setzen, woraus } r = 20.$$

Für $r = 20$ wird $N = -181$;
„ $r = 21$ „ $N = +251$.

$$\text{Setze also } r = 20+\frac{1}{s},\ \text{so erhält man:}$$

$$181s^3 - 391s^2 - 40s - 1 = 0.$$

Digitized by Google

Für $s = 1$ wird $N = -251$; für $s = 2$ wird $N = -197$;
„ $s = 3$ „ $N = +1247$. Setzt $s = 2 + \frac{1}{t}$, so hat man:

$$197t^3 - 568t^2 - 695t - 181 = 0.$$

Für $t = 2$ wird $N = -2267$; für $t = 3$ wird $N = -2059$;
„ $t = 4$ „ $N = +559$. Setze $t = 3 + \frac{1}{u}$, so wird:

$$2059u^3 - 1216u^2 - 1205u - 197 = 0.$$

Für $u = 1$ wird $N = -559$; für $u = 2$ wird $N = +9001$.
Setze $u = 1 + \frac{1}{v}$, so hat man:

$$559v^3 - 2540v^2 - 4961v - 2059 = 0.$$

Für $v = 6$ wird $N = -2521$;
„ $v = 7$ „ $N = +30491$. Setze $v = 6 + \frac{1}{w}$, so ist:

$$2521w^3 - 24931w^2 - 7522w - 559 = 0.$$

Setzt man hierin $w = 9$ und bricht die Operation ab, so ist:

$$x = \frac{1}{y},\ y = 2 + \frac{1}{z},\ z = 4 + \frac{1}{r},\ r = 20 + \frac{1}{s},\ s = 2 + \frac{1}{t},$$

$$t = 3 + \frac{1}{u},\ u = 1 + \frac{1}{v},\ v = 6 + \frac{1}{w},\ w = 9.$$

Demnach sind die Näherungswerthe für x_1:

$^1/_2 = 0{,}5$; $^4/_9 = 0{,}444$; $^{81}/_{182} = 0{,}445$; $^{166}/_{173} = 0{,}44504$;
$^{579}/_{1301} = 0{,}445042$; $^{745}/_{1674} = 0{,}4450418$;
$^{5049}/_{11345} = 0{,}44504186$; $^{46186}/_{103779} = 0{,}445041867$.

(2) Eine zweite Wurzel der Gleichung liegt, wie wir oben gesehen, zwischen 1 und 2. Setzen wir daher $x = 1 + \frac{1}{y}$, so wird:

$$y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0.$$

Für $y = 0 = 1$ wird $N = -1$;
„ $y = 2$ „ $N = +7$.

Setze also $y = 1 + \frac{1}{z}$, so hat man:

$$z^3 - 3z^2 - 4z - 1 = 0.$$

Dieselbe Gleichung in z haben wir ebenfalls bei der Berechnung des ersten Wurzelwerthes unter (1) gefunden, mithin müssen auch wieder dieselben Partialnenner entstehen und es bedarf daher keiner weitern Operation mehr. Wir haben daher jetzt:

Digitized by Google

$$x_2 = 1+\frac{1}{y},\ y = 1+\frac{1}{z},\ z = 4+\frac{1}{r},\ r = 20+\frac{1}{s},\ s = 2+\frac{1}{t},$$

$$t = 3+\frac{1}{u},\ u = 1+\frac{1}{v},\ v = 6+\frac{1}{w},\ w = 9.$$

Daher sind die Näherungswerthe für x_2:

$2;\ {}^{9}/_{5} = 1{,}8;\ {}^{182}/_{101} = 1{,}801;\ {}^{373}/_{207} = 1{,}80193;$
${}^{1301}/_{722} = 1{,}801939;\ {}^{1674}/_{929} = 1{,}8019375;$
${}^{11345}/_{6296} = 1{,}80193773;\ {}^{103779}/_{57593} = 1{,}801937735.$

(3) Die gegebene Gleichung hat zwei Zeichenwechsel und eine Zeichenfolge; daher eine negative und zwei positive Wurzeln, wovon die beiden letztern in vorstehender Berechnung bereits gefunden sind. Um nun die Grenze für die negative Wurzel zu finden, substituiren wir für x in die gegebene Gl. -1 und -2, so erhalten wir im ersten Falle $N = +1$ und andern Falles $N = -7$. Statt diese Wurzel aufzusuchen, wie die beiden vorhergehenden, erwäge man, daß, da das Absolutglied in der gegebenen Gleichung aus dem Produkte der Wurzeln besteht, $-x_1 x_2 x_3 = 1$ ist. Setzen wir hierin die zusammengehörigen Werthe von x_1 und x_2, so erhalten wir:

$-2.{}^{1}/_{2}.x_3 = 1$; also $x_3 = -1$
$-{}^{4}/_{9}.{}^{9}/_{5}.x_3 = 1$; „ $x_3 = -{}^{5}/_{4} = -1{,}25$
$-{}^{182}/_{101}.{}^{81}/_{182}x_3 = 1$; „ $x_3 = -{}^{101}/_{81} = -1{,}2469$
$-{}^{166}/_{373}.{}^{373}/_{207}x_3 = 1$; „ $x_3 = -{}^{207}/_{166} = -1{,}246987$
$-{}^{579}/_{1301}.{}^{1301}/_{722}.x_3 = 1$; „ $x_3 = -{}^{722}/_{579} = -1{,}2469775$
$-{}^{745}/_{1674}.{}^{1674}/_{929}.x_3 = 1$; „ $x_3 = -{}^{929}/_{745} = -1{,}24697986$
$-{}^{5049}/_{11345}.{}^{11345}/_{6296}x_3 = 1$; „ $x_3 = -{}^{6296}/_{5049} = -1{,}2469796$
$-{}^{46186}/_{103779}.{}^{103779}/_{57593}x_3 = 1$; „ $x_3 = -{}^{57593}/_{46186} = -1{,}246979604.$

6. Für $x = 0$ wird $N = +5$; für $x = 1$ wird $N = -3$;
„ $x = 2$ „ $N = -15$; „ $x = 3$ „ $N = -7$;
„ $x = 4$ „ $N = +69$;

mithin liegt eine Wurzel zwischen 0 und 1 und eine zweite zwischen 3 und 4. Um erstere zu finden, setze man $x = \frac{1}{y}$, so wird: $5y^4 - 4y^3 - 3y^2 - 2y + 1 = 0.$

Für $y = 1$ wird $N = -3$;

„ $y = 2$ „ $N = +33$. Setze $y = 1+\frac{1}{z}$, so ist:

$$3z^4 - 15z^2 - 16z - 5 = 0.$$

Für $z = 1$ wird $N = -33$; für $z = 2$ wird $N = -49$;

„ $z = 3$ „ $N = +55$. Setze $z = 2+\frac{1}{r}$, so hat man:

$$49r^4 - 20r^3 - 57r^2 - 24r - 3 = 0.$$

Digitized by Google

Für $r = 1$ wird $N = -55$;

„ $r = 2$ „ $N = +345$. Setze daher $r = 1 + \frac{1}{s}$, so wird:

$$55s^4 + 2s^3 - 177s^2 - 176s - 49 = 0.$$

Für $s = 1$ wird $N = -345$; für $s = 2$ wird $N = -213$;

„ $s = 3$ „ $N = +2339$. Setze also $s = 2 + \frac{1}{v}$, so ist:

$$213v^4 - 900v^3 - 1155v^2 - 442v - 55 = 0.$$

Für $v = 5$ wird $N = -9915$;

„ $v = 6$ „ $N = +37361$. Setze $v = 5$, so ist also:

$$x = \frac{1}{y},\ y = 1 + \frac{1}{z},\ z = 2 + \frac{1}{r},\ r = 1 + \frac{1}{s},\ s = 2 + \frac{1}{v},\ v = 5.$$

Die Näherungswerthe für x_1 sind also:

$1;\ {}^2/_3 = 0{,}66;\ {}^3/_4 = 0{,}75;\ {}^8/_{11} = 0{,}7273;\ {}^{43}/_{59} = 0{,}728813\ldots$

(2) Zur Auffindung der zweiten zwischen 3 und 4 liegenden Wurzel setze $x = 3 + \frac{1}{y}$, so ist:

$$7y^4 - 32y^3 - 33y^2 - 10y - 1 = 0.$$

Setzt man $y = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, so wird erst im letztern Falle N positiv; man setze also $y = 5 + \frac{1}{z}$ und wir erhalten:

$$501z^4 - 760z^3 - 537z^2 - 108z - 7 = 0.$$

Für $z = 3$ wird $N = -435$;

„ $z = 3$ „ $N = +14897$. Setze $z = 2 + \frac{1}{r}$, so ist:

$$435r^4 - 4656r^3 - 6927r^2 - 3248r - 501 = 0.$$

Für die verschiedenen Substitutionen erhält N erst einen positiven Werth, wenn $r = 13$ gesetzt wird. Setze also $r = 12 + \frac{1}{s}$, so wird:

$$62277s^4 - 825840s^3 - 201297s^2 - 16224s - 435 = 0.$$

Da N erst für $s = 14$ positiv wird, so setze man $s = 13$. Wir haben also, wenn wir hier die Operation abbrechen:

$$x = 3 + \frac{1}{y},\ y = 5 + \frac{1}{z},\ z = 2 + \frac{1}{r},\ r = 12 + \frac{1}{s},\ s = 13.$$

Die Näherungswerthe für x_2 sind daher:

$3^1/_5 = 3{,}2;\ 3^2/_{11} = 3{,}18;\ 3^{25}/_{137} = 3{,}18248;$
$3^{327}/_{1792} = 3{,}1824776.$ (Vgl. §. 509. 10.)

7. Für $x = 0$ wird $N = -5$; für $x = 1$ wird $N = -7$;
„ $x = 2$ „ $N = -5$; „ $x = 3$ „ $N = +9$;
„ $x = -1$ „ $N = +1$; „ $x = -2$ „ $N = -1$.

Digitized by Google

Es liegt mithin eine positive Wurzel zwischen 2 und 3 und eine negative zwischen −1 und −2. Um erstere zu berechnen, setze man $x = 2 + \frac{1}{y}$, so wird:

$$5y^3 - 7y^2 - 6y - 1 = 0.$$

Für $y = 1$ wird $N = -9$; für $y = 2$ wird $N = -1$;

„ $y = 3$ „ $N = +53$. Setze daher $y = 2 + \frac{1}{z}$, so ist:

$$z^3 - 26z^2 - 23z - 5 = 0.$$

Der Wurzelwerth dieser Gleichung liegt zwischen 26 und 27; denn für $z = 26$ wird $N = -603$ und für $z = 27$ wird $N = +103$. Setze $z = 26 + \frac{1}{r}$, so ist:

$$603r^3 - 653r^2 - 52r - 1 = 0.$$

Für $r = 1$ wird $N = -103$; für $r = 2$ wird $N = +2107$. Setze $r = 1 + \frac{1}{s}$ und wir erhalten:

$$103s^3 - 451s^2 - 1156s - 603 = 0.$$

Die Substitutionen von $s = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ liefern negative Werthe für N; erst $s = 7$ gibt ein positives N. Setze daher $s = 6 + \frac{1}{u}$ und man erhält:

$$1527u^3 - 4556u^2 - 1403u - 103 = 0.$$

Für $u = 1, 2, 3$ wird N negativ; für $u = 4$ wird N positiv. Setze $u = 3 + \frac{1}{v}$, so ist:

$$4087v^3 - 12490v^2 - 9187v - 1527 = 0.$$

Der Werth für v liegt zwischen 3 und 4. Man setze also $v = 3$. Es ist daher:

$$x = 2 + \frac{1}{y},\ y = 2 + \frac{1}{z},\ z = 26 + \frac{1}{r},\ r = 1 + \frac{1}{s},\ s = 6 + \frac{1}{u},$$

$$u = 3 + \frac{1}{v},\ v = 3.$$

Die Näherungswerthe für x_1 sind daher:

$2;\ 2{,}5;\ {}^{132}/_{53} = 2{,}49;\ {}^{137}/_{55} = 2{,}4909;\ {}^{954}/_{383} = 2{,}4908616;$
$^{2999}/_{1204} = 2{,}4908637;\ {}^{9951}/_{3995} = 2{,}49086357.$

Um den zweiten negativen Wurzelwerth der Gleichung zu erhalten, setze man $x = -\frac{1}{y}$, so ist:

$$3y^3 - 5y^2 + 1 = 0.$$

Digitized by Google

Für $y = 1$ wird $N = -1$; für $y = 2$ wird $N = +5$.

Setze $y = 1 + \frac{1}{z}$, so ist:

$$z^3 + z^2 - 4z - 3 = 0.$$

Für $z = 1$ wird $N = -5$; für $z = 2$ wird $N = +1$.

Setze $z = 1 + \frac{1}{r}$, so ist:

$$5r^3 - r^2 - 4r - 1 = 0.$$

Für $r = 1$ wird $N = -1$; für $r = 2$ wird $N = +27$.

Setze $r = 1 + \frac{1}{s}$, so ist:

$$s^3 - 9s^2 - 14s - 5 = 0.$$

Für $s = 10$ wird $N = -45$; für $s = 11$ wird $N = +83$.

Setze $s = 10 + \frac{1}{t}$, so hat man:

$$45t^3 - 106t^2 - 21t - 1 = 0.$$

Für $t = 1$ wird $N = -83$; für $t = 2$ wird $N = -107$;
„ $t = 3$ „ $N = +197$.

Setze $t = 2 + \frac{1}{u}$, so erhält man:

$$107u^3 - 95u^2 - 164u - 45 = 0.$$

Für $u = 1$ wird $N = -197$; für $u = 2$ wird $N = +103$.

Setze $u = 1 + \frac{1}{v}$, so wird:

$$197v^3 + 33v^2 - 226v - 107 = 0.$$

Für $v = 1$ wird $N = -103$; für $v = 2$ wird $N = +1151$.

Setze $v = 1 + \frac{1}{w}$, so ist:

$$103w^3 - 131w^2 - 624w - 197 = 0.$$

Für $w = 1$ wird $N = -849$; für $w = 2$ wird $N = -1145$;
„ $w = 3$ „ $N = -469$; „ $w = 4$ „ $N = +1803$.

Setze $w = 3$. Es ist also:

$$x = -\frac{1}{y},\ y = 1 + \frac{1}{z},\ z = 1 + \frac{1}{r},\ r = 1 + \frac{1}{s},\ s = 10 + \frac{1}{t},$$

$$t = 2 + \frac{1}{u},\ u = 1 + \frac{1}{v},\ v = 1 + \frac{1}{w},\ w = 3.$$

Die Näherungswerthe für x_2 sind also:

-1; $-1/2$; $-2/3$; $-21/32 = -0{,}6562$; $-44/67 = -0{,}656716$;
$-65/99 = -0{,}656565$; $-109/166 = -0{,}6566265$;
$-392/597 = -0{,}6566164$.

Digitized by Google

Die dritte Wurzel, welche ebenfalls negativ sein muß, weil die algebraische Summe des Coefficienten des zweiten Gliedes = 0 ist, also:

$x_3 = -(x_1 - x_2) = -(2{,}4908635 - 0{,}6566164) = -1{,}8342470.$

4. Auflösungen der Gleichungen durch Theilbruchreihen. Methode von Heis.

(Heis §. 102.)

§. 511. Soll die Gleichung:

$$(1)\quad Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + .. + M = 0$$

durch eine Theilbruchreihe aufgelöst werden, so bestimme man zuerst die Grenzen des Werthes von x auf dieselbe Weise, wie es im vorigen §. oder wie es unten bei der Auflösung der Gl. geschehen ist. Es sei der Werth von $x = \alpha + \frac{1}{y}$. Substituiren wir diesen Werth in obige Gleichung, so erhalten wir eine Gl. in y von folgender Form:

$$(2)\quad A'y^n + B'y^{n-1} + C'y^{n-2} + .. + M' = 0.$$

Nun bestimme man den Grenzwerth für y. Gesetzt derselbe liege zwischen $\beta - 1$ und β und $\beta - 1$ sei die kleinere und β die größere Grenze, so wähle man nicht, wie bei der vorigen Methode, die kleinere, sondern die größere Grenze β. Um nun aber den angenommenen größeren Werth für die Unbekannte dem wirklichen Werthe für dieselbe näher zu bringen, multiplicire man denselben mit einem ächten Bruche, also etwa mit $\frac{z}{z+1}$. Setzen wir also:

$$y = \beta\frac{z}{z+1}, \text{ so wird } \frac{1}{y} = \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{z}.$$

Substituiren wir den Werth für y in (2) und entwickeln dieselbe nach den Potenzen von z, so erhalten wir eine Gl. von folgender Form:

$$(3)\quad A''z^n + B''z^{n-1} + C''z^{n-2} + .. M'' = 0.$$

Liegt nun der wirkliche Werth von z zwischen den beiden Grenzen $\gamma - 1$ und γ, so setze man $z = \gamma\frac{r}{r+1}$; alsdann wird:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma}\cdot\frac{1}{r}.$$

Durch die Substitution des Werthes von z in (3) erhalten wir eine Gl. in r, die von derselben Form ist, wie die vor-

Digitized by Google

hergehenden. Liegt nun der Werth von r zwischen $\delta-1$ und δ, so setze man $r=\delta\frac{s}{s+1}$, woraus $\frac{1}{r}=\frac{1}{\delta}+\frac{1}{\delta}\cdot\frac{1}{s}$. In die durch Substitution des Werthes für r erhaltene Gl. in s setze man $s=\varepsilon\frac{t}{t+1}$, woraus $\frac{1}{s}=\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{1}{t}$. Verfährt man in derselben Weise bis zu einer gewissen Grenze, so erhält man aus

$$x=\alpha+\frac{1}{y},\ \frac{1}{y}=\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{z},\ \frac{1}{z}=\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{1}{r},\ \frac{1}{r}=\frac{1}{\delta}+\frac{1}{\delta}\cdot\frac{1}{s},$$
$$\frac{1}{s}=\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{1}{t}\text{ u. s. w.}$$

die Theilbruchreihe:

$$x=\alpha+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{1}{\delta}+\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{1}{\delta}\cdot\frac{1}{\varepsilon}\text{ u. s. w.,}$$

oder wenn wir den ersten Bruch $\frac{1}{\beta}$ mit A_1, den zweiten mit A_2, den dritten mit A_3 u. s. w. bezeichnen:

$$x=\alpha+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}A_1+\frac{1}{\delta}A_2+\frac{1}{\varepsilon}A_3+\ldots.$$

1. Weil $x(x^2+3)=5$, also $x=\frac{5}{x^2+3}$ ist, so ist ersichtlich, daß der ganzzahlige Werth für x nur 1 sein kann. Setzt man also $x=1+\frac{1}{y}$, so wird:

$$y^3-6y^2-3y-1=0.$$

Aus der Gl. $y^3=6y^2+3y+1$ folgt $y=6+\frac{3}{y}+\frac{1}{y^2}$. Es muß also $y>6$ und daher $\frac{3}{y}+\frac{1}{y^2}<1$ sein. Der Werth für y liegt demnach zwischen 6 und 7. Setzen wir $y=7\frac{z}{z+1}$, so wird $\frac{1}{y}=1/7+1/7.\frac{1}{z}$. Substituiren wir den Werth für y in die vorige Gl., so wird:

$$\left(7\frac{z}{z+1}\right)^3-6\left(7\frac{z}{z+1}\right)^2-3\left(7\frac{z}{z+1}\right)-1=0.$$
$$7^3.z^3-6.7^2.z^2(z+1)-3.7.z.(z+1)^2-(z+1)^3=0.$$
$$(7^3-6.7^2-3.7-1)z^3-(6.7^2+2.3.7+3)z^2-(3.7+3)z-1=0.$$
$$27z^3-339z^2-24z-1=0.$$

Digitized by Google

Hieraus folgt, daß:

$$z = {}^{339}/_{27} + \frac{24}{27z} + \frac{1}{27z^2}.$$

Daher muß $z > {}^{339}/_{27} > 12$ und mithin $\frac{24}{27z} + \frac{1}{27z^2} < 1$ sein.

Setzen wir $z = 13\frac{r}{r+1}$, so wird $\frac{1}{z} = {}^{1}/_{13} + {}^{1}/_{13}.\frac{1}{r}$. Durch Substitution des Werthes für z erhalten wir:

$$27\left(13\frac{r}{r+1}\right)^3 - 339\left(13\frac{r}{r+1}\right)^2 - 24\left(13\frac{r}{r+1}\right) - 1 = 0.$$

$$27.13^3.r^3 - 339.13^2.r^2(r+1) - 24.13.r(r+1)^2 - (r+1)^3 = 0.$$

$$(27.13^3 - 339.13^2 - 24.13 - 1)r^3 - (339.13^2 + 2.24.13 + 3)r^2$$
$$-(24.13+3)r - 1 = 0;\ \text{daher:}$$
$$1715r^3 - 57918r^2 - 315r - 1 = 0.$$

Hiernach ist $r = {}^{57918}/_{1715} + \frac{315}{1715r} + \frac{1}{1715r^2}$; mithin muß $r > {}^{57918}/_{1715} > 33$ und daher $\frac{315}{1715r} + \frac{1}{1715r^2} < 1$ sein. Man setze $r = 34\frac{s}{s+1}$, so wird $\frac{1}{r} = {}^{1}/_{34} + {}^{1}/_{34}.\frac{1}{s}$. Aus der Gleichung in r erhalten wir daher folgende in s:

$$1715.\left(34\frac{s}{s+1}\right)^3 - 57918.\left(34\frac{s}{s+1}\right)^2 - 315.\left(34\frac{s}{s+1}\right) - 1 = 0.$$

$$1715.34^3.s^3 - 57918.34^2.s^2(s+1) - 315.34.s.(s+1)^2 - (s+1)^3 = 0.$$

$$(1715.34^3 - 57918.34^2 - 315.34 - 1)s^3$$
$$-(57918.34^2 + 2.315.34 + 3)s^2 - (315.34+3)s - 1 = 0.$$
$$442441s^3 - 66974631s^2 - 10713s - 1 = 0.$$

Ohne wesentlichen Fehler kann man für diese Gleichung auch setzen:

$$442441s^2 - 66974631s - 10713 = 0.$$

Aus $s = {}^{66974631}/_{442441} + \frac{10713}{442441s}$ folgt, daß:

$$s > {}^{66974631}/_{442441} > 151$$

sein muß. Setze daher $s = 152\frac{t}{t+1}$, so wird:

$$\frac{1}{s} = {}^{1}/_{152} + {}^{1}/_{152}.\frac{1}{t}.$$

Aus der Gl. in s erhalten wir also folgende in t:

Digitized by Google

$$442441\left(152\frac{t}{t+1}\right)^2-66974631.\left(152\frac{t}{t+1}\right)-10713=0.$$

$$442441.152^2.t^2-66974631.152.t(t+1)-10713(t+1)^2=0.$$

$$(442441.152^2-66974631.152-10713)t^2$$
$$-(66974631.152+2.10713)t-10713=0.$$
$$42002239t^2-10180165338t-10713=0.$$

Ohne erheblichen Fehler können wir hierfür auch setzen:

$$42002239t-10180165338=0.$$

Man setze $t=242\frac{u}{u+1}$, so wird $\frac{1}{t}={}^1/_{242}+{}^1/_{242}.\frac{1}{u}$.

Setzen wir den Werth für t in die letzte Gl., so haben wir:

$$42002239.242u-10180165338(u+1)=0 \text{ oder:}$$
$$-15623500u=10180165338.$$

Hieraus folgt $u=-652$.

Brechen wir hier die weitere Operation ab, so wird der Werth für x durch folgende Theilbruchreihe ausgedrückt:

$$x=1+{}^1/_7+{}^1/_{18}A_1+{}^1/_{34}A_2+{}^1/_{152}A_3+{}^1/_{242}A_4-{}^1/_{652}A_5....$$

Nun ist:

$$\begin{aligned}
1 &= +1,0000000000000000000\\
{}^1/_7 &= +0,1428571428571428571 = A_1\\
{}^1/_{18}A_1 &= +0,0109890109890109890 1 = A_2\\
{}^1/_{34}A_2 &= +0,0003232062055591467 3 = A_3\\
{}^1/_{152}A_3 &= +0,0000021263566155207 0 = A_4\\
{}^1/_{242}A_4 &= +0,0000000878659758479 = A_5\\
{}^1/_{652}A_5 &= -0,0000000000134763766 6 = A_6.
\end{aligned}$$

$$x=1,154171495194926098 37-0,0000000000134763766 6$$
$$=1,154171495181449721 71.$$

Die imaginären Wurzeln einer Gleichung, die nur in gerader Anzahl vorhanden sein können, haben die Form $p\pm q\sqrt{-1}$, wo p und q commensurable oder incommensurable reelle Größen bezeichnen. Wenn daher eine Gleichung eine Wurzel von der Form $p+q\sqrt{-1}$ hat, muß sie nothwendig eine andere Wurzel von der Form $p-q\sqrt{-1}$ haben, indem die Größen p und q in beiden Ausdrücken dieselben sind. Substituirt man daher in einer Gleichung mit imaginären Wurzeln für die Unbekannte $p\pm\sqrt{-1}$ und entwickelt dieselbe alsdann, so erhält man eine Gleichung, welche aus zwei wesentlich von einander verschiedenen Theilen besteht, nämlich aus einem Theile, der reelle, und einem andern, der imaginäre Größen enthält. Bezeichnet man den Inbegriff der reellen Glieder mit P und den der imaginären mit $Q\sqrt{-1}$, so verwandelt sich die gegebene Gl. in folgende:

Digitized by Google

$$P+Q\sqrt{-1}=0,$$

welche offenbar nur in sofern stattfinden kann, als:

$$P=0 \text{ und } Q\sqrt{-1}=0.$$

Aus der letzten Gleichung suche man q durch p zu bestimmen und substituire den für q gefundenen Werth in die Gl. $P=0$, wodurch eine Gl. in P erhalten wird, die je nach ihrem Grade durch eine der vorhergehenden Methoden gelöst wird. Setzen wir, um die imaginären Wurzeln der gegebenen Gl. zu bestimmen, $x=-(y+z\sqrt{-1})$ in die Gl., so erhalten wir:

$$-(y+z\sqrt{-1})^3-3(y+z\sqrt{-1})-5=0 \text{ oder:}$$
$$-y^3-3y^2z\sqrt{-1}+3yz^2+z^3\sqrt{-1}-3y-3z\sqrt{-1}-5=0.$$

Nun setze man die reellen nnd die imaginären Größen gleich Null und wir erhalten:

$$(1)\quad -y^3+3yz^2-3y-5=0 \text{ und}$$
$$-3y^2z\sqrt{-1}+z^3\sqrt{-1}-3z\sqrt{-1}=0.$$

Dividire letztere Gl. durch $z\sqrt{-1}$, so wird:

$-3y^2+z^2-3=0$, woraus $z^2=3(y^2+1)$ folgt.

Setze den Werth für z^2 in (1) und entwickele die Gl., so wird:

$$8y^3+6y-5=0.$$

Der Werth für y liegt zwischen 0 und 1. Setzen wir also $y=\frac{1}{r}$, so hat man:

$$5r^3-6r^2-8=0.$$

Aus der Gl. $r=6/5+\frac{8}{5r^2}$ folgt, daß der Werth für r zwischen 1 und 2 liegt. Man setze daher $r=2\frac{s}{s+1}$, so wird:

$$\frac{1}{r}=1/2+1/2.\frac{1}{s}.$$

Durch Substitution erhalten wir dann folgende Gl. in s:

$$5.\left(2\frac{s}{s+1}\right)^3-6\left(2\frac{s}{s+1}\right)^2-8=0.$$
$$(5.2^3-6.2^2-8)s^3-(6.2^2+8.3)s^2-24s-8=0.$$
$$8s^3-48s^2-24s-1=0.$$

Diese Gleichung in s ist der oben gefundenen Gl. in y durchaus gleich; demnach müssen auch die nämlichen Werthe für s, t, u, v, w entstehen. Daher ist:

Digitized by Google

$$y = \frac{1}{r},\ \frac{1}{r} = {}^1/_2 + {}^1/_2 . \frac{1}{s},\ \frac{1}{s} = {}^1/_7 + {}^1/_7 . \frac{1}{t},\ \frac{1}{t} = {}^1/_{13} + {}^1/_{13} . \frac{1}{u},$$

$$\frac{1}{u} = {}^1/_{34} + {}^1/_{34} . \frac{1}{v},\ \frac{1}{v} = {}^1/_{152} + {}^1/_{152} . \frac{1}{w},\ \frac{1}{w} = {}^1/_{242} + {}^1/_{242} . \frac{1}{w_1},$$

$w_1 = -652$. Daher ist:

$$y = -({}^1/_2 + {}^1/_7 A_1 + {}^1/_{13} A_2 + {}^1/_{34} A_3 + {}^1/_{152} A_4 + {}^1/_{242} A_5 - {}^1/_{652} A_6 ..).$$

Nun ist:

$$\begin{aligned}
-{}^1/_2 &= -0{,}500000000000000 = A_1\\
-{}^1/_7 A_1 &= -0{,}071428571428571 = A_2\\
-{}^1/_{13} A_2 &= -0{,}005494505494505 = A_3\\
-{}^1/_{34} A_3 &= -0{,}000161603102779 = A_4\\
-{}^1/_{152} A_4 &= -0{,}000001063178308 = A_5\\
-{}^1/_{242} A_5 &= -0{,}000000004393299 = A_6\\
+{}^1/_{652} A_6 &= +0{,}000000000006738 = A_7
\end{aligned}$$

$y = -0{,}57708574759072$; daher ist:

$z^2 = 3(y^2+1) = 3{,}9990838802491527$;

mithin:

$z = \pm 1{,}99977095$; folglich sind die beiden imaginären Wurzeln:

x_2 und $x_3 = -0{,}57708574759072 \pm 1{,}99977095\sqrt{-1}$.

2. Diese Gleichung hat nur Zeichenfolgen, also ist die reelle Wurzel negativ. Setzt man nun $x = -x_1$, so erhält man:

$$x_1^3 + 7x_1 - 3 = 0.$$

Es ist leicht ersichtlich, daß keine ganzzahligen Werthe für x_1 der Gl. Genüge leisten; man setze daher $x_1 = \frac{1}{y}$, so ist:

$$3y^3 - 7y^2 - 1 = 0.$$

Aus $y = {}^7/_3 + \frac{1}{3y^2}$ folgt, daß der Werth für y zwischen 2 und 3 liegt. Man setze $y = 3\frac{z}{z+1}$, so erhalten wir:

$$3.\left(3\frac{z}{z+1}\right)^3 - 7.\left(3\frac{z}{z+1}\right)^2 - 1 = 0 \text{ oder:}$$

$$17z^3 - 66z^2 - 3z - 1 = 0.$$

Aus $z = {}^{66}/_{17} + \frac{3}{17z} + \frac{1}{17z^2}$ folgt, daß $z > {}^{66}/_{17} > 3$ sein muß.

Setzt man $z = 4\frac{s}{s+1}$, so erhalten wir:

$$17.\left(4\frac{s}{s+1}\right)^3 - 66\left(4\frac{s}{s+1}\right)^2 - 3\left(4\frac{s}{s+1}\right) - 1 = 0 \text{ oder:}$$

$$19s^3 - 1083s^2 - 15s - 1 = 0.$$

Aus $s = {}^{1083}/_{19} + \frac{15}{19s} + \frac{1}{19s^2}$ folgt, daß $s > {}^{1083}/_{19} > 56$ ist.

Digitized by Google

Man setze $s = 57\frac{t}{t+1}$, so wird:

$$19.\left(57\frac{t}{t+1}\right)^3 - 1083\left(57\frac{t}{t+1}\right)^2 - 15\left(57\frac{t}{t+1}\right) - 1 = 0 \text{ oder:}$$

$$856t^3 + 3520380t^2 + 858t + 1 = 0.$$

Aus $t = -{}^{3520380}/_{856} - \frac{858}{856t} - \frac{1}{856t^2}$ folgt, daß:

$$t > -{}^{3520380}/_{856} > -4112 \text{ ist.}$$

Setzen wir also schließlich $t = -4113$, so ist:

$$x = -x_1 = -({}^1/_3 + {}^1/_4 A_1 + {}^1/_{57} A_2 - {}^1/_{4113} A_3 \ldots)$$

$$\begin{aligned} -{}^1/_3 &= -0{,}333333333333333 = A_1 \\ -{}^1/_4 A_1 &= -0{,}083333333333333 = A_2 \\ -{}^1/_{57} A_2 &= -0{,}001461988304093 = A_3 \\ +{}^1/_{4113} A_3 &= +0{,}000000355455459 = A_4 \\ \hline x_1 &= -0{,}418128299515300. \end{aligned}$$

(Man vgl. §. 510. 5.)

Um die imaginären Wurzeln zu finden, setze man $x = -(y + z\sqrt{-1})$, so wird:

$$z^2 = 3y^2 + 7 \text{ und}$$

$$8y^3 + 14y + 3 = 0.$$

Setzt man $y = -\frac{1}{r}$, so wird:

$$3r^3 - 14r^2 - 8 = 0.$$

Aus $r = {}^{14}/_3 + \frac{8}{3r^2}$ folgt, daß $r > {}^{14}/_3 > 4$ sein muß. Man setze $r = 5\frac{s}{s+1}$, so wird:

$$3\left(5\frac{s}{s+1}\right)^3 - 14\left(5\frac{s}{s+1}\right)^2 - 8 = 0 \text{ oder:}$$

$$17s^3 - 374s^2 - 24s - 8 = 0.$$

Aus $s = {}^{374}/_{17} + \frac{24}{17s} + \frac{8}{17s^2}$ folgt, daß $s > 22$ ist. Wir setzen aber nicht, wie bisher $s = 23$, sondern $s = 22\frac{t}{t+1}$, weil in jenem Falle der Wurzelwerth für y in der dritten Decimalstelle zu klein würde. Wenn wir den Werth für s einsetzen, so erhalten wir:

$$17\left(22\frac{t}{t+1}\right)^3 - 374.\left(22\frac{t}{t+1}\right)^2 - 24\left(22\frac{t}{t+1}\right) - 8 = 0 \text{ oder:}$$

$$67t^3 + 22762t^2 + 69t + 1 = 0.$$

Digitized by Google

Aus $t = -\left({}^{22762}/_{67} + \frac{69}{67t} + \frac{1}{67t^2}\right)$ folgt $t > -{}^{22762}/_{67} > -339$.

Man setze $t = -340\frac{u}{u+1}$, so wird:

$$-67.\left(340\frac{u}{u+1}\right)^3 + 22762.\left(340\frac{u}{u+1}\right)^2 - 69.\left(340\frac{u}{u+1}\right) + 1 = 0$$

oder: $2104259u^3 - 2631240283u^2 + 23457u - 1 = 0$.

Setze $u = 1250$, so wird:

$$y = {}^1/_5 + {}^1/_{22}A_1 - {}^1/_{340}A_2 - {}^1/_{1250}A_3$$
$$= 0{,}2 + 0{,}009090909091 - 0{,}000026737968 - 0{,}000000021390$$
$$= 0{,}209064149743;$$ daher ist:

$$z^2 = 3y^2 + 7 = 7{,}13112345606935203027$$
$$z = \pm 2{,}67041634508;$$ mithin ist:

$$x_2 \text{ und } x_3 = 0{,}209064149743 \pm 2{,}67041634508\sqrt{-1}.$$

3. Da nach §. 510. 6 die reelle Wurzel dieser Gleichung negativ ist, so setze man $x = -x_1$ und wir erhalten die Gl.:

$$x_1^3 - 7x_1 - 11 = 0.$$

Da erst für $x = 3$ und $x = 4$ ein Zeichenwechsel für N stattfindet, so setze $x_1 = 3 + \frac{1}{y}$; alsdann wird:

$$\left(3+\frac{1}{y}\right)^3 - 7\left(3+\frac{1}{y}\right) - 11 = 0 \text{ oder:}$$
$$5y^3 - 20y^2 - 9y - 1 = 0.$$

Aus $y = {}^{20}/_5 + \frac{9}{5y} + \frac{1}{5y^2}$ folgt, daß $y > 4$ sein muß. Man setze $y = 5\frac{z}{z+1}$, so wird:

$$5\left(5\frac{z}{z+1}\right)^3 - 20\left(5\frac{z}{z+1}\right)^2 - 9\left(5\frac{z}{z+1}\right) - 1 = 0 \text{ oder:}$$
$$79z^3 - 593z^2 - 48z - 1 = 0.$$

Aus $z = {}^{593}/_{79} + \frac{48}{79z} + \frac{1}{79z^2}$ folgt, daß $z > {}^{593}/_{79} > 7$ sein muß. Setze $z = 8\frac{r}{r+1}$, so wird:

$$79\left(8\frac{r}{r+1}\right)^3 - 593\left(8\frac{r}{r+1}\right)^2 - 48\left(8\frac{r}{r+1}\right) - 1 = 0 \text{ oder:}$$
$$2111r^3 - 38723r^2 - 387r - 1 = 0.$$

Aus $r = {}^{38723}/_{2111} + \frac{387}{2111r} + \frac{1}{2111r^2}$ folgt $r > {}^{38723}/_{2111} > 18$.

Digitized by Google

Setze $r = 19\frac{s}{s+1}$, so wird:

$$2111\left(19\frac{s}{s+1}\right)^3 - 38723\left(19\frac{s}{s+1}\right)^2 - 387\left(19\frac{s}{s+1}\right) - 1 = 0 \text{ oder:}$$

$$492992s^3 - 13993712s^2 - 7356s - 1 = 0.$$

Der Wurzelwerth dieser Gleichung liegt zwischen 28 und 29.

Man setze $s = 28\frac{t}{t+1}$, so wird:

$$492992\left(28\frac{t}{t+1}\right)^3 - 13993712\left(28\frac{t}{t+1}\right)^2 - 7356\left(28\frac{t}{t+1}\right) - 1 = 0$$

oder: $149115793t^3 + 10971482147t^2 + 205971t + 1 = 0.$

Hierfür können wir ohne erheblichen Fehler setzen:

$$149115793t^2 + 10971482147t + 205971 = 0.$$

Setzt man $t = -74\frac{u}{u+1}$ in diese Gl., so ist:

$$4668609561u^2 - 811889266936u + 205971 = 0.$$

Setze hierin $u = 174\frac{v}{v+1}$, so erhält man:

$$78090827943v^2 - 141268732034922v + 205971 = 0.$$

Hieraus folgt $v =$ nahezu 1810.

Daher ist:

$$x = -x_1 = -(3 + {}^1/_5 + {}^1/_8 A_1 + {}^1/_{19} A_2 + {}^1/_{28} A_3 - {}^1/_{74} A_4 - {}^1/_{174} A_5 - {}^1/_{1810} A_6)$$

-3	$= -3,0000000000000000000 =$	
$-{}^1/_5$	$= -0,2000000000000000000 =$	A_1
$-{}^1/_8 A_1$	$= -0,0250000000000000000 =$	A_2
$-{}^1/_{19} A_2$	$= -0,0013157894736842105 =$	A_3
$-{}^1/_{28} A_3$	$= -0,0000469924812030075 =$	A_4
$+{}^1/_{74} A_4$	$= +0,0000006350335297703 =$	A_5
$+{}^1/_{174} A_5$	$= +0,0000000036496179871 =$	A_6
$+{}^1/_{1810} A_6$	$= +0,0000000000201636353 =$	A_7

$$x_1 = -(3,2263627819548872180 - 0,0000006386851641209)$$
$$= -3,2263621432697230969..$$

(2) Da in der Gl. $5y^3 - 20y^2 - 9y - 1 = 0$ der Werth für y zwischen 4 und 5 liegt, so setze man $y = 4\frac{z}{z+1}$, weshalb $\frac{1}{y} = {}^1/_4 + {}^1/_4 z$ wird. Durch diese Annahme entsteht ein Wurzelwerth für x, der schon in der zweiten Decimalstelle zu groß ist, weshalb die ferner sich ergebenden

Digitized by Google

Partialbrüche hiervon subtrahirt werden müssen, wie sich auch aus der weitern Operation ergeben wird. Denn für diesen Werth von y erhalten wir folgende Gl. in z:

$$5\left(4\frac{z}{z+1}\right)^3-20\left(4\frac{z}{z+1}\right)^2-9\left(4\frac{z}{z+1}\right)-1=0 \text{ oder:}$$

$$37z^3+395z^2+39z+1=0.$$

Aus $z=-\left({}^{395}/_{37}+\frac{39}{37z}+\frac{1}{37z^2}\right)$ folgt, daß

$$z>-{}^{395}/_{37}>-10$$

ist. Setze also $z=-11\frac{r}{r+1}$, so wird:

$$-37.\left(11\frac{r}{r+1}\right)^3+395\left(11\frac{r}{r+1}\right)^2-39\left(11\frac{r}{r+1}\right)+1=0 \text{ oder:}$$

$$1880r^3-46940r^2+426r-1=0.$$

Aus $r={}^{46940}/_{1880}-\frac{426}{1880r}+\frac{1}{1880r^2}$ folgt $r>{}^{46940}/_{1880}>24.$

Setze $r=25\frac{s}{s+1}$, so wird:

$$1880\left(25\frac{s}{s+1}\right)^3-46940\left(25\frac{s}{s+1}\right)^2+426\left(25\frac{s}{s+1}\right)-1=0 \text{ oder:}$$

$$48149s^3-29316203s^2+10647s-1=0.$$

Hieraus folgt, daß $s>608$. Setze also $s=609\frac{u}{u+1}$, so wird:

$$48149.\left(609\frac{u}{u+1}\right)^3-29316203.\left(609\frac{u}{u+1}\right)^2+10647\left(609\frac{u}{u+1}\right)$$
$$-1=0 \text{ oder:}$$

$$2431304000u^3-10872809716800u^2+6484020u-1=0.$$

Der Werth für u ist nahezu 4472.

Es ist also:

$x_1=-(3+{}^1/_4-{}^1/_{11}A_1-{}^1/_{25}A_2-{}^1/_{609}A_3-{}^1/_{4472}A_4\ldots)$

$=-3 \quad =-3,000000000000000000=$

$-{}^1/_4 \quad =-0,250000000000000_00000=A_1$

$+{}^1/_{11}A_1 \quad =+0,022727272727272727=A_2$

$+{}^1/_{25}A_2 \quad =+0,000909090909090909=A_3$

$+{}^1/_{609}A_3 \quad =+0,000014927601134497 7=A_4$

$+{}^1/_{4472}A_4 \quad =+0,000000003338014564 9=A_5$

$x_1=-(3,25-0,023637856730278542 62)$

$=-3,226362143269721457 38.$

Digitized by Google

Um die beiden imaginären Wurzeln zu finden, setze man $x = y + z\sqrt{-1}$, so wird:

$$z^2 = 3y^2 - 7 \text{ und}$$
$$8y^3 - 14y - 11 = 0.$$

Für $y = 1$ wird $N = -17$;

„ $y = 2$ „ $N = +25$. Setze $y = 1 + \frac{1}{r}$, so wird:

$$8\left(1+\frac{1}{r}\right)^3 - 14\left(1+\frac{1}{r}\right) - 11 = 0.$$
$$17r^3 - 10r^2 - 24r - 8 = 0.$$

Für $r = 1$ ist $N = -25$;

„ $r = 2$ „ $N = +40$. Setze $r = 2\frac{s}{s+1}$, so ist:

$$17\left(2\frac{s}{s+1}\right)^3 - 10\left(2\frac{s}{s+1}\right)^2 - 24\left(2\frac{s}{s+1}\right) - 8 = 0.$$
$$40s^3 - 160s^2 - 72s - 8 = 0 \text{ oder:}$$

$5s^3 - 20s^2 - 9s - 1 = 0$. Für $s = 5\frac{t}{t+1}$ erhalten wir:

$$79t^3 - 593t^2 - 48t - 1 = 0. \quad \text{Setze } t = 8\frac{u}{u+1}$$

$$2111u^3 - 38723u^2 - 387u - 1 = 0. \quad \text{Setze } u = 19\frac{v}{v+1}$$

$$492992v^3 - 13993712v^2 - 7356v - 1 = 0.$$

Ohne wesentlichen Fehler können wir statt dieser Gl. setzen:

$492992v^2 - 13993712v - 7356 = 0$. Setze $v = 29\frac{w}{w+1}$, so ist:

$$8781268w^2 - 405832360w - 7356 = 0.$$

Setze $w = 47\frac{w_1}{w_1+1}$, so wird:

$$323692736w_1^2 - 19074135632w_1 - 7356 = 0;\ w_1 = 60;$$
$$w_2 = 107.$$

Folglich ist: $y = 1 + {}^1/_2 + {}^1/_5 A_1 + {}^1/_8 A_2 + {}^1/_{19} A_3 + {}^1/_{29} A_4 + {}^1/_{47} A_5 + {}^1/_{60} A_6 + {}^1/_{107} A_7$.

Nun ist:

1	$= 1{,}0000000000000$
$^1/_2$	$= 0{,}5000000000000 = A_1$
$^1/_5 A_1$	$= 0{,}1000000000000 = A_2$
$^1/_8 A_2$	$= 0{,}0125000000000 = A_3$
$^1/_{19} A_3$	$= 0{,}0006578947368 = A_4$
$^1/_{29} A_4$	$= 0{,}0000226860254 = A_5$
$^1/_{47} A_5$	$= 0{,}0000004826814 = A_6$
$^1/_{60} A_6$	$= 0{,}0000000080446 = A_7$
$^1/_{107} A_7$	$= 0{,}0000000000751 = A_8$
	$y = 1{,}6131810716$; daher:

Digitized by Google

$z^2 = 3y^2 - 7 = 0{,}80705950930557297968$

$z = \pm 0{,}8983649090$; mithin ist:

x_2 und $x_3 = 1{,}6131810716 \pm 0{,}8983649090\sqrt{-1}$.

Oder: Dieselbe Gleichung in s fanden wir bei der ersten Berechnung der reellen Wurzel für x in y. Mit Rücksicht auf die dort für z, r, s, t, u, v gefundenen Werthe kann y auch durch folgende Theilbruchreihe ausgedrückt werden:

$y = 1 + {}^1/_2 + {}^1/_5 A_1 + {}^1/_8 A_2 + {}^1/_{19} A_3 + {}^1/_{28} A_4 - {}^1/_{74} A_5 - {}^1/_{174} A_6 - {}^1/_{1810} A_7$.

Auch hieraus folgt $y = 1{,}6131810716$.

4. Für $x = 1$ ist $N = -8$; für $x = 2$ ist $N = -5$;

„ $x = 3$ „ $N = +10$. Setzen wir $x = 2 + \frac{1}{y}$. Um aber dieselbe Form für die Theilbruchreihe zu erhalten, wie sie in der Beispielsammlung angegeben ist, setze man ${}^1/_2 y = y_1$, wodurch $x = 2\left(1 + \frac{1}{y_1}..\right)$ wird. Durch Substitution dieses Werthes für x in die gegebene Gl. erhalten wir:

$$2^3\left(1+\frac{1}{y_1}\right)^3 - 4.2\left(1+\frac{1}{y_1}\right) - 5 = 0 \text{ oder:}$$

$$5y_1^3 - 16y_1^2 - 24y_1 - 8 = 0.$$

Für $y_1 = 3$ ist $N = -89$; für $y_1 = 4$ ist $N = -40$;

„ $y_1 = 5$ „ $N = +97$. Setze $y_1 = 5\frac{z}{z+1}$, so wird:

$$5\left(5\frac{z}{z+1}\right)^3 - 16\left(5\frac{z}{z+1}\right)^2 - 24\left(5\frac{z}{z+1}\right) - 8 = 0 \text{ oder:}$$

$$97z^3 - 664z^2 - 144z - 8 = 0.$$

Aus $z = {}^{664}/_{97} + \frac{144}{97z} + \frac{8}{97z^2}$ folgt $z > 6$. Setzt man:

$z = 7\frac{r}{r+1}$, so wird:

$$97\left(7\frac{r}{r+1}\right)^3 - 664\left(7\frac{r}{r+1}\right)^2 - 144\left(7\frac{r}{r+1}\right) - 8 = 0 \text{ oder:}$$

$$281r^3 + 34576r^2 + 1032r + 8 = 0.$$

Aus $r = -\left({}^{34576}/_{281} + \frac{1032}{281r} + \frac{8}{281r^2}\right)$ folgt $r > -123$.

Setze $r = -123\frac{s}{s+1}$, so wird:

Digitized by Google

$$-281.\left(123\frac{s}{s+1}\right)^2+34576\left(123\frac{s}{s+1}\right)^2-1032\left(123\frac{s}{s+1}\right)+8=0$$

oder: $69749s^3+522846456s^2-126912s+8=0.$

Statt dieser Gl. kann man auch ohne wesentlichen Fehler setzen: $69749s^2+522846456s-126912=0.$

Aus $s=-\left({}^{522846456}/_{69749}-\frac{126912}{69749s}\right)$ folgt, daß s nahezu -7496 ist. Setzt man daher $s=-7496\frac{u}{u+1}$, so erhalten wir:

$$69749\left(7496.\frac{u}{u+1}\right)^2-522846456\left(7496\frac{u}{u+1}\right)-126912=0 \text{ oder:}$$

$$59735104u^2+3919257288000u+126912=0.$$

Setzt man $59735104u=-3919257288000$; mithin:

$u=-65611$ nahezu. Daher ist also:

$x=2(1+{}^1/_5+{}^1/_7A_1-{}^1/_{128}A_2+{}^1/_{7496}A_3-{}^1/_{65611}A_4\ldots)$. Nun ist:

$$\begin{aligned}
+1 &= +1,0000000000000000000\\
+{}^1/_5 &= +0,2000000000000000000 = A_1\\
+{}^1/_7A_1 &= +0,0285714285714285714 = A_2\\
-{}^1/_{128}A_2 &= -0,0002322803716608594 = A_3\\
+{}^1/_{7496}A_3 &= +0,0000003098826536367 = A_4\\
-{}^1/_{65611}A_4 &= -0,0000000000047230289 = A_5
\end{aligned}$$

$x=2(1,2285714595596939351 0-0,0002322803763838883)$

$=2.1,2283917152205554627$

$=2,4566783430441110925 4.$

Um die imaginären Wurzeln der Gl. zu finden, setze man $x=-(y+z\sqrt{-1})$; alsdann wird:

$$z^2=3y^2-4 \text{ und}$$

$$8y^3-8y-5=0.$$

Für $y=1$ wird $N=-5$; für $y=2$ wird $N=+43$.

Setze $y=1+\frac{1}{r}$, so erhalten wir:

$$8\left(1+\frac{1}{r}\right)^3-8\left(1+\frac{1}{r}\right)-5=0 \text{ oder:}$$

$$5r^3-16r^2-24r-8=0.$$

Dieselbe Gleichung hatten wir oben bei der Berechnung des reellen Werthes für x in y_1, folglich ist:

$y={}^1/_2x_1=1,2283917152205554627$; daher:

$z^2=3y^2-4=0,5264513608860540073893 52...$

$z=\pm 0,7255696802417077346 2.$

x_2 und $x_3=1,2283917152205554627\pm$

$0,7255696802417077346 2\sqrt{-1}.$

Digitized by Google

5. Für $x=1$ wird $N=0$; folglich ist hiermit schon eine Wurzel der Gl. gefunden. Dividiren wir daher die gegebene Gl. durch $x-1$, so erhalten wir:

$$x^2+x-4=0.$$

Für $x=1$ wird $N=-2$; für $x=2$ wird $N=+2$.

Wir setzen $x=1+\frac{1}{y}$ in die quadratische Gl., so wird:

$$2y^2-3y-1=0.$$

Aus $y=3/2+\frac{1}{2y}$ folgt, daß $y>1$ ist. Setzen wir:

$$y=2\frac{z}{z+1},\text{ so ist:}$$

$$2\left(2\frac{z}{z+1}\right)^2-3\left(2\frac{z}{z+1}\right)-1=0\text{ oder:}$$

$$z^2-8z-1=0.\quad\text{Setze } z=8\frac{r}{r+1},\text{ so wird:}$$

$$8^2\left(\frac{r}{r+1}\right)^2-8\left(8\frac{r}{r+1}\right)-1=0\text{ oder:}$$

$$r^2+66r+1=0.\quad\text{Setze } r=-66\frac{s}{s+1},\text{ so ist:}$$

$$\left(66\frac{s}{s+1}\right)^2-66\left(66\frac{s}{s+1}\right)+1=0$$

$$s^2-4354s+1=0.\quad s=4354\frac{u}{u+1}$$

$$\left(4354\frac{u}{u+1}\right)^2-4354\left(4354\frac{u}{u+1}\right)+1=0$$

$$u^2-18957314u+1=0;\text{ also } u=18957314.$$

Daher ist: $x=1+1/2+1/8A_1-1/66A_2-1/4354A_3-1/18957814A_4\ldots$

$$\begin{aligned}
+1 &= +1,00000000000000000000000000000000 = \\
+1/2 &= +0,50000000000000000000000000000000 = A_1\\
+1/8A_1 &= +0,06250000000000000000000000000000 = A_2\\
-1/66A_2 &= -0,00094696969696969696969696969697 = A_3\\
-1/4354A_3 &= -0,00000021749418855528180287 0227 = A_4\\
-1/18957814A_4 &= -0,00000000000001147283779523 2056 = A_5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_2 &= 1,5625-0,00094718719116972508929507 1990\\
&= 1,56155281280883027491070492 8010\\
x_3 &= -(x_1+x_2) = -2,56155281280883027491070492 8010.
\end{aligned}$$

6. Da die Gl. nur Zeichenfolgen hat, so ist die reelle Wurzel negativ. Setzen wir also $x=-x_1$, so wird:

$$x_1^3-2x_1^2+3x_1-4=0.$$

Digitized by Google

Für $x_1 = 1$ wird $N = -2$; für $x_1 = 2$ wird $N = +2$.

Setzt man $x_1 = 1 + \frac{1}{y}$, so wird:

$$\left(1+\frac{1}{y}\right)^3 - 2\left(1+\frac{1}{y}\right)^2 + 3\left(1+\frac{1}{y}\right) - 4 = 0 \text{ oder:}$$

$$2y^3 - 2y^2 - y - 1 = 0.$$

Für $y = 1$ wird $N = -2$; für $y = 2$ wird $N = +5$.

Setze $y = 2\frac{z}{z+1}$, so ist:

$$2\left(2\frac{z}{z+1}\right)^3 - 2\left(2\frac{z}{z+1}\right)^2 - \left(2\frac{z}{z+1}\right) - 1 = 0 \text{ oder:}$$

$5z^3 - 15z^2 - 5z - 1 = 0$. Setze $z = 3\frac{r}{r+1}$, so ist:

$$5\left(3\frac{r}{r+1}\right)^3 - 15\left(3\frac{r}{r+1}\right)^2 - 5\left(3\frac{r}{r+1}\right) - 1 = 0 \text{ oder:}$$

$$16r^3 + 168r^2 + 18r + 1 = 0.$$

Aus $r = -\left({}^{168}/_{16} + \frac{18}{16r} + \frac{1}{16r^2}\right)$ folgt $r > -10$.

Setze $r = -10\frac{s}{s+1}$, so wird:

$$-16.\left(10\frac{s}{s+1}\right)^3 + 168\left(10\frac{s}{s+1}\right)^2 - 18\left(10\frac{s}{s+1}\right) + 1 = 0 \text{ oder:}$$

$$621s^3 + 16443s^2 - 177s + 1 = 0.$$

Hieraus folgt, daß $s > -{}^{16443}/_{621} > -26$. Setze

$$s = -27\frac{u}{u+1}, \text{ so wird:}$$

$$-621.\left(27\frac{u}{u+1}\right)^3 + 16443\left(27\frac{u}{u+1}\right)^2 + 177\left(27\frac{u}{u+1}\right) + 1 = 0$$

oder: $231416u^3 - 11996508u^2 - 4782u - 1 = 0$.

Da $u > {}^{119965008}/_{231416} > 51$, so setze $u = 52\frac{v}{v+1}$, so wird:

$$231416\left(52\frac{v}{v+1}\right)^3 - 11996508\left(52\frac{v}{v+1}\right)^2 - 4782\left(52\frac{v}{v+1}\right) - 1 = 0$$

oder: $100134631v^3 - 32439044963v^2 - 248667v - 1 = 0$.

$$v = {}^{32439044968}/_{100134631} = \text{nahezu } 323.$$

Daher ist:

$$x = -1 - {}^1/_2 - {}^1/_8 A_1 + {}^1/_{10} A_2 - {}^1/_{27} A_3 - {}^1/_{52} A_4 - {}^1/_{323} A_5 \ldots$$

Nun ist:

Digitized by Google

$$
\begin{aligned}
-1 &= -1,0000000000000000000\\
-1/2 &= -0,5000000000000000000 = A_1\\
-1/3\,A_1 &= -0,1666666666666666667 = A_2\\
+1/10\,A_2 &= +0,0166666666666666667 = A_3\\
-1/27\,A_3 &= -0,0006172839506172839 = A_4\\
-1/52\,A_4 &= -0,0000118708452041785 4 = A_5\\
-1/323\,A_5 &= -0,0000003675184273739 = A_6.\\
\hline
x_1 &= -1,6672958582143308665 4 + A_8\\
&= -1,6506291915476641998 7.
\end{aligned}
$$

Um die imaginären Wurzeln zu erhalten, setze man:

$$x = -(y+z\sqrt{-1}),\ \text{so wird:}$$

$$-(y+z\sqrt{-1})^3+2(y+z\sqrt{-1})^2-3(y+z\sqrt{-1})+4=0;$$

$$\text{daher: } z^2 = 3y^2-4y+3 \text{ und}$$

$$4y^3-8y^2+7y-1=0.$$

Für $y=0$ wird $N=-1$; für $y=1$ wird $N=+2$.

Der Werth für y liegt zwischen 0 und 1. Es sei $y=\frac{1}{r}$, so erhalten wir:

$$r^3-7r^2+8r-4=0.\quad r=7\frac{s}{s+1}$$

$$\left(7\frac{s}{s+1}\right)^3-7\left(7\frac{s}{s+1}\right)^2+8\left(7\frac{s}{s+1}\right)-4=0;\ \text{daher:}$$

$$52s^3-243s^2+44s-4=0.\quad s=5\frac{t}{t+1}$$

$$52\left(5\frac{t}{t+1}\right)^3-243.\left(5\frac{t}{t+1}\right)^2+44\left(5\frac{t}{t+1}\right)-4=0$$

$$641t^3-5647t^2+208t-4=0.\quad t=9\frac{u}{u+1}$$

$$641\left(9\frac{u}{u+1}\right)^3-5647.\left(9\frac{u}{u+1}\right)^2+208\left(9\frac{u}{u+1}\right)-4=0$$

$$11750u^3-453675u^2+1860u-4=0.\quad u=39\frac{v}{v+1}$$

$$11750\left(39\frac{v}{v+1}\right)^3-453675.\left(39\frac{v}{v+1}\right)^2+1860\left(39\frac{v}{v+1}\right)-4=0$$

$$7031111v^3-689894607v^2+72528v-4=0.\quad v=98.$$

Daher ist:

$y = 1/7+1/5A_1+1/9A_2+1/39A_3+1/98A_4$. Nun ist:

$$
\begin{aligned}
1/7 &= 0,142857142857 = A_1\\
1/5A_1 &= 0,028571428571 = A_2\\
1/9A_2 &= 0,003174603175 = A_3\\
1/39A_3 &= 0,000081400081 = A_4\\
1/98A_4 &= 0,000000830613 = A_5
\end{aligned}
$$

Digitized by Google

$y = 0{,}174685405$; daher:

$z^2 = 3(y^2+1) - 4y = 2{,}39280335216004 2075$

$z = \pm 1{,}5468688875$; mithin:

x_2 und $x_3 = -0{,}174685405 \pm 1{,}5468688875\sqrt{-1}$.

7. Für $x = 1$ wird $N = -5$; für $x = 2$ wird $N = +8$.

Man setze $x = 1 + \frac{1}{y}$, so wird:

$$\left(1+\frac{1}{y}\right)^4 - 2\left(1+\frac{1}{y}\right)^2 + 4\left(1+\frac{1}{y}\right) - 8 = 0$$

$$5y^4 - 4y^3 - 4y^2 - 4y - 1 = 0.$$

Für $y = 1$ wird $N = -8$; für $y = 2$ wird $N = +23$.

Setze $y = 2\frac{z}{z+1}$, so wird:

$$5\left(2\frac{z}{z+1}\right)^4 - 4\left(2\frac{z}{z+1}\right)^3 - 4\left(2\frac{z}{z+1}\right)^2 - 4\left(2\frac{z}{z+1}\right) - 1 = 0$$

$$23z^4 - 92z^3 - 46z^2 - 12z - 1 = 0.$$

Für $z = 3$ wird $N = -1144$; für $z = 4$ wird $N = -785$;

„ $z = 5$ „ $N = +1664$. Setze $z = 4\frac{r}{r+1}$, so wird:

$$23\left(4\frac{r}{r+1}\right)^4 - 92\left(4\frac{r}{r+1}\right)^3 - 46\left(4\frac{r}{r+1}\right)^2 - 12\left(4\frac{r}{r+1}\right) - 1 = 0$$

$$785r^4 + 7508r^3 + 886r^2 + 52r + 1 = 0.$$

Aus $r = -\left({}^{7508}/_{785} + \frac{886}{785r} + \frac{52}{785r^2} + \frac{1}{785r^3}\right)$ folgt:

$$r > -{}^{7508}/_{785} > -9.$$

Man setze $r = -10\frac{s}{s+1}$, so wird:

$$+785.\left(10\frac{s}{s+1}\right)^4 - 7508\left(10\frac{s}{s+1}\right)^3 + 886\left(10\frac{s}{s+1}\right)^2 - 52\left(10\frac{s}{s+1}\right) + 1 = 0$$

$$430081s^4 - 7332356s^3 + 87046s^2 - 516s = 0 \text{ oder:}$$

$$430081s^3 - 7332356s^2 + 87046s - 516 = 0.$$

Aus $s = {}^{7332356}/_{430081} + \ldots$ folgt, daß $s > 17$.

Setze $s = 17\frac{u}{u+1}$, so ist:

$$430081\left(17\frac{u}{u+1}\right)^3 - 7332356\left(17\frac{u}{u+1}\right)^2 + 87046\left(17\frac{u}{u+1}\right) - 516 = 0$$

Digitized by Google

$4583665u^3+2116092868u^2-1478234u+516=0$ oder:
$4583665u^3+2116092868u-1478234=0.$
Der Werth für $u=-{}^{2116092868}/_{4583665}=$ nahezu $-462.$
Setze $u=-462\frac{v}{v+1}$, so wird:
$719409010v^3-977637861484v-1478234=0.$
Hieraus folgt $v=1357.$ Daher ist:
$x=1+{}^1/_2+{}^1/_4A_1-{}^1/_{10}A_2-{}^1/_{17}A_3+{}^1/_{462}A_4+{}^1/_{1357}A_5\ldots$
Nun ist:

$+1 = +1{,}000000000000000$
$+{}^1/_2 = +0{,}500000000000000 = A_1$
$+{}^1/_4A_1 = +0{,}125000000000000 = A_2$
$-{}^1/_{10}A_2 = -0{,}012500000000000 = A_3$
$-{}^1/_{17}A_3 = -0{,}000735294117647 = A_4$
$+{}^1/_{462}A_4 = +0{,}000001591545709 = A_5$
$+{}^1/_{1357}A_5 = +0{,}000000001172841 = A_6$

$x=1{,}625001592718550-0{,}013235294117647$
$=1{,}611766298600903.$

8. Für $x=1$ wird $N=-6$; für $x=2$ wird $N=-1$;
„ $x=3$ „ $N=+16.$ Setze $x=2+\frac{1}{y}$, so ist:
$$\left(2+\frac{1}{y}\right)^3-2\left(2+\frac{1}{y}\right)-5=0 \text{ oder:}$$
$$y^3-10y^2-6y-1=0.$$
Aus $y=10+\frac{6}{y}+\frac{1}{y^2}$ folgt $y>10.$ Setze $y=11\frac{z}{z+1}$
$$\left(11\frac{z}{z+1}\right)^3-10\left(11\frac{z}{z+1}\right)^2-6\left(11\frac{z}{z+1}\right)-1=0$$
$$54z^3-1345z^2-69z-1=0.$$
Aus $z={}^{1345}/_{54}+\frac{69}{54z}+\frac{1}{54z^2}$ folgt $z>24.$ Setze $z=25\frac{r}{r+1}$
$$54\left(25\frac{r}{r+1}\right)^3-1345\left(25\frac{r}{r+1}\right)^2-69\left(25\frac{r}{r+1}\right)-1=0$$
$$1399r^3-844048r^2-1728r-1=0.$$
Aus $r={}^{844048}/_{1399}+\frac{1728}{1399r}+\frac{1}{1399r^2}$ folgt $r>603.$ Setze
$r=604\frac{s}{s+1}$, so wird:
$$1399\left(604\frac{s}{s+1}\right)^3-844048\left(604\frac{s}{s+1}\right)^2-1728\left(604\frac{s}{s+1}\right)-1=0$$
$$333857375s^3-307935247075s^2-1043715s-1=0.$$

Digitized by Google

Statt dieser Gleichung können wir auch setzen:

$$333857375s^2 - 307935247075s - 1043715 = 0.$$

Setzt man hierin $s = 923\frac{u}{u+1}$, so wird:

$$198545532435u^2 - 284224235137655u - 1043715 = 0.$$

Setze $u = 1432$ u. s. w., so ist:

$$x = 2 + {}^1/_{11} + {}^1/_{25}A_1 + {}^1/_{604}A_2 + {}^1/_{923}A_3 + {}^1/_{1432}A_4 + \ldots.$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} 2 &= 2{,}0000000000000000000 \\ {}^1/_{11} &= 0{,}0909090909090909090 = A_1 \\ {}^1/_{25}A_1 &= 0{,}0036063636363636363636 = A_2 \\ {}^1/_{604}A_2 &= 0{,}0000602046959662854 = A_3 \\ {}^1/_{923}A_3 &= 0{,}0000000652271895626 = A_4 \\ {}^1/_{1432}A_4 &= 0{,}0000000000455497134 = A_5 \end{aligned}$$

$$x = 2{,}094551481544232510159.$$

Egen berechnet in seinem „Handbuch der allgemeinen Arithmetik" II. Band S. 397 dies Beispiel mittelst der Newtonschen Näherungsmethode und findet:

$$x = 2{,}094551481542326591482386540579 30.$$

Um die imaginären Wurzeln zu erhalten, setze man:

$$x = -(y + z\sqrt{-1}), \text{ so wird:}$$

$$-(y+z\sqrt{-1})^3 + 2(y+z\sqrt{-1}) - 5 = 0.$$

Hieraus erhalten wir $z^2 = 3y^2 - 2$ und

$$8y^3 - 4y - 5 = 0.$$

Für $y = 1$ wird $N = -1$; für $y = 2$ wird $N = +51$.

Setze $y = 1 + \frac{1}{r}$, so erhalten wir:

$$8\left(1+\frac{1}{r}\right)^3 - 4\left(1+\frac{1}{r}\right) - 5 = 0 \text{ oder:}$$

$r^3 - 20r^2 - 24r - 8 = 0$. Setze $r = 22\frac{s}{s+1}$, so wird:

$$\left(22\frac{s}{s+1}\right)^3 - 20\left(22\frac{s}{s+1}\right)^2 - 24\left(22\frac{s}{s+1}\right) - 8 = 0 \text{ oder:}$$

$$54s^3 - 1345s^2 - 69s - 1 = 0.$$

Bei der Berechnung der reellen Wurzel fanden wir dieselbe Gleichung in z, daher ist:

$$y = 1 + {}^1/_{22} + {}^1/_{25}A_1 + {}^1/_{604}A_2 + {}^1/_{923}A_3 + {}^1/_{1432}A_4 \ldots.$$

Nun ist:

Digitized by Google

$$
\begin{array}{rl}
1 & = 1{,}000000000000000000 \\
{}^1/_{22} & = 0{,}045454545454545455 = A_1 \\
{}^1/_{25}A_1 & = 0{,}001818181818181818 = A_2 \\
{}^1/_{604}A_2 & = 0{,}000030102347983142 6 = A_3 \\
{}^1/_{923}A_3 & = 0{,}000000032613627284 0 = A_4 \\
{}^1/_{1452}A_4 & = 0{,}000000000022774879 3 = A_5
\end{array}
$$

$y = 1{,}047275740771165 80332$; daher:

$z^2 = 3y^2 - 2 = 1{,}290359431623345 7597344632368$

$z = \pm 1{,}135939889088 9.$

Mithin ist:

x_2 und $x_3 = -1{,}047275740771165 \pm 1{,}135939889088 9\sqrt{-1}.$

9. Setzt man $x = y + z\sqrt{-1}$, so erhält man:
$(y+z\sqrt{-1})^4 - (y+z\sqrt{-1}) + 1 = 0$. Diese Gl. gibt entwickelt:
$y^4 + z^4 - 6y^2z^2 + 4yz(y^2 - z^2)\sqrt{-1} - y - z\sqrt{-1} + 1 = 0.$
Hieraus erhalten wir die beiden Gleichungen:

(1) $y^4 + z^4 - 6y^2z^2 - y + 1 = 0.$

(2) $4y(y^2 - z^2) - 1 = 0.$

Aus Gl. (2) folgt $z^2 = y^2 - \frac{1}{4y}$. Substituiren wir den Werth für z^2 in (1), so ist:

$$y^4 + \left(y^2 - \frac{1}{4y}\right)^2 - 6y^2\left(y^2 - \frac{1}{4y}\right) - y + 1 = 0 \text{ oder:}$$

(3) $64y^6 - 16y^2 - 1 = 0.$

Um diese Gleichung vermittelst der Theilbruchreihen aufzulösen, setze man $y^2 = \frac{1}{r}$ in (3), so wird:

(4) $64\frac{1}{r^3} - 16\frac{1}{r} - 1 = 0$ oder:

(5) $r^3 + 16r^2 - 64 = 0.$

Für $r = 1$ wird $N = -47$; für $r = 2$ wird $N = +8$.

Setze $r = 1 + \frac{1}{s}$, so wird:

$$\left(1+\frac{1}{s}\right)^3 + 16\left(1+\frac{1}{s}\right)^2 - 64 = 0 \text{ oder:}$$

$47s^3 - 35s^2 - 19s - 1 = 0.$

Für $s = 1$ wird $N = -9$; für $s = 2$ wird $N = +197$.

Setze $s = 2\frac{t}{t+1}$, so wird:

$$47\left(2\frac{t}{t+1}\right)^3 - 35\left(2\frac{t}{t+1}\right)^2 - 19\left(2\frac{t}{t+1}\right) - 1 = 0$$

$197t^3 - 219t^2 - 41t - 1 = 0.$

Digitized by Google

Aus $t = {}^{219}/_{197} + \frac{41}{197t} + \frac{1}{197t^2}$ folgt $t > {}^{219}/_{197} > 1$. Setze

$t = 2\frac{u}{u+1}$, so wird:

$$197\left(2\frac{u}{u+1}\right)^3 - 219\left(2\frac{u}{u+1}\right)^2 - 41\left(\frac{u}{u+1}\right) - 1 = 0 \text{ oder:}$$

$$617u^3 - 1043u^2 - 85u - 1 = 0.$$

Aus $u = {}^{1043}/_{617} + \frac{85}{617u} + \frac{1}{617u^2}$ folgt $u > {}^{1043}/_{617} > 1$.

Setze $u = 2\frac{v}{v+1}$, so wird:

$$617\left(2\frac{v}{v+1}\right)^3 - 1043\left(2\frac{v}{v+1}\right)^2 - 85\left(2\frac{v}{v+1}\right) - 1 = 0 \text{ oder:}$$

$$593v^3 - 4515v^2 - 173v - 1 = 0.$$

Aus $v = {}^{4515}/_{593} + \frac{173}{593v} + \frac{1}{593v^2}$ folgt $v > {}^{4515}/_{593} > 7$.

Setze $v = 8\frac{w}{w+1}$, so wird:

$$593\left(8\frac{w}{w+1}\right)^3 - 4515\left(8\frac{w}{w+1}\right)^2 - 173\left(8\frac{w}{w+1}\right) - 1 = 0 \text{ oder:}$$

$$13271w^3 - 291731w^2 - 1387w - 1 = 0.$$

Aus $w = {}^{291731}/_{13271} + \frac{1387}{13271w} + \frac{1}{13271w^2}$ folgt:

$w > {}^{291731}/_{13271} > 21$. Setze $w = 22\frac{w_1}{w_1+1}$, so wird:

$$13271\left(22\frac{w_1}{w_1+1}\right)^3 - 291731\left(22\frac{w_1}{w_1+1}\right)^2 - 1387\left(22\frac{w_1}{w_1+1}\right) - 1 = 0$$

oder $81289w_1^3 - 141258835w_1^2 - 30517w_1 - 1 = 0$.

Setzen wir schließlich $w_1 = 1738$, so ist:

$$r = 1 + {}^1/_2 + {}^1/_2A_1 + {}^1/_2A_2 + {}^1/_8A_3 + {}^1/_{22}A_4 + {}^1/_{1738}A_5$$
$$= 1 + 0{,}5 + 0{,}25 + 0{,}125 + 0{,}015625 + 0{,}0007102273 + 0{,}0000004086$$
$$= 1{,}8913356359; \text{ daher:}$$

$$y^2 = \frac{1}{r} = 1 : 1{,}8913356359 = 0{,}52872688539183;$$

$y = \pm 0{,}72713608$; also $1 : 4y = 1 : 2{,}90854432 = 0{,}3438145993$.

Daher $z^2 = 0{,}72713608^2 \mp 0{,}3438145993$; also:

$z_1^2 = 0{,}1849122795377664$; $z_1 = \pm 0{,}4300142782$;

$z_2^2 = 0{,}8725414781377664$; $z_2 = \pm 0{,}9340992871$.

Digitized by Google

Da nun $x = y \pm z\sqrt{-1}$ ist, so ist;
x_1 und $x_2 = 0{,}72713608 \pm 0{,}4300142782\sqrt{-1}$;
x_3 und $x_4 = -0{,}72713608 \pm 0{,}9340992871\sqrt{-1}$.

5. Auflösung der Gleichungen nach der Gräffe'schen Methode.

(Heis §. 103.)

§. 512. Eine fernere Methode, Gleichungen von höhern Graden aufzulösen, besteht nach Gräffe in der Bildung der Gleichungen der Wurzelquadrate.

Soll die Gleichung:

$$(1)\quad x^2 - ax + b = 0$$

in eine andere umgewandelt werden, deren Wurzeln die Quadrate der Stammgleichung sind, so setze man $\sqrt{x}$ statt x und wir erhalten die Gleichung:

$$(2)\quad x - a\sqrt{x} + b = 0.$$

Bringen wir die rationalen Größen dieser Gl. auf die eine und die irrationalen auf die andere Seite der Gleichung, so haben wir:

$$(3)\quad x + b = a\sqrt{x}.$$

Erheben wir diese Gl. ins Quadrat und ordnen sie, so entsteht die verlangte transformirte Gleichung:

$$(4)\quad x^2 - (a^2 - 2b)x + b^2 = 0,$$

deren Wurzeln die Quadrate der Gl. (1) sind.

Verfährt man ebenso mit der numerischen Gleichung, so wird:

$$x - 7\sqrt{x} + 12 = 0 \text{ oder } x + 12 = 7\sqrt{x}.$$

Diese Gl. ins Quadrat erhoben und geordnet, gibt:
$x^2 - (49 - 24)x + 144 = 0$ oder $x^2 - 25x + 144 = 0$.

Die Wurzeln dieser Gl. sind 3^2 und 4^2, während die Wurzeln der Stammgleichung 3 und 4 sind.

2. Setzt man hier $\sqrt{x}$ statt x, so wird:
$x\sqrt{x} - ax + b\sqrt{x} - c = 0$; hieraus:
$\sqrt{x}(x + b) = ax + c$.
Erhebe diese Gl. ins Quadrat und ordne sie, so entsteht die transformirte Gl.:
$x^3 - (a^2 - 2b)x^2 + (b^2 - 2ac)x - c^2 = 0$.

3. α) Um die gegebene Gl., deren Wurzeln 3, 4, 5 sind, in eine andere zu verwandeln, worin die Wurzeln 3^2, 4^2, 5^2 sind, setze man in die unter Nr. 2 gefundene transformirte Gl. für $a = 12$, $b = 47$, $c = 60$ und wir erhalten:

Digitized by Google

(1) $\begin{cases} x^3-(12^2-2.47)x^2+(47^2-2.12.60)x-60^2=0 \text{ oder:} \\ x^3-50x^2+769x-3600=0. \end{cases}$

Um diese Gl. in eine solche zu verwandeln, deren Wurzeln die vierten Potenzen der Stammgleichung sind, betrachte man (1) als Stammgleichung und setze $a=50$, $b=769$ und $c=3600$; alsdann erhalten wir:

(2) $\begin{cases} x^3-(50^2-2.769)x^2+(769^2-2.50.3600)x-3600^2=0 \\ x^3-962x^2+231361x-12960000=0. \end{cases}$

3. β) Um hier die verlangte Gleichung zu erhalten, setze man $a=2$, $b=-23$, $c=60$, so wird:

(1) $\begin{cases} x^3-(2^2+2.23)x^2+(23^2+2.2.60)x-60^2=0 \text{ oder:} \\ x^3-50x^2+769x-3600=0. \end{cases}$

Setzt man jetzt $a=50$, $b=769$ und $c=3600$, so wird:

(2) $\begin{cases} x^3-(50^2-2.769)x^2+(769^2-2.50.3600)x-3600^2=0 \\ x^3-962x^2+231361x-12960000=0. \end{cases}$

Wird endlich $a=962$, $b=231361$ und $c=12960000$ gesetzt, so erhalten wir eine Gl., deren Wurzeln die achten Potenzen der Stammgleichung sind, also:

(3) $\begin{cases} x^3-(962^2-2.231361)x^2+(231361^2-2.962.12960000)x \\ \qquad -12960000^2=0 \\ x^3-462722x^2+28592872321x-167961600000000=0. \end{cases}$

3. γ) Die transformirten Gleichungen sind:

(1) $\begin{cases} x^3-(2^2+2.23)x^2+(23^2+2.2.60)x-60^2=0 \\ x^3-50x^2+769x-3600=0. \end{cases}$

Jetzt entstehen bei fortgesetzter Quadrirung dieselben transformirten Gleichungen wie bei 3. β).

4. Um aus der Gleichung:

$$x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+Cx^{n-3}+Dx^{n-4}+Ex^{n-5}+Fx^{n-6}+Gx^{n-7}+\ldots=0$$

eine andere Gl. abzuleiten, deren Wurzeln die Quadrate der gegebenen Gl. sind, setze man $x^{1/2}$ statt x und es entsteht alsdann folgende Gl.

$$x^{1/2n}+Ax^{1/2(n-1)}+Bx^{1/2(n-2)}+Cx^{1/2(n-3)}+Dx^{1/2(n-4)}+Ex^{1/2(n-5)}+Fx^{1/2(n-6)}+Gx^{1/2(n-7)}+\ldots=0.$$

Um diese Gl. rational zu machen, setzen wir die rationalen Größen auf eine und die irrationalen auf die andere Seite des Gleichheitszeichens und es wird:

$$x^{1/2n}+Bx^{1/2(n-2)}+Dx^{1/2(n-4)}+Fx^{1/2(n-6)}+\ldots=-(Ax^{1/2(n-1)}+Cx^{1/2(n-3)}+Ex^{1/2(n-5)}+Gx^{1/2(n-7)}+\ldots)$$

Erhebt man beide Seiten dieser Gleichung ins Quadrat und bringt alle Glieder geordnet wieder auf eine Seite des Gleichheitszeichens, so hat man:

Digitized by Google

$$x^n-(A^2-2B)x^{n-1}+(B^2-2AC+2D)x^{n-2}-(C^2-2BD+2AE-2F)x^{n-3}+(D^2-2CE+2BF-2AG+2H)x^{n-4}-(E^2-2DF+2CG-2BH+2AI-2K)x^{n-5}\ldots=0.$$

Der Coefficient einer Potenz von x in der neuen Gleichung wird daher gebildet durch die Verbindung des Quadrates des Coefficienten derselben Potenz von x in der Stammgleichung mit den doppelten Produkten je zweier gleich weit zu beiden Seiten von ihm abstehenden Coefficienten, die letztern regelmäßig mit abwechselnden Zeichen genommen. Hiernach erhält man aus den Gleichungen:

(1) $x^3+Ax^2+Bx+C=0$
(2) $x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D=0$
(3) $x^5+Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E=0$
(4) $x^6+Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex+F=0$
(5) $x^7+Ax^6+Bx^5+Cx^4+Dx^3+Ex^2+Fx+G=0$

die transformirten Gleichungen:

(1) $x^3-(A^2-2B)x^2+(B^2-2AC)x-C^2=0$
(2) $x^4-(A^2-2B)x^3+(B^2-2AC+2D)x^2-(C^2-2BD)x+D^2=0$
(3) $x^5-(A^2-2B)x^4+(B^2-2AC+2D)x^3-(C^2-2BD+2AE)x^2+(D^2-2CE)x-E^2=0$
(4) $x^6-(A^2-2B)x^5+(B^2-2AC+2D)x^4-(C^2-2BD+2AE-2F)x^3+(D^2-2CE+2BF)x^2-(E^2-2DF)x+F^2=0$
(5) $x^7-(A^2-2B)x^6+(B^2-2AC+2D)x^5-(C^2-2BD+2AE-2F)x^4+(D^2-2CE+2BF-2AG)x^3-(E^2-2DF+2CG)x^2+(F^2-2EG)x-G^2=0.$

5. Hat die Gleichung:

(1) $x^n-Ax^{n-1}+Bx^{n-2}-Cx^{n-3}+\ldots=0$

die n Wurzeln $\alpha, \beta, \gamma, \delta\ldots$, so ist nach §. 481

(2) $x^n-Ax^{n-1}+Bx^{n-2}-Cx^{n-3}+\ldots=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\ldots=0.$

Leitet man nun aus Gl. (1) eine andere ab, nämlich:

(3) $x^n-A'x^{n-1}+B'x^{n-2}-C'x^{n-3}+\ldots=0,$

deren Wurzeln die m^{ten} Potenzen der Stammgleichung sind, so ist:

(4) $x^n-A'x^{n-1}+B'x^{n-2}-C'x^{n-3}\ldots=(x-\alpha^m)(x-\beta^m)(x-\gamma^m)(x-\delta^m)\ldots=0.$

Entwickelt man die rechte Seite, so erhalten wir:

$$x^n-(\alpha^m+\beta^m+\gamma^m+\delta^m+\ldots)x^{n-1}+(\alpha^m\beta^m+\alpha^m\gamma^m+\alpha^m\delta^m+\ldots+\gamma^m\delta^m+\ldots)x^{n-2}-(\alpha^m\beta^m\gamma^m+\alpha^m\beta^m\delta^m+\alpha^m\gamma^m\delta^m+\ldots)x^{n-3}+\ldots\ldots\pm\alpha^m\beta^m\gamma^m\delta^m\ldots=0 \text{ oder:}$$

$$x^n-[\alpha^m]x^{n-1}+[\alpha^m\beta^m]x^{n-2}-[\alpha^m\beta^m\gamma^m]x^{n-3}+[\alpha^m\beta^m\gamma^m\delta^m]x^{n-4}-\ldots\ldots=0 \text{ nach §. 471. 2.}$$

Digitized by Google

Hiernach muß also:
$A' = [\alpha^m]$, $B' = [\alpha^m \beta^m]$, $C' = [\alpha^m \beta^m \gamma^m ..]$, $D' = [\alpha^m \beta^m \gamma^m \delta^m ..]$
u. s. w. sein.

6. Wenn nun $\alpha > \beta > \gamma > \delta \ldots$ und m eine sehr große Zahl ist, so wird α^m über β^m, β^m über γ^m, γ^m über $\delta^m \ldots$, ebenso $\alpha^m \beta^m$ über $\alpha^m \gamma^m + \alpha^m \delta^m \ldots$, ferner $\alpha^m \beta^m \gamma^m$ über $\alpha^m \beta^m \delta^m + \alpha^m \gamma^m \delta^m$ u. s. w. einen überwiegenden Einfluß haben, so daß, wenn wir die Coefficienten numerisch berechnen, die Vernachlässigung von β^m gegen α^m u. s. w. auf die ersten s Ziffern derselben bei hinreichender Anzahl von solchen Operationen keinen Einfluß mehr haben kann. Wir sind daher berechtigt, ohne merklichen Fehler:
$[\alpha^m] = \alpha^m$, $[\alpha^m \beta^m] = \alpha^m \beta^m$, $[\alpha^m \beta^m \gamma^m] = \alpha^m \beta^m \gamma^m$
u. s. w. zu setzen.

7. Daher wird man endlich, wenn alle Wurzeln reell und von verschiedener Größe sind, bei fortwährend wachsendem m folgende Gleichung erhalten:
$x^n - \alpha^m x^{n-1} + \alpha^m \beta^m x^{n-2} - \alpha^m \beta^m \gamma^m x^{n-3} + \alpha^m \beta^m \gamma^m \delta^m x^{n-4} - \ldots = 0.$

8. Wenn also die transformirte Gleichung:
$x^n - A' x^{n-1} + B' x^{n-2} - C' x^{n-3} + D' x^{n-4} - \ldots = 0$
die Form von Nr. 7 hat, so ist:

$$\alpha^m = A'; \qquad \text{also } \alpha = \sqrt[m]{A'}$$

$$\alpha^m \beta^m = B'; \qquad " \quad \beta = \sqrt[m]{B' : \alpha^m} = \sqrt[m]{B' : A'}$$

$$\alpha^m \beta^m \gamma^m = C'; \qquad " \quad \gamma = \sqrt[m]{C' : \alpha^m \beta^m} = \sqrt[m]{C' : B'}$$

$$\alpha^m \beta^m \gamma^m \delta^m = D'; \quad " \quad \delta = \sqrt[m]{D' : \alpha^m \beta^m \gamma^m} = \sqrt[m]{D' : C'}.$$

Hieraus folgt, daß, wenn man aus jedem Coefficienten die m^{te} Wurzel zieht und jeden nachfolgenden durch den zunächst vorhergehenden dividirt, man die absoluten Zahlwerthe der Wurzeln der vorgelegten Gleichung erhält.

Drücken wir die Wurzelwerthe logarithmisch aus, so ist:

$$\log \alpha = \log \sqrt[m]{A'} = \frac{1}{m} \log A'$$

$$\log \beta = \log \sqrt[m]{B' : A'} = \frac{1}{m} (\log B' - \log A')$$

$$\log \gamma = \log \sqrt[m]{C' : B'} = \frac{1}{m} (\log C' - \log B')$$

$$\log \delta = \log \sqrt[m]{D' : C'} = \frac{1}{m} (\log D' - \log C') \text{ u. s. w.}$$

Digitized by Google

9. Bei den fortgesetzten Quadrirungen der Wurzeln werden die Coefficienten jeder folgenden Gleichung sich immer mehr den Quadraten der Coefficienten der nächstvorhergehenden Gleichung nähern und endlich quadratisch wachsen, oder was dasselbe ist, die Logarithmen der Coefficienten werden sich verdoppeln. Wenn dies der Fall ist, so ist der Grad der Potenz für die Wurzel der Stammgleichung groß genug und es bedarf alsdann keiner weitern Quadrirung mehr. Entsteht also aus der in Nr. 7 erhaltenen Gleichung durch Quadriren die folgende Gleichung:

$$x^n - [\alpha^{2m}]x^{n-1} + [\alpha^{2m}\beta^{2m}]x^{n-2} - [\alpha^{2m}\beta^{2m}\gamma^{2m}]x^{n-3} + \ldots = 0,$$

so ist $[\alpha^{2m}] = (\alpha^m)^2$; $[\alpha^{2m}\beta^{2m}] = (\alpha^m\beta^m)^2$; $[\alpha^{2m}\beta^{2m}\gamma^{2m}] = (\alpha^m\beta^m\gamma^m)^2$ oder logarithmisch ausgedrückt:

$\log(\alpha^m)^2 = 2\log(\alpha^m)$;
$\log(\alpha^m\beta^m)^2 = 2\log(\alpha^m\beta^m)$;
$\log(\alpha^m\beta^m\gamma^m)^2 = 2\log(\alpha^m\beta^m\gamma^m)$ u. s. w.

10. Aus der hier vorgelegten Gleichung erhält man durch successives Quadriren eine Reihe anderer Gleichungen, in welchen die Wurzeln zur zweiten, vierten, achten, sechszehnten, zweiunddreißigsten und vierundsechszigsten Potenz erhoben sind.

1. Potenz: $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

2. Pot. $\begin{cases} x^3 - (6^2 - 2.11)x^2 + (11^2 - 2.6.6)x - 6^2 = 0 \\ x^3 - 14x^2 + 49x - 36 = 0 \end{cases}$

4. Pot. $\begin{cases} x^3 - (14^2 - 2.49)x^2 + (49^2 - 2.14.36)x - 36^2 = 0 \\ x^3 - 98x^2 + 1393x - 1296 = 0 \end{cases}$

8. Pot. $\begin{cases} x^3 - (98^2 - 2.1393)x + (1393^2 - 2.98.1296)x - 1296^2 = 0 \\ x^3 - 6818x^2 + 1686433x - 1679616 = 0 \end{cases}$

16. Pot. $\begin{cases} x^3 - (6818^2 - 2.1686433)x^2 + (1686433^2 - 2.6818.1296^2)x - 1679616^2 = 0 \\ x^3 - 43112258x^2 + 2821153019713x - 2821109907456 = 0 \end{cases}$

32. Pot. $\begin{cases} x^3 - (43112258^2 - 2.2821153019713)x^2 + (2821153019713^2 - 2.43112258.1679616^2)x - 2821109907456^2 = 0. \\ x^3 - 185302448_7x^2 + 795866111_{16}x - 795866110_{16} = 0 \text{ *)} \end{cases}$

64. Pot. $\begin{cases} x^3 - (185302448_7^2 - 2.795866111_{16})x^2 + (795866111_{16}^2 - 2.185302448_7.795866110_{16})x - 795866110_{16}^2 = 0 \\ x^3 - 343369973_{22}x^2 + 633402866_{41}x - 633402846_{41} = 0. \end{cases}$

*) Die unten angehängten Zahlen zeigen die ausgelassenen Stellen an.

Digitized by Google

Drückt man die Coefficienten der letzten Gleichung durch ihre Logarithmen aus, so erhält man:

$x^3 - 30{,}5357622x^2 + 49{,}8016800x - 49{,}8016800 = 0.$

Von jetzt an wachsen bei folgenden Quadrirungen der Wurzeln alle Coefficienten quadratisch und es hat daher die letzte Gleichung die Form von Nr. 7 und demnach ist nach Nr. 8:

$\log\alpha = 30{,}5357622 : 64 = 0{,}4771213 = \log 3$
$\log\beta = (49{,}8016800 - 30{,}5357622) : 64 = 0{,}3010299 = \log 2$
$\log\gamma = (49{,}8016800 - 49{,}8016800) : 64 = 0{,}0000000 = \log 1.$

Da die gegebene Gleichung nur Zeichenwechsel hat, so ist:

$$\alpha = +3,\ \beta = +2,\ \gamma = +1.$$

11. 1. Potenz: $x^3 + 2x^2 - 30x + 39 = 0$
2. „ $x^3 - 64x^2 + 744x - 1521 = 0$
4. „ $x^3 - 2608x^2 + 358848x - 2313441 = 0$
8. „ $x^3 - 6083968x^2 + 116704978848x - 5352009260481 = 0$
16. „ $x^3 - 367812566_5x^2 + 135549290_{14}x - 286440126_{17} = 0.$
32. „ $x^3 - 135283189_{19}x^2 + 183734274_{36}x - 820479461_{42} = 0$

oder, wenn wir in der letzten Gleichung die Logarithmen der Coefficienten setzen, so ist die 32 Potenz:

$x^3 - 27{,}1312434x^2 + 44{,}2641900x - 50{,}9140677 = 0.$

Von jetzt an wachsen bei fortgesetzter Quadrirung die Coefficienten quadratisch und es ist daher nach Nr. 8:

$\log\alpha = 27{,}1312434 : 32 = 0{,}8478514 = \log 7{,}044520$
$\log\beta = {}^1/_{32}(44{,}2641900 - 27{,}1312434) = 0{,}5354045 = \log 3{,}430872$
$\log\gamma = {}^1/_{32}(50{,}9140677 - 44{,}2641900) = 0{,}2078087 = \log 1{,}613648.$

Die vorgelegte Gl. hat eine Zeichenfolge und zwei Zeichenwechsel, daher ist eine Wurzel negativ und zwei positiv. Weil nun das zweite Glied positiv ist und sein Coefficient 2 beträgt, so muß die größere der drei Wurzeln negativ sein; mithin ist:

$\alpha = -7{,}044520;\ \beta = +3{,}430872;\ \gamma = +1{,}613648.$

12. 2. Potenz: $x^3 - 14{,}583592x^2 + 9{,}170289x - 0{,}583592 = 0$
4. „ $x^3 - 194{,}34x^2 + 67{,}072x - 0{,}340579 = 0$
8. „ $x^3 - 37634x^2 + 4366{,}277x - 0{,}115994 = 0$
16. „ $x^3 - 1416309223x^2 + 19055644x - 0{,}013455 = 0$
32. „ $x^3 - 20059318_{11}x^2 + 36311756_7x - 0{,}000181037 = 0$ oder:

$x^3 - 18{,}3023160x^2 + 14{,}5600262x - 4{,}2577674 = 0.$

Digitized by Google

Daher ist:

$\log\alpha = 18{,}3023160 : 32 = 0{,}5719474$

$\log\beta = (14{,}5600262 - 18{,}3023160) : 32 = -0{,}1169465 = \bar{1}{,}8830535$

$\log\gamma = (\bar{4}{,}2577674 - 14{,}5600262) : 32 = -0{,}5719456 = \bar{1}{,}4280544.$

Also $\alpha = \text{num log } 0{,}5719474 = -3{,}7320498$

$\beta = \text{num log } \bar{1}{,}8830535 = +0{,}7639291$

$\gamma = \text{num log } \bar{1}{,}4280544 = -0{,}2679504.$

13. Hier ist $A = 14$, $B = 59$, $C = 94$, $D = 48$, daher sind nach Nr. 4. (2) die Coefficienten für die zweite Potenz:

$A^2 = 196$; $2B = 118$; $A^2 - 2B = 78$

$B^2 = 3481$; $2AC = 2632$; $2D = 96$; $B^2 - AC + 2D = 945$

$C^2 = 8836$; $2BD = 5664$; $C^2 - 2BD = 3172$.

$D^2 = 2304$.

Für die vierte Potenz ist $A = 78$, $B = 945$, $C = 3172$, $D = 2304$. Alsdann ist:

$A^2 = 6084$; $2B = 1890$; $A^2 - 2B = 4194$

$B^2 = 893025$; $2AC = 494832$; $2D = 4608$;

$B^2 - 2AC + 2D = 402801$

$C^2 = 10061584$; $2BD = 4354560$: $C^2 - 2BD = 5707024$

$D^2 = 5308416$.

Für die achte Potenz ist:

$A = 4194$; $B = 402801$; $C = 5707024$; $D = 5308416$.

$A^2 = 17589636$; $2B = 805602$; $A^2 - 2B = 16784034$

$B^2 = 162248645601$; $2AC = 47870517312$; $2D = 10616832$;

$B^2 - 2AC + 2D = 114388745121$

$C^2 = 32570122936576$; $2BD = 4276470546432$;

$C^2 - 2BD = 28293652390144$.

$D^2 = 28179280429056$.

Für die sechszehnte Potenz ist:

$A = 16784034$; $B = 114388745_9$; $C = 282936523_5$;

$D = 281792804_5$.

$A^2 = 281703797_6$; $2B = 228777_6$; $A^2 - 2B = 281475019_6$

$B^2 = 130847845_{14}$; $2AC = 9497632_{14}$;

$B^2 - 2AC + 2D = 121350213_{14}$;

2D hat keinen Einfluß mehr auf den Ausdruck.

$C^2 = 800530756_{18}$; $2BD = 6446784_{18}$; $C^2 - 2BD = 794083972_{18}$

$D^2 = 794071845_{18}$.

Für die zweiunddreißigste Potenz ist:

$A = 281475019_6$; $B = 121350213_{14}$; $C = 794083972_{18}$;

$D = 794071845_{18}$.

$A^2 = 792281860_{20}$; $2B = 242_{20}$; $A^2 - 2B = 792281618_{20}$

Log. hiervon = 28,8988796

Digitized by Google

$B^2 = 147258739_{86}$; $2AC = 447029_{86}$;
2D hat keinen Einfluß mehr auf den Ausdruck, daher:
$B^2 - 2AC + 2D = 146811710_{86}$. Log. hiervon = 44,1667606
$C^2 = 630569354_{45}$; $2BD = 19272_{45}$; $C^2 - 2BD = 630550082_{45}$.
Log. 53,7997195
$D^2 = 630550956_{45}$. Log. hiervon = 53,7997200.

Wir erhalten also für die 32. Potenz, wenn wir die Coefficienten durch ihre Logarithmen ausdrücken, folgende Gl.:

$$x^4 - 28,8988796x^3 + 44,1667606x^2 - 53,7997195x + 53,7997200 = 0.$$

Daher ist:
$\log\alpha = 28,8988796 : 32 = 0,9030900 = \log 8$
$\log\beta = (44,1667606 - 28,8988796) : 32 = 0,4771213 = \log 3$
$\log\gamma = (53,7997195 - 44,1667606) : 32 = 0,3010300 = \log 2$
$\log\delta = (53,7997200 - 53,7997195) : 32 = 0,0000000 = \log 1.$

Mithin ist: $\alpha = 8$, $\beta = 3$, $\gamma = 2$, $\delta = 1$.

14. 2. Potenz: $x^3 - 76x^2 + 1584x - 5184 = 0$
4. „ $x^3 - 2608x^2 + 1721088x - 26873856 = 0$
8. „ $x^3 - 3359488x^2 + 2821969870848x - 722204136308736 = 0$
16. „
$x^3 - 5642219880448x^2 + 795866141_{16}x - 521578813_{21} = 0$
$x^3 - 12,7514498x^2 + 24,9008400x - 29,7173200 = 0$
32. „
$x^3 - 159171921_{17}x^2 + 633402866_{41}x - 272043760_{51} = 0$
$x^3 - 25,2018664x^3 + 49,8016800x - 59,4346400 = 0$

Wenn die beiden Wurzeln α und β wiederholte Wurzeln sind, also $\alpha = \pm\beta$, so ist der zweite Coefficient α^{2m} und er wächst daher bei hinreichender Größe vom m quadratisch, woraus man erkennt, daß in Beziehung auf diese Wurzeln die Quadrirung nicht weiter fortgesetzt zu werden braucht. Der erste Coefficient ist aber in diesem Falle $\alpha^m + \beta^m = 2\alpha^m$ und es wächst die Hälfte desselben quadratisch, welches das Zeichen für gleiche Wurzeln ist. Nun ist in der 16. Potenz:
$2\alpha^{16} = 5642219880448$; $\alpha^{16} = 5642219880448 : 2$; daher:
$\log\alpha^{16} = 12,7514498 - 0,3010300 = 12,4504198.$

In der 32. Potenz ist:

$$2\alpha^{32} = 159171921_{17}; \quad \alpha^{32} = \frac{159171921_{17}}{2}; \text{ also:}$$

$$\log\alpha^{32} = 25,2018664 - 0,3010300 = 24,9008364.$$

Digitized by Google

Hieraus folgt, daß die Hälften der ersten Coefficienten in der 16. und 32. Potenz nahezu quadratisch wachsen. Da nun die zweiten und dritten Coefficienten in denselben Potenzen quadratisch wachsen, die ersten aber nicht, so schließen wir hieraus auf zwei gleiche Wurzeln und es ist also:

$\log\alpha = \log\beta = (25{,}2018664 - 0{,}3010300) : 32 = 0{,}7781512$

$\log\gamma = 59{,}4346400 - 49{,}8016800) : 32 = 0{,}3010300$

Daher ist mit Rücksicht auf das Zeichen des zweiten Gliedes der Stammgleichung:

$\alpha = \text{num log } 0{,}7781512 = +6$ und $\beta = -6$

$\gamma = \text{num log } 0{,}3010300 = +2.$

15.
2. Pot. $\left\{\begin{array}{l} x^4 - (2^2 + 2.11)x^3 + (11^2 + 2.2.6 + 2.2)x^2 - (6^2 + \\ \qquad 2.11.2)x + 2^2 = 0 \text{ oder:} \\ x^4 - 26x^3 + 149x^2 - 80x + 4 = 0 \end{array}\right.$

4. Pot. $\left\{\begin{array}{l} x^4 - (26^2 - 2.149)x^3 + (149^2 - 2.26.80 + 2.4)x^2 - \\ \qquad (80^2 - 2.149.4)x + 4^2 = 0 \text{ oder:} \\ x^4 - 378x^3 + 18049x^2 - 5208x + 16 = 0 \end{array}\right.$

8. Pot. $\left\{\begin{array}{l} x^4 - (378^2 - 2.18049)x^3 + (18049^2 - 2.378.5208 + \\ \qquad 2.16)x^2 - (5208^2 - 2.18049.16)x + 16^2 = 0 \\ x^4 - 106786x^3 + 321829185x^2 - 26545696x + 256 = 0 \end{array}\right.$

16. Pot. $\left\{\begin{array}{l} x^4 - (106786^2 - 2.321829185)x^3 + (321829185^2 - \\ \qquad 2.106786.26545696 + 2.256)x^2 - (26545696^2 - \\ \qquad 2.321829185.256)x + 256^2 = 0 \text{ oder:} \\ x^4 - 10759514_2x^3 + 1035683542_8x^2 - 704509199_6x + \\ \qquad 65536 = 0 \\ x^4 - 10{,}0317957x^3 + 17{,}0152268x^2 - 14{,}8478866x + \\ \qquad 4{,}8164800 = 0 \end{array}\right.$

Daher ist:

$\log\alpha = 10{,}0317957 : 16 = 0{,}6269872$

$\log\beta = (17{,}0152268 - 10{,}0317957) : 16 = 0{,}4364644$

$\log\gamma = (14{,}8478866 - 17{,}0152268) : 16 = \bar{1}{,}8645413$

$\log\delta = (4{,}8164800 - 14{,}8478866) : 16 = \bar{1}{,}3730371$; also:

$\alpha = \text{num log } 0{,}6269872 = +4{,}2363$

$\beta = \text{num log } 0{,}4364644 = -2{,}7319$

$\gamma = \text{num log } \bar{1}{,}8645413 = +0{,}7321$

$\delta = \text{num log } \bar{1}{,}3730371 = -0{,}2361.$

16. 2. Pot. $x^4 - 14084x^3 + 59802694x^2 - 82848900996x + 26075984796225 = 0$

4. Pot. $x^4 - 78753668x^3 + 129482633_7x^2 - 374511211_{18}x + 679956984_{18} = 0$

8. Pot. $x^4 - 361248879_7x^3 + 108805252_{22}x^2 - 122653223_{35}x + 462341498_{45} = 0$

Digitized by Google

16. Pot. $x^4 - 108739751_{88}x^3 + 109524254_{52}x^2 - 149432028_{78}x + 213758660_{99} = 0$

32. Pot.
$$\begin{cases} x^4 - 116052850x^3 + 119630648_{112}x^2 - 223296990_{164}x + 456927650_{206} = 0 \\ x^4 - 62{,}0646555x^3 + 120{,}0778422x^2 - 172{,}3488868x + 214{,}6598496 = 0 \end{cases}$$

Daher ist:

$\log\alpha = 62{,}0646555 : 32 = 1{,}9395203 = \log 87$
$\log\beta = (120{,}0778422 - 62{,}0646555) : 32 = 1{,}8129121 = \log 65$
$\log\gamma = (172{,}3488868 - 120{,}0778422) : 32 = 1{,}6334701 = \log 43$
$\log\delta = (214{,}6598496 - 172{,}3488868) : 32 = 1{,}3222175 = \log 21.$

Also $\alpha = 87$, $\beta = 65$, $\gamma = 43$, $\delta = 21$.

17. Setzt man in der vorgelegten Gleichung zur Vermeidung der ächten Brüche $x : 3432^{1/7}$ statt x, so erhalten wir folgende Gleichung:

$$x^7 - {}^7/_2.3432^{1/7}x^6 + {}^{65}/_{18}.3432^{2/7}x^5 - {}^{175}/_{52}.3432^{3/7}x^4 + {}^{175}/_{143}.3432^{4/7}x^3 - {}^{65}/_{286}.3432^{5/7}x^2 + {}^7/_{429}.3432^{6/7}x - 1 = 0.$$

Berechnet man die Coefficienten dieser Gleichung logarithmisch, so wird:

$\log A = \log 7 + {}^1/_7\log 3432 - \log 2 = 1{,}0491462$;	num hiervon	$= 11{,}19814$
$\log B = \log 63 + {}^2/_7\log 3432 - \log 13 = 1{,}6955535$;	„ „	$= 49{,}6082$
$\log C = \log 175 + {}^3/_7\log 3432 - \log 52 = 2{,}0422693$;	„ „	$= 110{,}2222$
$\log D = \log 175 + {}^4/_7\log 3432 - \log 143 = 2{,}1080148$;	„ „	$= 128{,}2374$
$\log E = \log 63 + {}^5/_7\log 3432 - \log 286 = 1{,}8683655$;	„ „	$= 73{,}85255$
$\log F = \log 7 + {}^6/_7\log 3432 - \log 429 = 1{,}2431099$;	„ „	$= 17{,}50289$

Es ist daher:

$$x^7 - 11{,}19814x^6 + 49{,}6082x^5 - 110{,}2222x^4 + 128{,}2374x^3 - 73{,}85255x^2 + 17{,}50289x - 1 = 0;$$

oder, wenn wir die Coefficienten durch ihre Logarithmen ausdrücken:

$$x^7 - 1{,}0491462x^6 + 1{,}6955535x^5 - 2{,}0422693x^4 + 2{,}1080148x^3 - 1{,}8683655x^2 + 1{,}2431099x - 0 = 0.$$

Berechnet man die Coefficienten für die zweite Potenz, so erhalten wir:

$A^2 = 11{,}19814^2 = 125{,}39852$; $2B = 99{,}21640$;
$A^2 - 2B = 26{,}18212$; Log. hiervon $= 1{,}4180048$.
$B^2 = 49{,}6082^2 = 2460{,}9735$; $2AC = 2468{,}570$;
$2D = 256{,}4748$; daher:
$B^2 - 2AC + 2D = 248{,}8783$; Log. hiervon $= 2{,}3959870$
$C^2 = 110{,}2222^2 = 12148{,}946$; $2BD = 12758{,}257$;
$2AE = 1654{,}024$; $2F = 35{,}005$; $C^2 - 2BD + 2AE - 2F = 1044{,}708$; Log. hiervon $= 3{,}0189948$
$D^2 = 128{,}2374^2 = 16444{,}836$; $2CE = 16280{,}389$;

Digitized by Google

$2BF = 1736{,}574$; $2AG = 22{,}396$; $D^2 - 2CE + 2BF - 2AG = 1878{,}625$; Log. hiervon $= 3{,}2738401$

$E^2 = 73{,}85255^2 = 5454{,}199$; $2DF = 4489{,}052$; $2CG = 220{,}444$; $E^2 - 2DF + 2CG = 1185{,}591$; Log. hiervon $3{,}0739348$

$F^2 = 17{,}50289^2 = 306{,}3513$; $2EG = 147{,}7051$; $F^2 - 2EG = 158{,}6462$; Log. hiervon $= 2{,}2004297$.

Für die zweite Potenz erhalten wir also die Gleichung:

$$x^7 - 26{,}18212x^6 + 248{,}8783x^5 - 1044{,}708x^4 + 1878{,}625x^3 - 1185{,}591x^2 + 158{,}6462x - 1 = 0.$$

Drücken wir die Coefficienten logarithmisch aus, so haben wir:

$$x^7 - 1{,}4180048x^6 + 2{,}3959870x^5 - 3{,}0189948x^4 + 3{,}2738401x^3 - 3{,}0739348x^2 + 2{,}2004297x - 0 = 0.$$

Wie die zweite Potenz werden auch alle folgenden Potenzen berechnet und drücken wir die Coefficienten sowohl durch ihre Zahlen als auch durch ihre Logarithmen aus, wobei wir es unterlassen, die fehlenden Stellen durch angehängte Zahlen anzugeben, weil die Anzahl der Stellen aus den Kennziffern der Logarithmen ersichtlich ist, so erhalten wir für die verschiedenen Potenzen folgende Gleichungen:

4. Pot.
$$\begin{cases} x^7 - 187{,}7468x^6 + 10992{,}31x^5 - 218082{,}2x^4 + \\ \quad 1130954{,}6x^3 - 811641{,}5x^2 + 22797{,}44x - 1 = 0 \\ x^7 - 2{,}2735725x^6 + 4{,}0410890x^5 - 5{,}3386202x^4 + \\ 6{,}0534451x^3 - 5{,}9093642x^2 + 4{,}3578860x - 0 = 0 \end{cases}$$

8. Pot.
$$\begin{cases} x^7 - 13264{,}23x^6 + 41204360x^5 - 2300097x^4 + \\ \quad 8255501x^3 - 6071965x^2 + 518099900x - 1 = 0 \\ x^7 - 4{,}1226820x^6 + 7{,}6149432x^5 - 10{,}3617461x^4 + \\ 11{,}9664000x^3 - 11{,}7833293x^2 + 8{,}7144135x - 0 = 0 \end{cases}$$

16. Pot.
$$\begin{cases} x^7 - 93530960x^6 + 1089471x^5 - 4527872x^4 + \\ \quad 8287092x^3 - 3677286x^2 + 2684262x - 1 = 0 \\ x^7 - 7{,}9709554x^6 + 15{,}0372157x^5 - 20{,}6558941x^4 + \\ 23{,}9184022x^3 - 23{,}5655274x^2 + 17{,}4288249x - 0 = 0 \end{cases}$$

32. Pot.
$$\begin{cases} x^7 - 6569099x^6 + 1102249x^5 - 2032105x^4 + \\ \quad 6864260x^3 - 1352239x^2 + 7205262x - 1 = 0 \\ x^7 - 15{,}8175058x^6 + 30{,}0422797x^5 - 41{,}3079675x^4 + \\ 47{,}8365937x^3 - 47{,}1310534x^2 + 34{,}8576498x - 0 = 0 \end{cases}$$

64. Pot.
$$\begin{cases} x^7 - 4094857x^6 + 1212283x^5 - 4129706x^4 + \\ \quad 4711806x^3 - 1828549x^2 + 5191580x - 1 = 0 \\ x^7 - 31{,}6122387x^6 + 60{,}0836040x^5 - 82{,}6159191x^4 + \\ 95{,}6731874x^3 - 94{,}2621068x^2 + 69{,}7152996x - 0 = 0 \end{cases}$$

128. Pot.
$$\begin{cases} x^7 - 1676785x^6 + 1469627x^5 - 1705447x^4 + \\ \quad 2220112x^3 - 3343594x^2 + 2695250x - 1 = 0 \\ x^7 - 63{,}2238491x^6 + 120{,}1672071x^5 - 165{,}2318382x^4 \\ \quad + 191{,}3463748x^3 - 188{,}5242136x^2 + 139{,}4305992x \\ \qquad - 0 = 0. \end{cases}$$

Digitized by Google

Daher ist, wenn wir jedesmal den Logarithmus von $3432^{4/7} = 0{,}5050782$ subtrahiren:

$$\log\alpha = 63{,}2238491 : 128 = 0{,}4939363 - 0{,}5050782$$
$$= -0{,}0111419 = \bar{1}{,}9888581; \text{ daher:}$$
$$\alpha = 0{,}9746711.$$
$$\log\beta = (120{,}1672071 - 63{,}2238491) : 128 = 0{,}4448699 - 0{,}5050782$$
$$= -0{,}0602083 = \bar{1}{,}9397917; \text{ daher:}$$
$$\beta = 0{,}8705460.$$
$$\log\gamma = (165{,}2318382 - 120{,}1672071) : 128 =$$
$$0{,}3520674 - 0{,}5050782 = -0{,}1530108 = \bar{1}{,}8469892; \text{ daher:}$$
$$\gamma = 0{,}7030548.$$
$$\log\delta = (191{,}3463748 - 165{,}2318382) : 128 =$$
$$0{,}2040198 - 0{,}5050782 = -0{,}3010584 = \bar{1}{,}6989416; \text{ daher:}$$
$$\delta = 0{,}5000000.$$
$$\log\varepsilon = (188{,}5242136 - 191{,}3463748) : 128 = -$$
$$0{,}0220481 - 0{,}5050782 = -0{,}5271263 = \bar{1}{,}4728737; \text{ daher:}$$
$$\varepsilon = 0{,}2970802.$$
$$\log\zeta = (139{,}4305992 - 188{,}5242136) : 128 = -$$
$$0{,}3835438 - 0{,}5050782 = -0{,}8886220 = \bar{1}{,}1113780; \text{ daher:}$$
$$\zeta = 0{,}1292343.$$
$$\log\vartheta = (0{,}0000000 - 139{,}4305992) : 128 = -$$
$$1{,}0893015 - 0{,}5050782 = -1{,}5943797 = \bar{2}{,}4056203; \text{ also:}$$
$$\vartheta = 0{,}0254461.$$

Auflösungen der Gleichungen von höhern Graden mit mehreren unbekannten Größen.

(Heis §. 104.)

§. 513. 1. Soll aus zwei Gleichungen, die in Bezug auf x nicht von demselben Grade sind, eine neue Gl. abgeleitet werden, welche von einem um eine Einheit niedrigeren Grade ist, als die höhere der beiden Gl., so multiplicire man, wenn die Coefficienten der höchsten Potenzen von x ungleich sind, zunächst jede der beiden Gl. mit dem Coefficienten der höchsten Potenz in der andern und die Gl. von niedrigerem Grade mit dem Quotienten aus den höchsten Potenzen von x; dadurch erhalten wir zwei neue Gl., in denen die höchsten Potenzen von x so wie ihre Coefficienten einander gleich sind. Die Differenz dieser beiden Gl. gibt eine Gl., worin der höchste Exponent von x um eine Einheit niedriger ist. Oder man multiplicire jede Gl. mit dem

Digitized by Google

Absolutglied der andern und dividire die Differenz der beiden abgeleiteten Gl. durch x.

2. Um aus den beiden vorgelegten Gl. eine dritte abzuleiten, in welcher x im 4. Grade vorkommt, multiplicire man (1) mit m und (2) mit ax^3, so wird:

(3) $amx^5+bmx^4+cmx^3+dmx^2+emx+fmy=0$

(4) $amx^5+anx^4+apy^2x^3=0$.

Nimmt man zwischen (3) und (4) die Differenz, so entsteht die verlangte Gl.:

$(bm-an)x^4+(cm-apy^2)x^3+dmx^2+emx+fmy=0$.

3. Multiplicire (1) mit 7 und (2) mit $2x^2$, so wird:

(3) $14x^4-21x^3y+28x^2y^2-35xy^3+42y^4=0$

(4) $14x^4-16x^3y-18x^2y^2=0$.

Subtrahire (4) von (3), so entsteht:

(5) $-5x^3y+46x^2y^2-35xy^3+42y^4=0$ oder durch y dividirt:

(6) $-5x^3+46x^2y-35xy^2+42y^3=0$.

Multiplicire jetzt (6) mit 7 und (2) mit 5x, so ist:

(7) $-35x^3+322x^2y-245xy^2+294y^3=0$

(8) $+35x^3-40x^2y-45xy^2=0$.

Die Summe von (7) und (8) dividire durch 2y, so entsteht die verlangte Gl.:

$141x^2-145xy+147y^2=0$.

4. Um aus zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten, welche in Bezug auf die zu eliminirende Größe von demselben Grade sind, diese Größe gänzlich zu eliminiren, kann man auf die oben angegebene Weise verfahren, indem man nämlich nach und nach den Grad der Gleichungen derart erniedrigt, daß zuletzt die zu eliminirende Größe in zwei verschiedenen Gl. nur noch in der ersten Potenz vorkommt. Werden dann die Werthe für diese Größe aus diesen beiden Gleichungen einander gleichgestellt, so resultirt daraus die verlangte Endgleichung.

5. Soll aus den beiden Gl. x gänzlich eliminirt werden, so multiplicire man (1) mit a′ und (2) mit a, so wird:

(3) $aa'x^2+a'bx+a'c=0$; (4) $aa'x^2+ab'x+ac'=0$.

Subtrahire (4) von (3), so wird:

$(a'b-ab')x+(a'c-ac')=0$; also: $x=\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}$.

Multiplicire ferner (1) mit c′ und (2) mit c, so erhält man:

(5) $ac'x^2+bc'x+cc'=0$; (6) $a'cx^2+b'cx+cc'=0$.

Die Differenz zwischen (5) und (6) dividire durch x, so wird:

$(a'c-ac')x+(b'c-bc')=0$; also $x=\frac{bc'-b'c}{ac'-a'c}$.

Digitized by Google

Setze die beiden für x gefundenen Werthe einander gleich, so erhält man die Endgleichung, woraus x ganz eliminirt ist, nämlich: $\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}=\frac{bc'-b'c}{ac'-a'c}$ oder:

$$(ac'-a'c)^2-(ab'-a'b)(bc'-b'c)=0.$$

6. Man leite aus den beiden gegebenen Gl. zunächst zwei andere ab, welche von einem um eine Einheit niedrigerern Grade sind. Zu dem Ende multiplicire man (1) mit a' und (2) mit a, ferner (1) mit d' und (2) mit d. Auf diese Weise erhalten wir folgende vier Gl.:

(3) $aa'x^3+a'bx^2+a'cx+a'd=0$
(4) $aa'x^3+ab'x^2+ac'x+ad'=0$
(5) $ad'x^3+bd'x^2+cd'x+dd'=0$
(6) $a'dx^3+b'dx^2+c'dx+dd'=0$

Nimm die Differenz zwischen (3) und (4), sowie zwischen (5) und (6) und dividire letztere durch x, so ist:

(7) $(ab'-a'b)x^2+(ac'-a'c)x+(ad'-a'd)=0$
(8) $(ad'-a'd)x^2+(bd'-b'd)x+(cd'-c'd)=0.$

Setzt man nun $ab'-a'b=\alpha$, $ac'-a'c=\beta$, $ad'-a'd=\gamma$, $bd'-b'd=\delta$, $cd'-c'd=\varepsilon$, so verwandeln sich die Gl. (7) und (8) in die beiden folgenden:

(9) $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$; (10) $\gamma x^2+\delta x+\varepsilon=0.$

Multiplicirt man (9) mit γ und (10) mit α, ferner (9) mit ε und (10) mit γ, nimmt jedesmal die Differenz der beiden erhaltenen Gleichungen und dividirt die letzte durch x, so erhalten wir:

(11) $(\alpha\delta-\beta\gamma)x+(\alpha\varepsilon-\gamma^2)=0$; (12) $(\alpha\varepsilon-\gamma^2)x+(\beta\varepsilon-\gamma\delta)=0.$

Setzt man aus (11) und (12) die Werthe für x einander gleich und entwickelt die Gl., so hat man:

$$(\gamma^2-\alpha\varepsilon)(\alpha\varepsilon-\gamma^2)-(\gamma\delta-\beta\varepsilon)(\alpha\delta-\beta\gamma)=0 \text{ oder:}$$
$$\alpha\varepsilon\gamma^2-\gamma^4-\alpha^2\varepsilon^2+\alpha\varepsilon\gamma^2-\alpha\gamma\delta^2+\beta\gamma^2\delta+\alpha\beta\delta\varepsilon-\beta^2\gamma\varepsilon=0.$$

Nun ist:

$\alpha\varepsilon\gamma^2=(ab'-a'b)(ad'-a'd)^2(cd'-c'd)$ . . . . . $=A$
$-\gamma^4=-(ad'-a'd)^4$ . . . . . $=B$
$-\alpha^2\varepsilon^2=-(ab'-a'b)^2(cd'-c'd)^2$ . . . . . $=C$
$+\alpha\varepsilon\gamma^2=+(ab'-a'b)(cd'-c'd)(ad'-a'd)^2$ . . . . $=D$
$-\alpha\gamma\delta^2=-(ab'-a'b)(ad'-a'd)(bd'-b'd)^2$ . . . . $=E$
$+\beta\gamma^2\delta=(ac'-a'c)(ad'-a'd)^2(bd'-b'd)$ . . . . . $=F$
$+\alpha\beta\delta\varepsilon=(ab'-a'b)(ac'-a'c)(bd'-b'd)(cd'-c'd)$ $=G$
$-\beta^2\gamma\varepsilon=-(ac'-a'c)^2(ad'-a'd)(cd'-c'd)$ . . . . $=H$
$A+D=2(ad'-a'd)^2(ab'-a'b)(cd'-c'd)$ . . . . $=I$
$C+G=(ad'-a'd)(bc'-b'c)(ab'-a'b)(cd'-c'd)$. $=K$
$E+F=\{(ad'-a'd)(ac'-a'c)-(ab'-a'b)(bd'-b'd)\}(ad'-a'd)(bd'-b'd)$ $=L$
$I+L=\{2(ab'-a'b)(cd'-c'd)+(ac'-a'c)(bd'-b'd)\}(ad'-a'd)^2-(ab'-a'b)(bd'-b'd)^2$ $=M.$

Digitized by Google

Sämmtliche Ausdrücke von A bis M haben den Faktor (ad'—a'd), der daher ausgeschieden werden kann. Setzen wir nun diese Ausdrücke, nachdem die Vorzeichen verändert worden sind, zusammen, so erhalten wir die Gleichung:

$$B-M+H-K=0 \text{ oder:}$$

$$(ad'-a'd)^3-\{(ac'-a'c)(bd'-b'd)+2(ab'-a'b)(cd'-c'd)\}\times(ad'-a'd)+(ab'-a'b)(bd'-b'd)^2+(ac'-a'c)^2(cd'-c'd)-(ab'-a'b)(bc'-b'c)(cd'-c'd)=0.$$

7. Wenn man zwischen zwei Gleichungen eines beliebigen Grades mit zwei unbekannten Größen eine derselben eliminirt, so kann der Grad der Endgleichung nicht höher sein, als das Produkt der Grade der beiden Gleichungen und er ist diesem Produkte genau gleich, wenn die beiden gegebenen Gleichungen die allgemeinste Form ihres Grades haben.

8. Soll aus den beiden gegebenen Gl. y eliminirt werden, so multiplicire man (1) mit p' und (2) mit —p, so erhalten wir:

(3) $mp'x^2+np'xy+pp'y^2+p'qx+p'ry+p's=0$

(4) $-m'px^2-n'pxy-pp'y^2-pq'x-pr'y-ps'=0.$

Die Summe von (3) und (4) ist:

(5) $(mp'-m'p)x^2+(np'-n'p)xy+(p'q-pq')x+(p'r-pr')y+(p's-ps')=0$ oder:

(6) $\{(np'-n'p)x+(p'r-pr')\}y=(ps'-p's)-(p'q-pq')x-(mp'-m'p)x^2$; daher:

$$y=\frac{(ps'-p's)-(p'q-pq')x-(mp'-m'p)x^2}{(np'-n'p)x+(p'r-pr')}.$$

Setze $ps'-p's=A$, $p'q-pq'=B$, $mp'-m'p=C$, $np'-n'p=D$, $p'r-pr'=E$ und substituire den Werth für y in (1), so wird:

$$(mx^2+qx+s)(Dx+E)^2+\{(nx+r)(Dx+E)+p(A-Bx-Cx^2)\}(A-Bx-Cx^2)=0.$$

Entwickelt man dieselbe, so erhält man die verlangte Gl., welche in Bezug auf x vom vierten Grade ist, weil die beiden vorgelegten Gleichungen die allgemeinste Form ihres Grades haben.

$$\{mD^2+(pC-nD)C\}x^4-\{(nD-2pC)B+(nE+rD)C-(2mE+qD)D\}x^3+\{(nD-pC)A-(nE+rD-pB)B-(rE+pA)C+(qE+sD)D+(mE+qD)E\}x^2-\{(pB-rD)A+(rE+pA)B-(qE+2sD+nA)E\}x+sE^2+(rE+pA)A=0.$$

Setzt man hierin die Werthe für A, B, C, D, E, entwickelt alsdann die einzelnen Ausdrücke und dividirt die ganze Gl. durch p, so erhält man die in Heis' Sammlung angegebene Antwort.

Digitized by Google

9. Soll aus den beiden Gleichungen x eliminirt werden, so multiplicire man (1) mit 3 und (2) mit 2 und wir erhalten:

$$(3)\ 6x^3-9x^2y+12xy^2-156=0;$$
$$(4)\ 6x^3-8x^2y+10xy^2-132=0.$$

Die Differenz dieser beiden Gl. gibt:

$$(5)\ -x^2y+2xy^2-24=0.$$

Jetzt multiplicire man (1) mit 33 und (2) mit 22, so wird:

$$(6)\ 66x^3-99x^2y+132xy^2-1716=0;$$
$$(7)\ 78x^3-104x^2y+130xy^2-1716=0.$$

Dividire die Differenz dieser beiden Gl. durch x, so erhalten wir:

$$(8)\ -12x^2+5xy+2y^2=0.$$

Multiplicire (5) mit 12 und (8) mit y, so wird:

$$(9)\ -12x^2y+24xy^2-288=0;$$
$$(10)\ -12x^2y+5xy^2+2y^3=0.$$

Die Differenz dieser beiden Gl. gibt:

$$(11)\ 19xy^2-2y^3-288=0;\ \text{daher}\ x=\frac{2y^3+288}{19y^2}.$$

Setze diesen Werth für x in (8), so ist:

$$-12\left(\frac{2y^3+288}{19y^2}\right)^2+5y.\frac{2y^3+288}{19y^2}+2y^2=0.$$

Entwickele diese Gl., so hat man:

$$-48y^6-13824y^3-995328+190y^6+27360y^3+722y^6=0.$$
$$864y^6+13536y^3-995328=0;\ \text{durch 288 dividirt, gibt:}$$
$$3y^6+47y^3-3456=0.$$

10. Um x aus den beiden Gleichungen zu eliminiren, multiplicire Gl. (2) mit x—y, so wird:

$$(3)\ x^3+3x^2y-6xy^2-10x+2y^3+10y=0.$$

Nimm die Differenz zwischen (1) und (3), so ist:

$$(4)\ -9xy^2-10x+2y^3+10y+98=0\ \text{oder:}$$
$$(5)\ (9y^2+10)x-(2y^3+10y+98)=0;\ \text{folglich:}$$
$$x=\frac{2y^3+10y+98}{9y^2+10}.$$

Setze diesen Werth für x in Gl. (2), so hat man:

$$\left(\frac{2y^3+10y+98}{9y^2+10}\right)^2+4y.\frac{2y^3+10y+98}{19y^2+10}-(2y^2+10)=0.$$

Entwickele diese Gl., so erhält man:

$$76y^6+480y^4+3920y^3+500y^2+5880y+9604-(162y^6+1170y^4+2000y^3+1000)=0$$
$$-86y^6-690y^4+3920y^3-1500y^2+5880y+8604=0$$

oder endlich:

$$43y^6+345y^4-1960y^3+750y^2-2940y-4302=0.$$

Digitized by Google

11. Durch Umformung der beiden Gl. erhält man:

$$(1)\ x^2-x(y+1)-2(y+1)^2=0;$$
$$(2)\ x^2-x(3y-1)+2y(y-1)=0.$$

Die Differenz dieser beiden Gl. gibt:

$$x(3y-1)-x(y+1)-2(y+1)^2-2y(y-1)=0 \text{ oder:}$$
$$2x(y-1)=2(2y^2+y+1);\ \text{also } x=\frac{2y^2+y+1}{y-1}.$$

Setze den Werth für x in Gl. (1), so wird:

$$\left(\frac{2y^2+y+1}{y-1}\right)^2-y.\frac{2y^2+y+1}{y-1}-\frac{2y^2+y+1}{y-1}-2(y-1)^2=0$$
$$(2y^2+y+1)^2-y(2y^2+y+1)(y-1)-(2y^2+y+1)(y-1)$$
$$-2(y+1)^2(y-1)^2=0$$
$$(2y^2+y+1)(y^2+y+2)-2(y^2-1)^2=0$$
$$3y^3+10y^2+3y=0 \text{ oder } y(3y^2+10y+3)=0;\ \text{also:}$$
$$y_1=0,\ 3y^2+10y+3=0;\ \text{folglich } y_2=-3,\ y_3=-1/3.$$

Nun ist $x=\frac{2y^2+y+1}{y-1}$; für $y_1=0$ ist $x_1=-1$; für $y_2=-3$ ist $x_2=-4$; für $y_3=-1/3$ ist $x_3=-2/3$.

12. Multiplicire (1) mit 2 und (2) mit 21, so wird:

$$(3)\ 42x^2-2x(26y-11)+16y^2-12y-4=0;$$
$$(4)\ 42x^2-21x(3y-2)+21y^2-84=0.$$

Die Differenz zwischen (3) und (4) gibt:

$$(5)\ 21x(3y-2)-2x(26y-11)-5y^2-12y+80=0 \text{ oder:}$$
$$(6)\ x(11y-20)=5y^2+12y-80;\ \text{also } x=\frac{5y^2+12y-80}{11y-20}.$$

Setze den Werth für x in (2), so wird:

$$2\left(\frac{5y^2+12y-80}{11y-20}\right)^2-3y.\frac{5y^2+12y-80}{11y-20}+2.\frac{5y^2+12y-80}{11y-20}$$
$$+y^2-4=0.$$
$$(5y^2+12y-80)\{2(5y^2+12y-80)-3y(11y-20)+2(11y-20)\}$$
$$+(y^2-4)(11y-20)^2=0$$
$$(5y^2+12y-80)(-23y^2+106y-200)+(y^2-4)(11y-20)^2=0$$
$$-115y^4+254y^3+2112y^2-10880y+16000+121y^4-440y^3$$
$$-84y^2+1760y-1600=0$$
$$6y^4-186y^3+2028y^2-9120y+14400=0 \text{ oder:}$$
$$y^4-31y^3+388y^2-1520y+2400=0.$$

Lösen wir diese Gl. nach §. 508 auf, so sind die Theiler des Absolutgliedes 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 16, 20, 24, 25, 30, 32, 40, 48, 50, 60 u. s. w. Um die Theiler in

Digitized by Google

engere Grenzen einzuschließen, setze man $y = z+1$; alsdann wird das Absolutglied:

$$1-31+338-1520+2400 = 1188.$$

Die Theiler hiervon sind: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 11, 12, 18, 22, 27, 33, 36, 44, 54 u. s. w. Vermehrt man diese Theiler um 1, so erhält man: 2, 3, 4, 5, 7, 10, 12, 13, 19, 23, 28, 34, 37, 45, 55 u. s. w. Wir brauchen also blos den Versuch zu machen mit 2, 3, 4, 5, 10, 12.

Für $\alpha = 2$ wird $q_1 = 1200$, $q_2 = -160$, $q_3 = +89$, $q_4 = +29$, $q_5 > 0$
„ $\alpha = 3$ „ $q_1 = 800$, $q_2 = -240$, q_3 keine ganze Zahl
„ $\alpha = 4$ „ $q_1 = 600$, $q_2 = -230$, $q_3 = +27$, $q_4 = -1$, $q_5 = 0$
„ $\alpha = 5$ „ $q_1 = 480$, $q_2 = -208$, $q_3 = +26$, $q_4 = -1$, $q_5 = 0$
„ $\alpha = 10$ „ $q_1 = 240$, $q_2 = -128$, $q_3 = +21$, $q_4 = -1$, $q_5 = 0$
„ $\alpha = 12$ „ $q_1 = 200$, $q_2 = -110$, $q_3 = +19$, $q_4 = -1$, $q_5 = 0$.

Hieraus folgt, daß 4, 5, 10, 12 die Wurzeln der Gl. in y sind; mithin ist:

$$y_1 = 4;\ y_2 = 5;\ y_3 = 10;\ y_4 = 12.$$

Setzen wir diese verschiedenen Werthe in $x = \frac{5y^2+12y-80}{11y-20}$, so wird $x_1 = 2$; $x_2 = 3$; $x_3 = 6$; $x_4 = 7$.

13. Durch Umformung der ersten Gleichung erhält man: $(x-y)^2 = (1,1)^2$; daher $x-y = \pm 1,1$; also $x = y \pm 1,1$. Setzen wir diesen Werth für x in die Gleichung (2), so erhalten wir:

$$1085(y \pm 1,1)^2 - 2258y(y \pm 1,1) + 338,8(y \pm 1,1) + 689y^2 + 3388y - 7174,09 = 0$$
$$1085y^2 \pm 2387y + 1312,85 - 2258y^2 \mp 2483,8y + 338,8y \pm 372,68 + 689y^2 + 3388y - 7174,09 = 0.$$

Hieraus ergeben sich die beiden Gleichungen:

α) $-484y^2 + 3630y - 5488,56 = 0$ oder:
$$y^2 - 7,5y + 11,34 = 0.$$
β) $-484y^2 + 3823,6y - 6233,92 = 0$ oder:
$$y^2 - 7,9y + 12,88 = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich $y = 3,75 \pm 1,65$ und $y = 3,95 \pm 1,65$; mithin haben die beiden Größen x und y folgende Werthe:

$$x_1 = 1,2;\ x_2 = 4,5;\ x_3 = 6,5;\ x_4 = 3,2.$$
$$y_1 = 2,3;\ y_2 = 5,6;\ y_3 = 5,4;\ y_4 = 2,1.$$

14. Multiplicire (1) mit 5 und (2) mit 2, so wird:

(3) $50x^2 + 345xy - 30555x - 630y^2 + 27270y + 1075500 = 0$
(4) $1148x^2 - 2174xy - 107858x + 630y^2 + 115602y + 2419692 = 0.$

Die Summe dieser beiden Gl. liefert:

Digitized by Google

(5) $1198x^2-1829xy-138413x+142872y+3495192=0$ oder:

(6) $(1829x-142872)y=1198x^2-138413x+3495192$; daher:

$$y=\frac{1198x^2-138413x+3495192}{1829x-142872}.$$

Setze diesen Werth für y in die erste Gl., so wird:

$$(10x^2-6111x+215100)(1829x-142872)^2+\{(69x+5454)(1829x-142872)-126(1198x^2-138413x+3495192)\}\times(1198x^2-138413x+3495192)+\{10.1829^2+(1829.69-126.1198).1198\}x^4-\{(2.10.142872+6111.1829).1829+(1829.69-126.1198).138413-(1829.5454+126.138413-142872.69).1198\}x^3+\{10.142872^2+2.6111.1829.142872+215100.1829^2+(1829.69-126.1198).3495192-(142872.5454+126.3495192).1198-(1829.5454+126.138413-142872.69).138413\}x^2-\{(6111.142872+2.215100.1829).142872-(142872.5454+126.3495192).138413-(1829.5454+126.138413-142872.69).3495192\}x+\{215100.142872^2-(142872.5454+126.3495192).3495192\}=0.$$

Entwickelt man diese Gl., so erhält man:

$$3805504x^4-1210150272x^3+139703857344x^2-6980123935872x+127909687127040=0.$$

Dividire diese Gl. durch 3805504, so wird:

$$x^4-318x^3+36711x^2-1834218x+33611760=0.$$

Lösen wir diese Gleichung nach der Gräffe'schen Methode §. 512, so erhalten wir:

2. Pot. $x^4-27702x^3+248358393x^2-896513028804x+1129750410297600=0$

4. Pot. $x^4-270684018x^3+142709842_8x^2-242569625_{15}x+127633596_{22}=0$

8. Pot. $x^4-447278691_8x^3+74894216_{24}x^2-224108827_{38}x+162903345_{52}=0$

16. Pot. $x^4-185079384_{25}x^3+360761956_{55}x^2-258237297_{84}x+265374996_{112}=0.$

32. Pot. $x^4-341822259_{58}x^3+120590362_{119}x^2-475390597_{176}x+704238877_{232}=0$

64. Pot. $x^4-116842215_{125}x^3+145095353_{246}x^2-209010335_{361}x+495952395_{478}=0.$

Drücken wir die Coefficienten der letzten Gl. durch ihre Logarithmen aus, so ist:

$$x^4-133,0675996x^3+254,1616533x^2-369,3201676x+481,6954204=0.$$

Hieraus folgt:

Digitized by Google

$\log \alpha = 2{,}0791812$; also $\alpha = 120$
$\log \beta = 1{,}8920945$; „ $\beta = 78$
$\log \gamma = 1{,}7993517$; „ $\gamma = 63$
$\log \delta = 1{,}7558733$; „ $\delta = 57$.

Daher ist:
$x_1 = 120$, $x_2 = 78$, $x_3 = 63$, $x_4 = 57$ und deshalb:
$y_1 = 54$, $y_2 = 59$, $y_3 = 17$, $y_4 = 13$.

15. Subtrahire die zweite Gleichung von der ersten, so wird: $-3xy - 3x + 3y^2 - 3$ oder $-x(y+1) + (y+1)(y-1) = 0$.
Hieraus folgt $\{(y-1) - x\}(y+1) = 0$; mithin ist sowohl:
$y+1 = 0$ als auch $(y-1) - x = 0$; daher:
$y_1 = -1$; ferner $y - 1 = x$.
Setze den Werth für x in die erste gegebene Gleichung, so erhält man:
$(y-1)^2 + 4y(y-1) + (y-1) - 4y^2 + 6 = 0$ oder:
$y^2 - 5y + 6 = 0$; daher $y_2 = 2$ und $y_3 = 3$; folglich:
$x_1 = 1$ und $x_2 = 2$.
Substituirt man den Werth für $y = -1$ in die erste gegebene Gleichung, so ist:
$x^2 - 3x + 2 = 0$; hieraus folgt $x = 1$ und $x = 2$.
Daher sind die zusammengehörigen Werthe für x und y:
$x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$
$y_1 = -1$, $y_2 = -1$, $y_3 = 2$, $y_4 = 3$.

16. Formt man die beiden Gleichungen um, so erhält man:
(1) $(x^2+y^2)x = 5$; (2) $(x^2+y^2)y = 3$.

Dividire (1) durch (2), so wird (3) $\frac{x}{y} = \frac{5}{3}$; also $x = \frac{5}{3}y$;

Setze diesen Werth für x in (1), so wird: $(\frac{5}{3}y)^3 + \frac{5}{3}y^3 =$ 5 oder $34y^3 = 27$; daher $y = \sqrt[3]{27:34}$. Nun ist:

$\sqrt[3]{27:34} = \frac{3}{34} \cdot \sqrt[3]{34^2} = \frac{3}{34} \cdot 10{,}495084622 =$
$0{,}92603687849$; hienach ist: $y_1 = 0{,}92603687849$
und daher ist $x_1 = 1{,}54339479748$.

17. α) Hat man zwei Gl. mit zwei Unbekannten x und y, und nimmt man an, man habe auf anderem Wege für x und y annähernde Werthe gefunden, so fragt es sich, welche Correktionen damit vorgenommen werden müssen, um dem wahren Werthe von x und y näher zu kommen. Gesetzt, man habe durch Versuche α als ungefähren Werth für x und β für y gefunden, so setze man, um einen genaueren Werth zu erhalten, $x = \alpha + h$ und $y = \beta + k$ in den beiden gegebenen Gl. und behalte bei der Entwickelung nur die-

Digitized by Google

jenigen Glieder bei, worin h und k blos in der ersten Potenz, nicht aber als Produkte und höhere Potenzen vorkommen. Hiedurch erhalten wir zwei neue Gl., worin die Coefficienten bekannte Zahlen sind. Bestimmt man hieraus h und k, so hat man die Correktionen der Werthe α und β und somit auch die Näherungswerthe der Unbekannten, nämlich $x = \alpha + h$ und $y = \beta + k$, die den wahren Werthen von x und y schon näher kommen. Verfährt man mit den auf diese Weise gefundenen Werthen ebenso, wie vorhin mit α und β, so erhält man eine neue Correktion und somit ein Paar neue Näherungswerthe für x und y, die den wahren Werthen dieser Größen noch näher kommen. Nun setze man dieses Verfahren so lange fort, bis man hinlänglich genaue Näherungswerthe erhalten hat. Wenden wir das Gesagte auf die unter α) gegebenen Gl. an und setzen $\alpha + h$ an Stelle von x und $\beta + k$ an Stelle von y, so wird:

(1) $(\alpha+h)^7 - 5(\alpha+h)^2.(\beta+k)^4 + 1506 = 0$
(2) $(\beta+k)^5 - 3(\alpha+h)^4.(\beta+k) - 103 = 0.$

Entwickeln wir diese Gl. und vernachlässigen die Produkte sowie die höhern Potenzen von h und k, so wird:

(3) $(\alpha^7 + 1506 - 5\alpha^2\beta^4) + (7\alpha^6 - 10\alpha\beta^4)h - 20\alpha^3\beta^3 k = 0$
(4) $(\beta^5 - 103 - 3\alpha^4\beta) - 12\alpha^3\beta h + (5\beta^4 - 3\alpha^4)k = 0.$

Durch Substitutionen in den gegebenen Gl. findet man, daß die Werthe für x zwischen 2 und 16 und die für y zwischen 1 und 20 liegen. Setzt man daher in (3) und (4) $\alpha = 2$ und $\beta = 3$, so erhält man als erste Correktion:

(5) $14 - 1172h - 2160k = 0$
(6) $-4 - 288h + 357k = 0.$

Aus (5) und (6) folgt $h = -0{,}0035$, $k = +0{,}0084$; daher: $x = 2 - 0{,}0035 = 1{,}9965$; $y = 3 + 0{,}0084 = 3{,}0084$.

Setzt man jetzt, um eine fernere Correktion zu erhalten, in (3) und (4)

$$\alpha = 1{,}9965 \text{ und } \beta = 3{,}0084,$$

so erhalten wir zur Bestimmung von h und k die beiden Gleichungen:

(7) $+0{,}0515 + 1192{,}0373h + 2170{,}5780k = 0$
(8) $+0{,}0261 - 287{,}2927h + 361{,}8903k = 0.$

Aus (7) und (8) folgt $h = +0{,}000036$, $k = -0{,}000043$;
daher: $x_1 = 1{,}9965 + 0{,}000036 = 1{,}996536$;
$y_1 = 3{,}0084 - 0{,}000043 = 3{,}008357$.

Setzt man nun weiter in (3) und (4) $\alpha = -2$ und $\beta = +3$, so erhalten wir als erste Correktion:

Digitized by Google

(9) $-121+1034h-1080k=0$
(10) $-4+288h+357k=0.$

Hieraus folgt $h=+0{,}0698$ und $k=-0{,}0451$; also:
$x=-2+0{,}0698=-1{,}9302$; $y=3-0{,}0451=2{,}9549.$

Setze jetzt in (3) und (4) $\alpha=-1{,}9302$ und $\beta=2{,}9549$, so entsteht die zweite Correktion:

(11) $-14{,}007+1833{,}544h-1922{,}485k=0$
(12) $-0{,}7722+254{,}9946h+339{,}5478k=0;$
folglich $h=+0{,}005608$, $k=-0{,}001937$; daher:
$x_2=-1{,}9302+0{,}005608=-1{,}924592$
$y_2=+2{,}9549-0{,}001937=+2{,}952963.$

Setze ferner $\alpha=-3$, $\beta=-1$, so erhält man aus (3) und (4) als erste Correktion:

(13) $-242-1711h+60k=0$
(14) $+139-324h-238k=0;$
folglich $h=+0{,}12702$, $k=+0{,}41114$; daher:
$x=-2{,}87298$, $y=-0{,}58886.$

Setze in (3) und (4) $\alpha=-2{,}87298$, $\beta=-0{,}58886$, so entsteht die zweite Correktion:

(15) $-114{,}541+3939{,}803h+33{,}70788k=0$
(16) $+17{,}2838-176{,}568h-203{,}785k=0;$
folglich $h=+0{,}028546$, $k=+0{,}061341$; daher:
$x=-2{,}84444$, $y=-0{,}52752.$

Setze $\alpha=-2{,}84444$, $\beta=-0{,}52752$ in (3) und (4), so entsteht die dritte Correktion:

(17) $-3{,}662+3709{,}82h+23{,}754k=0$
(18) $+0{,}556-145{,}684h-196k=0;$
folglich $h=+0{,}000959$, $k=+0{,}002123$; daher:
$x_3=-2{,}843481$, $y_3=-0{,}525397$ u. s. w.

17. β) Erhebe die Summengleichung auf die 7te Potenz, so wird:

(3) $(x^7+y^7)+7xy\{(x^5+y^5)+3xy(x^3+y^3)+5x^2y^2(x+y)\}=a^7.$

Setze in (3) die Werthe für x^7+y^7 aus (2) und für $x+y$ aus (1) und dividire alsdann die Gl. durch 7, so wird:

(4) $xy\{(x^5+y^5)+3xy(x^3+y^3)+5ax^2y^2\}=\frac{1}{7}(a^7-b).$

Erhebe die Summengleichung auf die 5te und 3te Potenz und setze daraus die Werthe für x^5+y^5 und für x^3+y^3 in (4), so erhalten wir:

(5) $xy\{a^5-2xy(a^3-3axy)-5ax^2y^2\}=\frac{1}{7}(a^7-b).$

Entwickelt man diese Gl., so erhält man:

$$(6)\quad (xy)^3-2a^2(xy)^2+a^4(xy)=\frac{a^7-b}{7a}.$$

Setzt man hierin $a=1$ und $b=127$, so wird:

(7) $(xy)^3-2(xy)^2+(xy)+18=0.$

Digitized by Google

Die Theiler des Absolutgliedes sind ± 2, ± 3, ± 6, ± 9. Für $xy = -2$ wird die Gleichung annullirt; dividiren wir dieselbe durch $xy+2$, so entsteht:

(8) $(xy)^2 - 4(xy) + 9 = 0$; also $xy = 2 \pm \sqrt{-5}$.

Wir haben also:

(9) $xy = -2$; (10) $xy = 2 \pm \sqrt{-5}$.

Nun ist ferner (1) $x+y = 1$; mithin sind in (1) und (9) und (10) die Summe und das Produkt der Unbekannten gegeben; daher erhalten wir aus (1) und (9):

$x_1 = 2$, $y_1 = -1$; $x_2 = -1$, $y_2 = 2$.

Aus (1) und (10) folgt:

$$x_3 = \tfrac{1}{2}\{1 \pm \sqrt{-7 \mp 4\sqrt{-5}}\} = 0{,}5 \pm \sqrt{-\tfrac{7}{4} \mp \sqrt{-5}}$$

$$y_3 = \tfrac{1}{2}\{1 \mp \sqrt{-7 \mp 4\sqrt{-5}}\} = 0{,}5 \mp \sqrt{-\tfrac{7}{4} \mp \sqrt{-5}}.$$

Der Werth für x_3 und y_3 läßt sich nach §. 339 I. Theil umformen. Hier ist nämlich:

$m = -\tfrac{7}{4}$; $m^2 = \tfrac{49}{16}$; $\sqrt{n} = \sqrt{-5}$; $n = -5$;

$m^2 - n = \tfrac{49}{16} + 5 = \tfrac{129}{16} = 8{,}0625$; $\sqrt{m^2 - n} = 2{,}8394541729$;

$\tfrac{1}{2}m + \tfrac{1}{2}\sqrt{m^2 - n} = 0{,}5447270865$; $\sqrt{\tfrac{1}{2}m + \tfrac{1}{2}\sqrt{m^2 - n}} =$

$0{,}7380562$ und $\sqrt{\tfrac{1}{2}m - \tfrac{1}{2}\sqrt{m^2 - n}} = 1{,}514835\sqrt{-1}$.

Hiernach ist also, wenn wir die entsprechenden Werthe einsetzen, x_3 und y_3 leicht zu bestimmen.

18. Nach der dritten gegebenen Gl. ist:

$$\frac{a^m}{x^m x^n} = \frac{a^m}{x^m x^n}; \text{ mithin ist } \left(\frac{a}{x}\right)^m = \left(\frac{a}{x}\right)^m \cdot \left(\frac{x}{x}\right)^n$$

$$\frac{b^m}{y^m y^n} = \frac{a^m}{x^m x^n}; \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \left(\frac{b}{y}\right)^m = \left(\frac{a}{x}\right)^m \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^n$$

$$\frac{c^m}{z^m z^n} = \frac{a^m}{x^m x^n}; \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \left(\frac{c}{z}\right)^m = \left(\frac{a}{x}\right)^m \cdot \left(\frac{z}{x}\right)^n.$$

Durch Addition der drei Gleichungen erhalten wir:

$$\left(\frac{a}{x}\right)^m + \left(\frac{b}{y}\right)^m + \left(\frac{c}{z}\right)^m = \left(\frac{a}{x}\right)^m \cdot \left(\frac{x}{x}\right)^n + \left(\frac{a}{x}\right)^m \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^n + \left(\frac{a}{x}\right)^m \cdot \left(\frac{z}{x}\right)^n \text{ oder:}$$

$$(4)\quad \left(\frac{a}{x}\right)^m + \left(\frac{b}{y}\right)^m + \left(\frac{c}{z}\right)^m = \frac{x^n + y^n + z^n}{x^n} \cdot \left(\frac{a}{x}\right)^m.$$

Setzen wir in (4) aus (1) den Werth für die linke Seite und aus (2) den Werth für $x^n + y^n + z^n$, so wird:

$$(5)\quad 1 = \frac{d^n}{x^n} \cdot \frac{a^m}{x^m} \text{ oder } x^{m+n} = a^m d^n.$$

Digitized by Google

Ziehen wir aus (5) die $(m+n)^{te}$ Wurzel und potenziren die erhaltene Gl. mit n, so wird:

$$(6)\quad x^n = (a^m d^n)^{\frac{n}{m+n}}.$$

Entwickelt man aus der dritten Gl. ebenso die Werthe für y^n und z^n, wie er für x^n entwickelt worden ist, so erhalten wir:

$$(7)\quad y^n = (b^m d^n)^{\frac{n}{m+n}};\quad (8)\quad z^n = (c^m d^n)^{\frac{n}{m+n}}.$$

Setzen wir die in (6), (7) und (8) gefundenen Werthe für x^n, y^n, z^n in die zweite Gl., so wird:

$$(9)\quad d^n = (a^m d^n)^{\frac{n}{m+n}} + (b^m d^n)^{\frac{n}{m+n}} + (c^m d^n)^{\frac{n}{m+n}} \text{ oder:}$$

$$(10)\quad d^n = \left(a^{\frac{mn}{m+n}} + b^{\frac{mn}{m+n}} + c^{\frac{mn}{m+n}}\right).d^{\frac{nn}{m+n}}.$$

Potenzire (10) mit $m+n$, so wird:

$$(11)\quad \left(d^n\right)^{m+n} = \left(a^{\frac{mn}{m+n}} + b^{\frac{mn}{m+n}} + c^{\frac{mn}{m+n}}\right)^{m+n}.d^{nn}.$$

Diese Gl. durch d^{nn} dividirt, gibt schließlich:

$$(12)\quad d^{mn} = \left(a^{\frac{mn}{m+n}} + b^{\frac{mn}{m+n}} + c^{\frac{mn}{m+n}}\right)^{m+n}.$$

19. Es sei: $\sqrt[3]{a+b\sqrt{-1}} = x+y\sqrt{-1}$; alsdann ist:

$$a+b\sqrt{-1} = (x+y\sqrt{-1})^3$$
$$= x^3-3xy^2+(3x^2y-y^3)\sqrt{-1}.$$

Setzt man nun die reellen und imaginären Größen einander gleich, so ist:

$$(1)\quad x^3-3xy^2 = a;\quad (2)\quad 3x^2y-y^3 = b.$$

Setze aus (2) den Werth für $x = \sqrt{\frac{y^3+b}{3y}}$ in (1), so wird:

$\sqrt{\left(\frac{y^3+b}{3y}\right)^3} - 3y^2.\sqrt{\frac{y^3+b}{3y}} = a$. Ins Quadrat erhoben gibt:

$$\left(\frac{y^3+b}{3y}\right)^3 - 6y^2.\left(\frac{y^3+b}{3y}\right)^2 + 9y^4.\frac{y^3+b}{3y} - a^2 = 0 \text{ oder:}$$

$$(3)\quad 64y^9+48by^6-(27a^2+15b^2)y^3+b^3 = 0.$$

Setze $y^3 = z$, so erhalten wir folgende cubische Gl.:

$$(4)\quad 64z^3+48bz^2-(27a^2+15b^2)z+b^3 = 0.$$

Digitized by Google

Für $a = 2$, $b = 11$ erhalten wir:

(5) $64z^3 + 528z^2 - 1923z + 1331 = 0.$

Diese Gleichung hat eine reelle positive Wurzel, nämlich $z = 1$; folglich ist:

$y^3 = 1$; daher $y_1 = 1$; mithin $x_1 = \sqrt{4} = 2$.

Dividirt man Gl. (3) durch $y^3 - 1$, so erhalten wir folgende Gl.:

(6) $64y^6 + 592y^3 - 1331 = 0$. Hieraus folgt:

$(y^3 + {}^{296}/_{64})^2 = ({}^{240}/_{64})^2 . 3$; mithin:

$y^3 = {}^1/_8(\pm 30\sqrt{3} - 37)$; $y = {}^1/_2\sqrt[3]{-37 \pm 30\sqrt{3}}$.

Um zu untersuchen, ob sich aus $-37 \pm 30\sqrt{3}$ die Cubikwurzel ausziehen lasse, verfahre man auf ähnliche Weise wie in §. 491. 11. Es sei also:

$$a \pm \sqrt{b} = \sqrt[3]{(a^3 + 3ab) \pm (3a^2 + b)\sqrt{b}}.$$

Setzt man hier $a^3 + 3ab = A$ und $(3a^2 + b)\sqrt{b} = \sqrt{B}$, so wird:

$$a \pm \sqrt{b} = \sqrt[3]{A \pm \sqrt{B}}.$$ Nun ist:

$A^2 = a^6 + 6a^4b + 9a^2b^2$ und

$B = 9a^4b + 6a^2b^2 + b^3$; also:

$A^2 - B = a^6 - 3a^4b + 3a^2b^2 - b^3 = (a^2 - b)^3$; mithin:

$\sqrt[3]{A^2 - B} = a^2 - b$. Setzt man $a^2 - b = m$, so ist $b = a^2 - m$.

Substituirt man diesen Werth für b in

$a^3 + 3ab = A$, so wird:

(7) $4a^3 - 3am - A = 0$.

Hat diese Gl. eine rationale Wurzel, so sind die Größen a und b ebenfalls rational. Nun ist:

$A = -37$; $B = 2700$; $A^2 = 1369$; also ist:

$A^2 - B = -1331$.

Dies ist ein vollständiger Cubus; denn es ist:

$$\sqrt[3]{A^2 - B} = \sqrt[3]{-1331} = m = -11.$$

Dadurch verwandelt sich Gl. (7) in folgende:

$4a^3 + 33a + 37 = 0$.

Diese Gl. hat eine reelle negative Wurzel, nämlich $a = -1$; daher ist:

$b = a^2 - m = (-1)^2 - (-11) = 12$; mithin ist:

$\sqrt[3]{-37 + 30\sqrt{3}} = -1 + \sqrt{12}$ oder $= -1 + 2\sqrt{3}$; daher ist:

$y = -{}^1/_2(1 + 2\sqrt{3})$; folglich $y_2 = 1{,}2320508$, $y_3 = -2{,}2320508$.

Nun ist ferner:

$x = {}^1/_2(2 \pm \sqrt{3})$; also $x_2 = 1{,}8660254$; $x_3 = 0{,}1339746$.

Digitized by Google

20. Auflösung vermittelst der symmetrischen Funktionen. Unter symmetrischen Funktionen der Wurzeln versteht man jeden algebraischen Ausdruck, worin diese Wurzeln unter sich oder mit andern Größen auf gleiche Weise verbunden vorkommen. So ist die Summe $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots$ der Wurzeln einer Gl., die Summe $\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta\ldots$ der Produkte aus je zwei derselben, die Summe der Produkte $\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta\ldots$ aus je dreien ihrer Wurzeln u. s. w. eine symmetrische Funktion derselben. Sind A, B, C, D .... die Coefficienten einer Gleichung, so finden nach §. 480 zwischen den Wurzeln und Coefficienten die Relationen: $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots=A$; $\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\ldots=B$ u. s. w. statt und es kann jede rationale symmetrische Funktion dieser Wurzeln ebenfalls vermittelst der Coefficienten der Gl. ausgedrückt werden. Die einfachsten symmetrischen Funktionen und zugleich die, vermittelst welcher man alle übrigen bilden kann, sind die Summen der gleich hohen Potenzen der Wurzeln, wie $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots$, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\ldots$ u. s. w. Sind nun die Summen der gleich hohen Potenzen der unbekannten Wurzeln gegeben, also bekannt, so lassen sich daraus die unbekannten Coefficienten A, B, C, D... ausdrücken. Denn es sei:

(1) $x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+Cx^{n-3}+Dx^{n-4}+\ldots\ldots+F=0$

die gegebene Gleichung, die wir mit X und deren Wurzeln wir mit α, β, γ, δ, ... bezeichnen. Dividirt man X durch jeden der n Faktoren des ersten Grades $x-\alpha$, $x-\beta$, $x-\gamma$...., so erhält man die verschiedenen Quotienten:

$$\frac{X}{x-\alpha}=\left\{\begin{array}{c|c|c|c|c} x^{n-1}+\alpha & x^{n-2}+\alpha^2 & x^{n-3}+\alpha^3 & x^{n-4}+\alpha^4 & x^{n-5}+\ldots\ldots \\ +A & +A\alpha & +A\alpha^2 & +A\alpha^3 & \\ & +B & +B\alpha & +B\alpha^2 & \\ & & +C & +C\alpha & \\ & & & +D & \end{array}\right.$$

$$\frac{X}{x-\beta}=\left\{\begin{array}{c|c|c|c|c} x^{n-1}+\beta & x^{n-2}+\beta^2 & x^{n-3}+\beta^3 & x^{n-4}+\beta^4 & x^{n-5}+\ldots. \\ +A & +A\beta & +A\beta^2 & +A\beta^3 & \\ & +B & +B\beta & +B\beta^2 & \\ & & +C & +C\beta & \\ & & & +D & \end{array}\right.$$

. . . . . .

. . . . . .

und so fort für jeden der Faktoren $x-\gamma$, $x-\delta$.... u. s. w. Bildet man nun die Summe dieser n Quotienten und setzt der Kürze wegen:

Digitized by Google

$$\begin{aligned}
\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots &= s_1\\
\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\ldots &= s_2\\
\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3+\ldots &= s_3\\
\alpha^4+\beta^4+\gamma^4+\delta^4+\ldots &= s_4,\\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot&\\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot&
\end{aligned}$$

so erhält man offenbar, wenn wir diese Summe mit Y bezeichnen und sie als erstes abgeleitetes Polynom betrachten:

$$(2)\quad Y=\frac{X}{x-\alpha}+\frac{X}{x-\beta}+\frac{X}{x-\gamma}+\ldots\ldots\frac{X}{x-\nu}=$$

$$\begin{array}{l|l|l|l|l}
nx^{n-1}+s_1 & x^{n-2}+s_2 & x^{n-3}+s_3 & x^{n-4}+s_4 & x^{n-5}+\ldots\ldots\\
\quad+nA & \quad+As_1 & \quad+As_2 & \quad+As_3 & \\
 & \quad+nB & \quad+Bs_1 & \quad+Bs_2 & \\
 & & \quad+nC & \quad+Cs_1 & \\
 & & & \quad+nD &
\end{array}$$

Denken wir uns nun in Gl. (1) $x+h$ statt x gesetzt, und entwickeln diese Gleichung, so erhalten wir:

$$(3)\quad \{x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+Cx^{n-3}+\ldots+Sx+T\}h^0+$$
$$\{nx^{n-1}+(n-1)Ax^{n-2}+(n-2)Bx^{n-3}+(n-3)Cx^{n-4}\ldots\}h'+$$
$$\ldots\ldots+h^n=0.$$

Hier ist der Coefficient von h^0 nichts anders, als der erste Theil der gegebenen Gl. und den Coefficienten von h' können wir als das erste abgeleitete Polynom betrachten. Hiernach ist auch:

$$(4)\quad Y=nx^{n-1}+(n-1)Ax^{n-2}+(n-2)Bx^{n-3}+(n-3)Cx^{n-4}+\ldots\ldots$$

Vergleicht man die beiden identischen Ausdrücke (2) und (4) der Summe der n Quotienten Glied für Glied, so erhält man folgende Relationen:

$$\begin{aligned}
s_1+nA &= (n-1)A \text{ oder } (5)\ A+s_1=0\\
s_2+As_1+nB &= (n-2)B \text{ oder } (6)\ 2B+A+s_2=0\\
s_3+As_2+Bs_1+nC &= (n-3)C \text{ oder } (7)\ 3C+As_2+Bs_1+s_3=0\\
s_4+As_3+Bs_2+Cs_1+nD &= (n-4)D \text{ oder } (8)\ 4D+As_3+Bs_2\\
&\quad+Cs_1+s_4=0.\\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot&\\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot&
\end{aligned}$$

Nun seien x, y, z, u die Wurzeln der Gleichung:

$$(9)\quad x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D=0.$$

Die Werthe für die Coefficienten A, B, C, D werden nach den Gl. (5), (6), (7), (8) bestimmt, wenn wir aus den 4 gegebenen Gl. die Werthe für s_1, s_2, s_3, s_4 einsetzen. Da nun $s_1=a$, $s_2=b$, $s_3=c$, $s_4=d$ ist, so ist nach (5):

$$A+a=0;\ \text{also}\ A=-a.$$

Digitized by Google

Nach (6) ist: $2B - a^2 + b = 0$; also: $B = {}^1/_2(a^2 - b)$.
Nach (7) ist: $3C - ab + {}^1/_2a(a^2 - b) + c = 0$; also:
$C = -{}^1/_6(a^3 - 3ab + 2c)$.
Nach (8) ist: $4D - ac + {}^1/_2b(a^2 - b) - {}^1/_6a(a^3 - 3ab + 2c) + d = 0$;
also: $D = {}^1/_{24}(a^4 - 6a^2b + 3b^2 + 8ac - 6d)$.
Setzen wir diese Werthe für A, B, C, D in Gl. (9), so führt die Elimination auf folgende Gl. vom 4. Grade:
$x^4 - ax^3 + {}^1/_2(a^2 - b)x^2 - {}^1/_6(a^3 - 3ab + 2c)x + {}^1/_{24}(a^4 - 6a^2b + 3b^2 + 8ac - 6d) = 0$.
Für $a = 10$, $b = 30$, $c = 100$, $d = 354$ erhalten wir:
$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$.
Nach §. 508. 9. sind die Wurzeln dieser Gleichung 1, 2, 3, 4.

Anwendungen der Gleichungen von höhern Graden.

(Heis §. 105.)

§. 513. 1. Die Zahl heiße x, so ist:
${}^1/_2x . {}^1/_3x . {}^1/_4x + 5 = 6$; also: $x^3 = 24$; daher:
$x = \sqrt[3]{24} = 2\sqrt[3]{3} = 2{,}1{,}4422495703 = 2{,}8844991406$.

2. Er habe x Körbe mit Aepfeln gekauft; dann sind in jedem Korbe $75x$ Aepfel, also in x Körben $75x^2$ Aepfel. In jedem Korbe sind ${}^{75}/_{100}x = {}^3/_4x$ mal 100 Aepfel. Da er nun für je 10 Aepfel so viel Pf. bezahlt, als jeder Korb 100 Aepfel enthält, so bezahlt er für $75x^2$ Aepfel auch ${}^{75}/_{10}x^2 . {}^3/_4x = {}^{45}/_8x^3$ Pf. Daher ist: ${}^{45}/_8x^3 = 2880$; also ${}^1/_8x^3 = 8^2$; $x^3 = 8^3$; $x = 8$ Körbe; demnach sind $75.8^2 = 4800$ Aepfel gekauft worden.

Zweite Aufl. Er habe x Aepfel gekauft. Hierfür zahlt er 2880 Pf., also für 10 Aepfel $\frac{10.2880}{x}$ Pf. Nun enthält jeder Korb so oft mal 100 Aepfel, als er für 10 Aepfel Pf. bezahlt; mithin sind in jedem Korbe $100.\frac{10.2880}{x} = \frac{100^2.288}{x}$ Aepfel und es sind der Körbe im Ganzen $x : \frac{100^2.288}{x} = \frac{x^2}{100^2.288}$. Da nun jeder Korb 75 mal so viel Aepfel enthält, als Körbe vorhanden sind, so sind auch $\frac{100^2.288}{75x}$ Körbe. Demnach ist:

Digitized by Google

$\frac{x^2}{100^2.288} = \frac{100^2.288}{75x}$ oder $\frac{x^3}{100.4.96} = 100^2.288$; daher:

$x^3 = 100^3.48^3$; also $x = 100.48 = 4800$ Aepfel.

3. Stehen die 3 Seiten des rechtwinkeligen Parallelepipeds im Verhältniß wie 3:5:7, so ist, wenn die erste Seite x^{cm} beträgt, die zweite $^5/_3x$ und die dritte $^7/_3x^{cm}$ lang; der körperliche Inhalt desselben also $x.^5/_3x.^7/_3x = ^{35}/_9x^3$ Cubikcentimeter. Es ist also: $^{35}/_9x^3 = 230685$ oder $^1/_9x^3 = 6591$; also $x^3 = 39^3$; daher: $x = 39^{cm}$ die erste, $^5/_3.39 = 65^{cm}$ die zweite und $^7/_3.39 = 91^{cm}$ die dritte Seite.

4. Ist der größere Würfel x Meter lang, so ist sein Inhalt x^3; demnach ist der Inhalt des kleinern $^8/_{27}x^3$, also seine Seite $^2/_3x$. Die Oberfläche eines jeden Würfels besteht aus 6 gleichen Quadraten; sie beträgt daher bei dem großen $6x^2$ und beim kleinern $6.^4/_9x^2 = ^8/_3x^2$ Quadratmeter. Da dieser 480 Quadratmeter weniger Oberfläche hat, als der größere, so ist: $6x^2 - ^8/_3x^2 = 480$; $x^2 = 12^2$; also $x = 12^m$ Seite des größeren Würfels; daher $^2/_3.12 = 8^m$ Seite des kleinern. Ihre bezüglichen Inhalte sind $8^3 = 512$ und $12^3 = 1728$ Cubikcentimeter.

5. Steht das Capital zu x% aus, so wird im ersten Jahre aus jedem Gulden des Capitals $1+0{,}01x$ Gld. mit den Zinsen, also in 3 Jahren $(1+0{,}01x)^3$ Gld.; demnach war das Capital mit den Zinsen in den 3 Jahren zu $192000 \times (1+0{,}01x)^3$ Gld. angewachsen; da dasselbe sich in der angegebenen Zeit durch die Zinsen und Zinseszinsen um 14763 Gld. vermehrt hatte, so betrug das Capital nebst den Zinsen 206763 Gld. Es ist daher:

$192000(1+0{,}01x)^3 = 206763$; durch 192 dividirt, gibt:

$1000(1+0{,}01x)^3 = 1076{,}890625$ oder:

$10^3(1+0{,}01x)^3 = 10{,}25^3$; daher:

$10(1+0{,}01x) = 10{,}25$; also $x = 2{,}5$ Procent.

6. Werden jedesmal x Pfd. weggenommen, so war bei der ersten Wegnahme noch $81 - x$ Pfd. Silber vorhanden. Da nun das Fehlende durch Kupfer ersetzt wird, so sind in 81 Pfd. Gemisch $81 - x$ Pfd. Silber, also in 1 Pfd. Gemisch $\frac{81-x}{81}$. Daraus folgt, daß die Güte des Silbers nach der ersten Mischung um $\frac{81-x}{81}$ Pfd. schlechter geworden ist. Da man nun von diesem schlechter gewordenen Silber zum zweitenmale x Pfd. wegnimmt und dafür so viel Kupfer hinzusetzt, so verschlechtert sich das Silber abermals

Digitized by Google

in demſelben Verhältniß wie zuvor und zwar um $\frac{81-x}{81}$ mal pro Pfd. und weil dieſe Operation auf dieſelbe Weiſe viermal wiederholt wird, ſo verſchlimmert ſich das Silber $\left(\frac{81-x}{81}\right)^4$ mal pro Pfd. Da zuletzt nur noch 16 Pfd. reines Silber in der Miſchung enthalten ſind, ſo war alſo in jedem Pfd. nur noch $^{16}/_{81}$ Pfd. Silber enthalten, mithin hatte ſich das Silber um $^{16}/_{81}$ mal verſchlimmert. Daher iſt: $\left(\frac{81-x}{81}\right)^4 = {}^{16}/_{81}$; folglich $\frac{81-x}{81} = {}^{2}/_{3}$; alſo $x = 27$ Pfd.

7. Die beiden Zahlen ſeien x und y, ſo ſoll nach der Aufgabe ſein:

$$y - x = \frac{x}{y} = x^2 + y^2.$$ Hieraus ergibt ſich:

$$(1)\ y - x = \frac{x}{y} \text{ und } (2)\ y - x = x^2 + y^2.$$

Aus (1) folgt: $x = \frac{y^2}{y+1}$. Setze dieſen Werth für x in (2) und entwickele dieſe Gl., ſo erhält man:

$$y^3 + y^2 - {}^1/_2 = 0.$$

Soll dieſe cubiſche Gl. nach der Cardaniſchen Formel §. 489 aufgelöſt werden, ſo muß man zuvor das zweite Glied y^2 eliminiren. Setzt man daher $y = z - {}^1/_3$, ſo erhalten wir folgende Gl. in z:

$z^3 - {}^1/_3 z - {}^{23}/_{54} = 0$. Hier iſt $p = {}^1/_3$, $q = {}^{23}/_{54}$; daher iſt:

$$z = \sqrt[3]{{}^1/_2 \cdot {}^{23}/_{54} \pm \sqrt{{}^1/_4 \cdot ({}^{23}/_{54})^2 - {}^1/_{27} \cdot ({}^1/_3)^3}} = \sqrt[3]{{}^{23}/_{108} \pm \sqrt{{}^{513}/_{11664}}}$$

$$= \sqrt[3]{0{,}212962962962 \pm 0{,}209717623201}$$

$$= \sqrt[3]{0{,}422680586163} + \sqrt[3]{0{,}003245339761}$$

$$= 0{,}750477 + 0{,}148053 = 0{,}898530;\ \text{daher:}$$

$$y = z - 0{,}333333 = 0{,}565197;\ \text{folglich:}$$

$$x = \frac{0{,}565197^2}{1{,}565197} = 0{,}204094.$$

8. Die Seite des Würfels ſei x, ſo beträgt ſein Cubikinhalt x^3 und der Quadratinhalt ſeiner Oberfläche $6x^2$. Da nun der Cubikinhalt den Quadratinhalt der Oberfläche um 100 überſteigt, ſo iſt:

$$x^3 - 6x^2 - 100 = 0.$$

Digitized by Google

Setzen wir $x = 6$, so wird $N = -100$
$x = 7$, „ „ $N = -51$
$x = 8$, „ „ $N = +28$.
Demnach liegt der Werth für x zwischen 7 und 8 und zwar näher bei 8 als bei 7. Setzen wir daher $x = 7{,}5$ und $x = 7{,}6$, so erhalten wir bei dieser Annahme $\varphi' = -15{,}625$ und $\varphi'' = -7{,}584$; daher ist nach der regula falsi $x = 7{,}694$. Setzen wir ferner $x = 7{,}694$ und $x = 7{,}695$, so wird $\varphi' = +0{,}280795384$ und $\varphi'' = +0{,}366077375$; daher $x = 7{,}69070$. Setze jetzt $x = 7{,}69070$ und $x = 7{,}69071$, so wird $\varphi' = -0{,}0003928254$ und $\varphi'' = +0{,}0004586668$; daher $x = 7{,}69070450$.

Zweite Aufl. Soll die Gl. nach der Cardanischen Formel gelöst werden, so schaffe man das zweite Glied fort. Zu dem Ende setze man $x = y + 2$ und wir erhalten die Gl.:

$$y^3 - 12y - 116 = 0.$$

Hier ist: $p = 12$, $q = 116$; also:

$$y = \sqrt[3]{58 \pm \sqrt{58^2 - 4^3}} = \sqrt[3]{58 + 57{,}445626291300};$$ daher:

$$y = 4{,}869217 + 0{,}821487 = 5{,}690704;$$ folglich:

$$x = 5{,}690704 + 2 = 7{,}690704.$$

9. Ist die Seite des Würfels x^{cm}, so ist die Summe aller Kanten $12x$, die Summe der Seitenflächen $6x^2$ und der Cubikinhalt des Würfels x^3. Demnach ist:

$$x^3 + 6x^2 + 12x = 100 \text{ oder:}$$
$$x^3 + 6x^2 + 12x - 100 = 0.$$

Setze zur Fortschaffung des zweiten Gliedes $x = y - 2$, so hat man: $x^3 + 6x^2 + 12x - 100 = y^3 - 108 = 0$; daher:

$y^3 = 108$; $y = \sqrt[3]{108} = 3\sqrt[3]{4} = 3.1{,}587401 = 4{,}762203$; folglich:

$$x = 4{,}762203 - 2 = 2{,}762203.$$

10. Ist die dritte Seite x Centimeter lang, so ist die erste $x+4$ und die zweite $x+16$ Centimeter lang; folglich der körperliche Inhalt des Steines $x(x+4)(x+16)$; mithin ist nach der Angabe:

$$x(x+4)(x+16) = 6409 \text{ oder:}$$
$$x^3 + 20x^2 + 64x - 6409 = 0.$$

Man setze $x = {}^1/_3(y - 20)$, so erhalten wir:

$$y^3 - 624y - 168563 = 0.$$

Weil $p = 624$ und $q = 168563$, so ist:

$$y = \sqrt[3]{{}^1/_2.168563 \pm \sqrt{({}^{168563}/_2)^2 - 208^3}}$$

$$y = \sqrt[3]{{}^1/_2.168563 \pm {}^1/_2\sqrt{28413484969 - 35995648}}$$

Digitized by Google

$$= \sqrt[3]{{}^1/_2(168563 \pm 168456{,}16439003)}$$
$$= 55{,}234 + 3{,}766 = 59;\ \text{daher:}$$

$x = {}^1/_3(59-20) = 13^{cm}$; also die erste Seite $13+4=17^{cm}$ und die zweite $13+16=29^{cm}$

Zweite Aufl. Da das Absolutglied das Produkt aller 3 Wurzeln ist, so müssen die zu suchenden Wurzeln Theiler von 6409 sein. Nun ist $6409 = 13.17.29$; folglich muß 6409 durch 13, 17 und 29 theilbar sein. Setzt man daher x nacheinander gleich 13, 17, 29, so wird die Gleichung $x^3+20x^2+64x-6409=0$ in Null verwandelt; folglich sind die Wurzeln der Gl. 13, 17, 29 und es ist also:

$$x(x+4)(x+16) = 13(13+4)(13+16).$$

11. Die Höhe werde um x Meter verlängert, so wird die Breite um $2x^m$ vermehrt und die Länge um $3x^m$ vermindert; dadurch wird die neue Höhe $4{}^1/_4+x$, die Breite $7{}^1/_2+2x$ und die Länge $8{}^3/_4-3x$ Meter; daher ist der körperliche Inhalt $(4{}^1/_4+x)(7{}^1/_2+2x)(8{}^3/_4-3x)$ Cubikmeter, und weil sich in diesem Falle der Inhalt um $47{}^{29}/_{32}$ Cubikmeter vermindert, so ist:

$$(4{}^1/_4+x)(7{}^1/_2+2x)(8{}^3/_4-3x) = (4{}^1/_4 \times 7{}^1/_2 \times 8{}^3/_4) - 47{}^{29}/_{32} \text{ oder:}$$
$$x^3 + {}^{61}/_{12}x^2 - {}^{355}/_{48}x - {}^{511}/_{64} = 0.$$

Setzt man in dieser Gl. $x = y - {}^{61}/_{36}$, so hat man:

$$y^3 - {}^{1729}/_{108}y + {}^{41633}/_{2916} = 0.$$

Wir lösen diese Gleichung auf nach §. 495. V. Nun ist $p = {}^{1729}/_{108}$, $q = {}^{41633}/_{2916}$, und weil ${}^1/_{27}p^3 > {}^1/_4 q^2$, so sind die Formeln zur Auflösung:

$$\sin 3\varepsilon = \frac{3q}{p}\cdot\frac{1}{\sqrt{{}^4/_3 p}} \text{ und } y = \sqrt{{}^4/_3 p}.\sin(60^0-\varepsilon).$$

Die beiden andern Werthe für y sind unbrauchbar.

Nun ist: $\log\sin 3\varepsilon = 9{,}7627452-10$
$3\varepsilon = 35^0 23' 11{,}34''$
$\varepsilon = 11^0 47' 43{,}78''$
$60^0-\varepsilon = 48^0 12' 16{,}22''$
$\log\sin(60^0-\varepsilon) = 9{,}8724642-10$; hierzu addirt:
$\log\sqrt{{}^4/_3 p} = 0{,}6646550$
gibt $\log y = 0{,}5371192$; also $y = 3{,}4444$; daher:
$x = 3{,}4444 - 1{,}6944 = 1{,}75 = 1{}^3/_4$ Meter.

12. Nennen wir die kleinste Zahl x, so heißen die 3 andern: $x+1$, $x+2$, $x+3$; daher ist:

$$x^3+(x+1)^3+(x+2)^3+(x+3)^3 = (x+9)^3 \text{ oder:}$$
$$x^3-3x^2-67x-231=0. \text{ Setze } x = y+1, \text{ so wird:}$$
$$y^3-70y-300=0.$$

Digitized by Google

Hier ist: $p = 70$, $q = 300$; daher:

$$y = \sqrt[3]{150 \pm \sqrt{150^2 - (70/3)^3}} = \sqrt[3]{150 \pm 98{,}726241}$$

$y = \sqrt[3]{248{,}976241} + \sqrt[3]{51{,}023759} = 6{,}291 + 3{,}709 = 10$; also:
$x = 11$; mithin heißen die vier Zahlen 11, 12, 13, 14.

Dividirt man die Gl. $x^3 - 3x^2 - 67x - 231 = 0$ durch $x - 11$, so hat man:

$$x^2 + 8x + 21 = 0.$$

Aus dieser Gl. ergibt sich $x = -4 \pm \sqrt{-5}$; mithin sind die vier Zahlen auch $-4 \pm \sqrt{-5}$, $-3 \pm \sqrt{-5}$, $-2 \pm \sqrt{-5}$, $-1 \pm \sqrt{-5}$.

13. Der Barren wiege x Pfd. Jedes Pfd. desselben enthält ebenso viel, also x Loth Silber, also enthalten x Pfd. auch x^2 Loth reines Silber. Wollte man für jedes Pfd. seines Gewichtes 4 Pf. bezahlen, so müßte man 4x Pf. dafür geben; da er nun 20 Pf. pro Loth mehr bezahlt, so kostet das Loth reines Silber $4x + 20 = 4(x + 5)$ Pf.; folglich kostet das Silber des Barrens $4x^2(x + 5)$ Pf. Mithin ist:
$4x^2(x + 5) = 405000$ oder $x^3 + 5x^2 - 101250 = 0$.
Diese Gleichung hat nur eine mögliche Wurzel, nämlich 45; folglich $x = 45$ Pfd.

14. Die Anzahl der Kugeln in den verschiedenen Schichten werden, von der obersten an gerechnet, durch die Dreieckszahlen 1, 3, 6, 10, 15 ... angegeben. Die n^{te} Dreieckszahl ist die Summe der n ersten natürlichen Zahlen; daher die n^{te} Dreieckszahl $= \frac{1}{2}(n + 1)n$ und so viel Kugeln liegen auch in der n^{ten} Schicht einer vollständigen dreiseitigen Pyramide. Um nun sämmtliche Kugeln einer solchen Pyramide von n Schichten zu finden, muß die Summe der n Schichten, d. h. die Summe der n ersten Dreieckszahlen gesucht werden. Dieselbe ist nach §. 475:

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}.$$

Da sich nun im Ganzen 4495 Kugeln in der Pyramide befinden, so ist:

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3} = 4495 \text{ oder:}$$

$$n^3 + 3n^2 + 2n - 26970 = 0.$$

Suchen wir die Theiler des Absolutgliedes auf, so finden wir, daß, da $26970 = 2.3.5.29.31$ ist, die einfachen Divisoren der Zahl 2, 3, 5, 29 und 31 sind; unter diesen ist

Digitized by Google

29 diejenige, welche, für n in die Gleichung eingesetzt, die Gleichung auf Null reducirt; folglich ist $n = 29$; es lagen also 29 Kugeln an jeder Seite. Löst man aber die Gl. auf nach §. 489 und setzt $n = y - 1$, so erhalten wir: $y^3 - y - 26970 = 0$. Hier ist $p = 1$, $q = 26970$; also ist:

$$y = \sqrt[3]{13485 \pm \sqrt{13485^2 - (1/3)^3}} =$$

$$\sqrt[3]{13485 \pm 13484{,}99999986255}$$

$= 29{,}999 + 0{,}001 = 30$; also $n = 29$ wie oben.

15. In den vierseitigen Pyramiden bilden die Schichten sämmtlich Quadrate und die Kugeln werden in den verschiedenen Schichten, von der obersten an gerechnet, durch die Quadratzahlen 1, 4, 9, 16, 25 u. s. w. angegeben. Wir sollen also hier die Summe einer Reihe von Quadratzahlen finden, d. h. die Reihe $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2$ summiren. Diese Aufgabe findet ihre Lösung in §. 410. 22 und in §. 472. 9. Hiernach ist diese Summe:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3}.$$ Es ist daher:

$\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = 90000$ oder $n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n - 270000 = 0$.

Hier ist offenbar $n^3 < 270000$ und $(n+1)^3 > 270000$ oder $n < \sqrt[3]{270000}$ und $(n+1) > \sqrt[3]{270000}$. Daraus folgt, daß n hier um keine ganze Einheit von $\sqrt[3]{270000}$ verschieden ist; folglich ist die ganze Zahl, die uns $\sqrt[3]{270000}$ gibt, der Werth für n, den man durch die Formel $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ prüfen muß, um zu entscheiden, ob 90000 auch eine wirkliche viereckige Pyramidalzahl ist. Zieht man nun die Cubikwurzel aus 270000, so erhält man 64 Ganze; weshalb $n = 64$. Setzen wir diesen Werth in obige Formel, so haben wir:

$\frac{1}{6}.64(64+1)(2.64+1) = \frac{1}{6}.64.65.129 = 89440$,

mithin ist 90000 keine viereckige Pyramidalzahl und es sind hieran $90000 - 89440 = 560$ zu viel.

16. Man gibt den Kugelhaufen auch oft die Form von Rechtecken. In der obersten Schichte oder im Rücken befindet sich alsdann nur eine Reihe von m Kugeln; diese liegen auf zwei Reihen, jede von $m+1$ Kugeln; diese wieder auf 3 Reihen, jede von $m+2$ Kugeln u. s. w., nämlich in jeder folgenden Schichte eine Reihe und in jeder Reihe eine Kugel mehr. Bei dieser Anordnung werden also die Schichten nach

Digitized by Google

der Reihenfolge folgende Anzahl von Kugeln haben: m, 2(m + 1), 3(m + 2), 4(m + 3) u. s. w., also in der n^{ten} Schicht n(m+n—1). Suchen wir nun zu bestimmen, wie die Kugeln in dem ganzen Haufen von n Schichten liegen. Setzt man in der identischen Gl.

$$6y(m+y-1) = y(y+1)(2y+3m-2) - (y-1)y(2y+8m-4)$$

nach und nach y = 1, 2, 3, 4 ... n, so erhalten wir folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
6.1.m &= 1.2.3m - 0\\
6.2.(m+1) &= 2.3.(2+3m) - 1.2.3m\\
6.3.(m+2) &= 3.4.(4+3m) - 2.3.(2+3m)\\
6.4.(m+3) &= 4.5.(6+3m) - 3.4.(4+3m)\\
&\cdots\\
6n(m+n-1) &= n(n+1)(2n+3m-2) - (n-1)n(2n+3m-4).
\end{aligned}$$

Summiren wir diese Gleichungen, so haben wir:

$$6\{1.m+2(m+1)+3(m+2)+\ldots.+n(m+n-1)\} = n(n+1)(3m+2n-2);$$ folglich:

$$1.m+2(m+1)+3(m+2)+\ldots.+n(m+n-1) = \frac{n(n+1)(3m+2n-2)}{1.2.3}.$$

Diese Formel drückt die Anzahl der Kugeln aus, die sich in einem vierseitigen länglichen Kugelhaufen befinden. Bestimmen wir jetzt die Werthe für m und n. In unsrer Aufgabe hat die Basis 17 Kugeln in der Länge und sie habe x Kugeln in der Breite; dann kann der Kugelhaufen auch nur x Schichten haben; daher ist n = x. In der Schichte der Basis liegen nun 17x Kugeln und nach den oben angestellten Betrachtungen liegen auch in der untersten Schicht n(m+n—1) Kugeln; daher ist:

$$17x = n(m+n-1) \text{ oder } n = x \text{ gesetzt:}$$
$$17x = x(m+x-1); \text{ folglich } m = 18-x.$$

In der obersten Schicht oder im Rücken liegen also 18—x Kugeln. Setzen wir nun die Werthe für m und n in die obige Formel, welche die Anzahl der im Haufen befindlichen Kugeln ausdrückt, so haben wir:

$$\tfrac{1}{6}n(n+1)(3m+2n-2) = \tfrac{1}{6}x(x+1)(52-x).$$

Nun soll der Haufen 1183 Kugeln enthalten; es ist daher:

$$\tfrac{1}{6}x(x+1)(52-x) = 1183 \text{ oder:}$$
$$x^3 - 51x^2 - 52x + 7098 = 0. \text{ Setze } x = y+17, \text{ so wird:}$$
$$y^3 - 919y - 3612 = 0.$$

Hier ist p = 919 und q = 3612 und $4p^3 > 27q^2$; daher nach §. 495. VI aufzulösen. Es ist also:

Digitized by Google

$$\sin 3\varepsilon = \frac{3q}{p}\cdot\frac{1}{\sqrt{^4/_3 p}}$$

und weil y nur einen negativen Werth haben kann:

$$y = -\sqrt{^4/_3 p}.\sin\varepsilon.$$ Nun ist:

$$\log\sin 3\varepsilon = 9{,}5274264 - 10$$
$$3\varepsilon = 19^0 41' 4{,}54''$$
$$\varepsilon = 6^0 33' 41{,}51''$$
$$\log\sin\varepsilon = 9{,}0579328 - 10$$
$$\log\sqrt{^4/_3 p} = 1{,}5441271 \quad \text{addirt}$$
$$\log(-y) = 0{,}6020599;\ \text{also}\ (-y) = 4;\ y = -4.$$

Es ist daher $x = y + 17 = 17 - 4 = 13$; folglich liegen 13 Kugeln in der Breite und $18 - 13 = 5$ im Rücken.

17. Da der Rücken 11 Kugeln enthält, so ist $m = 11$. Liegen in der Breite des Haufens x Kugeln, so enthält derselbe auch x Schichten, daher $n = x$. Nach dem vorigen Beispiele liegen in der Grundfläche $n(m+n-1)$ Kugeln; setzen wir hierin die Werthe für m und n, so erhalten wir $x(x+10)$ Kugeln in der Grundfläche und der ganze Kugelhaufen hat daher $^1/_6 x(x+1)(2x+31)$ Kugeln. Daher ist:

$$^1/_6 x(x+1)(2x+31) = 2856 \text{ oder:}$$

$x^3 + {}^{33}/_2 x^2 + {}^{31}/_2 x - 8568 = 0$. Setze $x = {}^1/_2(y-11)$, so wird: $y^3 - 301y - 66564 = 0$. Hier ist $p = 301$, $q = 66564$; daher ist:

$$y = \sqrt[3]{33282 \pm \sqrt{33282^2 - (^{301}/_3)^3}}$$
$$= \sqrt[3]{33282 \pm {}^1/_9 . 299401{,}404039794}$$
$$= \sqrt[3]{66548{,}822671082} + \sqrt[3]{15{,}177328917}$$

$= 40{,}524 + 2{,}476 = 43$; daher $x = {}^1/_2(43 - 11) = 16$.

Die Breite der Basis enthält also 16 Kugeln und die Basis $x(x+10) = 16.26 = 416$ Kugeln.

18. Die kleinere der beiden vollständigen Kugelpyramiden habe x Schichten, so hat die größere $x+6$ Schichten; demnach enthält die kleinere Kugelpyramide $^1/_6 x(x+1)(x+2)$ und die größere $^1/_6(x+6)(x+7)(x+8)$ Kugeln. Es ist also:

$$^1/_6 x(x+1)(x+2) + {}^1/_6(x+6)(x+7)(x+8) = 3269 \text{ oder:}$$
$$x^3 + 12x^2 + 74x - 9639 = 0.$$

Setze $x = y - 4$, so ist:

$$y^3 + 26y - 9807 = 0 \text{ oder;}$$

$y(y^2+26) = 21(21^2+26)$; daher $y = 21$; mithin $x = 17$.

Die Anzahl der Kugeln in der kleinen Pyramide beträgt also: $^1/_6 . 17 . 18 . 19 = 969$ und in der größern:

$$3269 - 969 = 2300.$$

Digitized by Google

19. Liegen in beiden Pyramiden an jeder Seite x Kugeln, so sind nach Nro. 14 in der dreiseitigen Kugelpyramide $^1/_6x(x+1)(x+2)$ und nach Nro. 15 in der vierseitigen $^1/_6x(x+1)(2x+1)$ Kugeln. Da nun in dieser 816 Kugeln mehr sind, als in jener, so ist:

$^1/_6x(x+1)(2x+1)-{}^1/_6x(x+1)(x+2)=816$; hieraus:

$x^3-x=4896$ oder $x(x^2-1)=17(17^2-1)$;

folglich $x=17$. Es liegen also an jeder Seite der beiden Pyramiden 17 Kugeln; mithin enthält die vierseitige Kugelpyramide $^1/_6.17.18.35=1785$ und die dreiseitige

$$1785-816=969 \text{ Kugeln.}$$

20. Der Behälter könne durch die erste Röhre in x Stunden gefüllt werden, so wird er durch die zweite in x+4, durch die dritte in x+8 und durch die vierte in x+12 Stunden gefüllt werden.

Die erste Röhre füllt dann in 1 Stunde $\frac{1}{x}$ des Behälters;

„ zweite „ „ „ „ „ $\frac{1}{x+4}$ „

„ dritte „ „ „ „ „ $\frac{1}{x+8}$ „

„ vierte „ „ „ „ „ $\frac{1}{x+12}$ „

Werden nun alle 4 Röhren eine Stunde lang zusammen geöffnet, so wird

$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+8}+\frac{1}{x+12}$ des Behälters gefüllt.

Nun wird in $115^1/_5$ Minuten $= {}^{48}/_{25}$ Stunden der Behälter von allen 4 Röhren gefüllt, also in 1 Stunde $^{25}/_{48}$ des Behälters; es ist daher:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+8}+\frac{1}{x+12}={}^{25}/_{48} \text{ oder:}$$

$$\frac{4x^3+72x^2+352x+384}{x^4+24x^3+176x^2+384x}={}^{25}/_{48}; \text{ hieraus:}$$

(1) $25x^4+408x^3+944x^2-7296x-18432=0$; also:

(2) $x^4+{}^{408}/_{25}x^3+{}^{944}/_{25}x^2-{}^{7296}/_{25}x-{}^{18432}/_{25}=0.$

Um die Wurzeln dieser Gl. zu finden, müssen die Brüche aus derselben fortgeschafft werden. Dies wird aber nur dadurch bewerkstelligt, daß wir die Gl. mit einer Zahl multipliciren, die durch die Nenner der Brüche theilbar oder ein

Digitized by Google

Vielfaches der Nenner ist. Dabei darf aber x^4 keinen Coefficienten erhalten. Dies letztere wird nur dann der Fall sein, wenn man für x die Form eines Bruches wählt. Da die Nenner der Brüche alle $= 25$ sind, so setze man $x = \frac{y}{25}$ und die Gl. (2) verwandelt sich in folgende:

$$\frac{y^4}{25^4} + \frac{408}{25^4}y^3 + \frac{944}{25^3}y^2 - \frac{7296}{25^2} - \frac{18432}{25} = 0 \text{ oder:}$$

$$y^4 + 408y^3 + 25.944y^2 - 25^2.7296y - 25^3.18432 = 0 \text{ oder:}$$
$$y^4 + 408y^3 + 23600y^2 - 4560000y - 288000000 = 0.$$

Unter den Faktoren des Absolutgliedes ist 100 derjenige, der, wenn er an Stelle von y gesetzt wird, die Gl. in Null verwandelt; folglich ist $y = 100$ und daher $x = 100 : 25 = 4$; mithin wird der Behälter in 4 Stunden durch die erste Röhre gefüllt.

Um den Werth für x in Gl. (1) zu ermitteln, hätte man auch auf folgende Weise verfahren können. Man gebe der Gl. (1) zunächst folgende Form:

$$25x^4 + 2^3.51x^3 + 2^4.59x^2 - 2^7.57x - 2^{11}.9 = 0.$$

Setzt man hierin $x = 2^2.z$, so erhalten wir aus vorstehender Gl. folgende:

$$25.2^8.z^4 + 2^9.51z^3 + 2^8.59z^2 - 2^9.57z - 2^{11}.9 = 0.$$

Diese Gl. durch 2^8 dividirt, gibt:

$$25z^4 + 2.51.z^3 + 59.z^2 - 2.57z - 2^3.9 = 0 \text{ oder:}$$
$$25z^4 + 102z^3 + 59z^2 - 114z - 72 = 0.$$

Aus dieser Gl. folgt, daß für z die einzige positive Wurzel nur 1 sein kann; folglich ist $x = 2^2.1 = 4$.

21. Nach §. 422 Nro. 48. α) erhalten wir, wenn $k = 28000$, $p = x$, $n = 3$ und $u = 4000$ gesetzt wird, folgende Gl.:

$$28000(1+0{,}01x)^3 - \frac{400000}{x}\{(1+0{,}01x)^3 - 1\} = 19803\,{}^1/_2.$$

Entwickelt man diese Gl., so erhält man:

$$0{,}056x^3 + 16x^2 + 1440x = 7607 \text{ oder:}$$
$$7x^3 + 16.5^3.x^2 + 288.5^4.x = 7607.5^3.$$

Setze hierin $x = 5.z$, so wird:

$$7.5^3.z^3 + 16.5^5.z^2 + 288.5^5.z = 7607.5^3 \text{ oder:}$$
$$7z^3 + 16.5^2.z^2 + 288.5^2z = 7607.$$

Aus dieser Gleichung geht hervor, daß z nur den Werth 1 haben kann; folglich ist $x = 5.1 = 5$; also stand das Capital zu 5 %. Die Gleichung in β) ergibt sich aus § 422 Nr. 48. β) und findet in dem Handbuche ihre Erledigung.

Digitized by Google

22. Aus § 385 Nr. 178 und 179 ergibt sich, daß der mittlere Zahlungstermin, wenn wir annehmen, daß nach x Jahren die drei Summen auf einmal zu erlegen sind, ohne Rücksicht auf den Rabatt zu nehmen, aus folgender Gl. resultirt:

$$(1000+500+500)x = 1.1000+3.500+6.500 \text{ oder}$$
$$2000x = 5500; \text{ also } x = 2^{3}/_{4}.$$

Wir sehen hieraus, daß x zwischen 2 und 3 liegt. Um nun einen genaueren Werth für x zu erhalten, suchen wir den Werth der einzelnen Capitalien beim mittleren Zahlungstermin mit Berechnung des Rabatts. Bezahlt er die 1000 Mark, die er nach 1 Jahre zu zahlen hat, erst nach x Jahren, so bezahlt er sie x — 1 Jahr zu spät. Für diese Zeit soll er 5% pro Jahr Rabatt vergüten. Für diese Zeit beträgt der Rabatt 5(x — 1) %. Demnach wachsen 100 Mark in x — 1 Jahr zu 100+5(x — 1); also 1000 Mark zu $\frac{100+5(x-1)}{100}\cdot 1000$ M. an. Die zweite Summe hat er über 3 Jahre zu bezahlen; mithin bezahlt er dieselbe 3—x Jahre zu früh. Wenn ihm nun gestattet ist, 5% Rabatt auf 100 zu rechnen, so beträgt die zweite Rate bei der Abzahlung $\frac{100}{100+5(3-x)}\cdot 500$ Mark. Ebenso ergibt sich für die dritte Rate von 500 Mark, die erst nach 6 Jahren fällig ist, $\frac{100}{100+5(6-x)}\cdot 500$ Mark. Die Summe dieser 3 durch den Rabatt vermehrter bezüglich verminderter Raten darf nun, da für den Schuldner wie für den Gläubiger weder Vortheil noch Nachtheil entstehen soll, nicht größer und auch nicht kleiner sein, als die Summe der Raten 1000+500+500 = 2000. Daher ist:

$$(1)\quad \frac{\{100+5(x-1)\}1000}{100}+\frac{100.500}{100+5(3-x)}+\frac{100.500}{100+5(6-x)}=2000.$$

Es muß also der Rabatt, den die 1000 Mark in x — 1 Jahr bringen, dem Rabatt gleich sein, den die beiden andern Capitalien von je 500 Mark in 3 — x bezüglich in 6 — x Jahren bringen. Nun bringt 1 Mark in 1 Jahre $^{5}/_{100}$, also 1000 M. in x—1 Jahren $^{5}/_{100}.1000(x-1)$. Von den zu früh bezahlten Capitalien bringt das erste

$$\frac{5}{100+5(3-x)}500(3-x)$$

Digitized by Google

und das zweite $\frac{5}{100+5(6-x)}\cdot 500(6-x)$ M. Rabatt.

Mithin ist:

$$^5/_{100}.1000(x-1)=\frac{5.500(3-x)}{100+5(3-x)}+\frac{5.500(6-x)}{100+5(6-x)} \text{ oder:}$$

$$^5/_{100}.1000(x-1)=^5/_{100}\cdot\frac{500(3-x)}{1+^5/_{100}(3-x)}+^5/_{100}\cdot\frac{500(6-x)}{1+^5/_{100}(6-x)};$$

daher ist:

$$(2)\quad 2000x+^5/_{100}\cdot\frac{500(3-x)^2}{1+^5/_{100}(3-x)}+^5/_{100}\cdot\frac{500(6-x)^2}{1+^5/_{100}(6-x)}=5500.$$

Jede der beiden Gleichungen (1) und (2) gibt entwickelt:

$$(3)\quad x^3-70x^2+1227x-2758=0.$$

Setzen wir zur Fortschaffung des zweiten Gliedes:

$x=^1/_3(y+70)$, so erhalten wir:

$$y^3-3657y+12544=0.$$

Weil $4p^3>27q^2$, so findet hier § 495 V Anwendung, und es ist:

$$\sin 3\varepsilon=\frac{3q}{p\sqrt{^4/_3p}}=\frac{3.12544}{3657\sqrt{^4/_3.3657}}=\frac{12544}{1219\sqrt{4876}}.$$

Nun ist:

$$\log\sin 3\varepsilon=9{,}1684005-10$$
$$3\varepsilon=8^0 49'29{,}25''$$
$$\varepsilon=2^0 49'29{,}25''$$
$$60^0+\varepsilon=62^0 49{,}29{,}25''$$
$$\log\sin(60^0+\varepsilon)=9{,}9492024-10$$
$$\log\sqrt{4876}=1{,}8440318$$
$$\log(-y)=1{,}7932342$$
$$y=-62{,}1204;\ \text{also:}$$
$$x=^1/_3(70-62{,}1204)=2{,}6265.$$

23. Nach der Gl. (2) in der vorhergehenden Aufgabe haben wir also:

$$(a+a'+a''+..+b+b'+b''+..)x+\frac{p}{100}\cdot\frac{b(u-x)^2}{1+\frac{p}{100}(u-x)}+$$
$$\frac{p}{100}\cdot\frac{b'(u'-x)^2}{1+\frac{p}{100}(u'-x)}+\frac{p}{100}\cdot\frac{b''(u''-x)^2}{1+\frac{p}{100}(u''-x)}+\ldots$$
$$=(at+a't'+a''t''+..+bu+b'u'+b''u''+..).$$

Setzt man hierin $a+a'+a''+..=S(a)$; $b+b'+b''+..=S(b)$; $at+a't'+a''t''+..=S(at)$; $bu+b'u'+b''u''=S(bu)$ und $\frac{p}{100}=k$, so erhalten wir:

Digitized by Google

$$\{S(a)+S(b)\}x+k\frac{b(u-x)^2}{1+k(u-x)}+k\frac{b'(u'-x)^2}{1+k(u'-x)}$$
$$+k\frac{b''(u''-x)}{1+k(u''-x)}+..=S(at)+S(bu) \text{ oder:}$$
$$x+\frac{k}{S(a)+S(b)}\left\{\frac{b(u-x)^2}{1+k(u-x)}+\frac{b'(u'-x)^2}{1+k(u'-x)}+\frac{b''(u''-x)^2}{1+k(u''-x)}+...\right\}$$
$$=\frac{S(at)+S(bu)}{S(a)+S(b)}.$$

24. Setzt man den Werth des unendlichen Kettenbruches $=x$, so ist:

$$a+\sqrt{\frac{b}{x}}=x \text{ oder } x-a=\sqrt{\frac{b}{x}}; \text{ hieraus } (x-a)^2=\frac{b}{x}..$$

Diese Gl. gibt entwickelt $x^3-2ax^2+a^2x-b=0$.

25. Man setze: $\sqrt[3]{(a+\sqrt[3]{[a+\sqrt[3]{(a+..)}]})}=x$, so ist:

$$a+\sqrt[3]{(a+\sqrt[3]{[a+\sqrt[3]{(a+..)}]})}=x^3.$$

Da nun der irrationale Theil der linken Seite dieser Gl. $=x$ ist, so haben wir: $a+x=x^3$ oder $x^3-x=a$, eine Gleichung, durch welche man den Werth der angegebenen unendlichen Reihe erhält:

26. Es handelt sich zunächst bei dieser Aufgabe darum, den Werth der Zahl 456356 in unserm dekadischen Zahlensystem festzustellen. Nun ist in jedem Zahlensystem der Werth der ersten höhern Einheit der Grundzahl oder Basis gleich; die zweite Potenz der Grundzahl gibt die zweite höhere Einheit; durch die dritte Potenz der Grundzahl entsteht die dritte höhere Einheit; durch die n^{te} Potenz entsteht die n^{te} höhere Einheit. Ist also x die Basis eines beliebigen Zahlensystems, so ist:

$x^1 = 10 =$ der Einheit der ersten höhern Ordnung;
$x^2 = 100 =$ " " " " " "
$x^3 = 1000 =$ " " " zweiten " "
. . . . . .
. . . . . .
$x^n = 10^n =$ " " " n^{ten} " "

Soll nun die Zahl 456356, dessen Basis x sei, in unser dekadisches Zahlensystem übersetzt werden, so bestimme man zunächst die Werthe der Einheiten höherer Ordnungen, also hier x^1, x^2, x^3, x^4, x^5 und nehme jeden dieser Werthe so oft, als die Menge der Einheiten dieser Ordnung anzeigt. Hienach ist die fragliche Zahl, welche 4 Einheiten der fünften, 5 Einheiten der vierten, 6 Einheiten der dritten, 3 Ein-

Digitized by Google

heiten der zweiten und 5 Einheiten der ersten höhern Ordnung, und 6 Einheiten der 0ten Ordnung hat, in unserm dekadischen Zahlensystem $= 4x^5+5x^4+6x^3+3x^2+5x^1+6x^0$ und weil dieselbe in diesem System 81479 ausmacht, so ist:

$$4x^5+5x^4+6x^3+3x^2+5x^1+6x^0=81479 \text{ oder}$$
$$4x^5+5x^4+6x^3+3x^2+5x-81473=0.$$

Das Absolutglied dieser Gleichung hat die Zahlen 7, 103, und 113 zu Theilern. Setzen wir in obige Gl. $x=7$, so wird die Gleichung auf Null reducirt; folglich ist die verlangte Basis $=7$.

27. Nach §. 414 Nr. 14 hat man zur Bestimmung des Exponenten e folgende Gleichung aufzulösen:

$$\frac{e^n-1}{e-1}-\frac{s}{a}=0.$$

Setzen wir in diese Gl. die angegebenen Werthe, so erhalten wir, wenn $a=1$, $s=31$, $n=5$, $e=x$ gesetzt wird:

$$\frac{x^5-1}{x-1}-{}^{31}/_{1}=0 \text{ oder}$$
$$x^4+x^3+x^2+x-30=0.$$

Die Theiler des Absolutgliedes sind, 2, 3, 5, 6, 10, 15. Unter denselben ist nur 2, welcher der Gleichung genügt; folglich ist der Exponent der geometrischen Progression, also $x_1=2$; die Progression heißt also 1, 2, 4, 8, 16.

Da nun 2, eine Wurzel der Gleichung ist, so ist dieselbe durch $x-2$ theilbar. Nehmen wir diese Division vor, so erhalten wir:

$$x^3+3x^2+7x+15=0.$$

Um hieraus das zweite Glied wegzuschaffen, setze man $x=y-1$, und wir erhalten:

$$y^3+4y+10=0.$$

Lösen wir diese Gl. nach §. 495 I auf, so wird, da:

$$\tang\alpha=\frac{p}{3q}\sqrt{{}^{4}/_{3}p},\ \tang\beta=\sqrt[3]{\tang{}^{1}/_{2}\alpha} \text{ ist, } y=-\sqrt{{}^{4}/_{3}p}\cotq 2\beta.$$

Nun ist:

$$\log p = 0{,}6020600$$
$$\log 3q = 1{,}4771213$$
$$\sqrt{\log {}^{4}/_{3}p} = 0{,}3634993$$
$$\log\tang\alpha = 9{,}4884380-10$$
$$\alpha = 17^0 6' 52{,}73''$$
$$ {}^{1}/_{2}\alpha = 8^0 33' 26{,}36''$$
$$\log\tang {}^{1}/_{2}\alpha = 29{,}1774613-30$$

$$\log\sqrt[3]{\tang{}^{1}/_{2}\alpha} = \log\tang\beta = 9{,}7258204-16$$
$$\beta = 28^0 0' 28{,}75''$$

Digitized by Google

$$2\beta = 56^0 0' 57{,}5''$$
$$\log \operatorname{cotg} 2\beta = 9{,}8287262 - 10$$
$$\log \sqrt[4]{{}^3/_8 p} = 0{,}3634993$$
$$\log(-y) = 0{,}1922255$$

$y = -1{,}556773$; daher $x_2 = -2{,}556773$.

Demnach heißt in diesem Falle die Progression $1, -2{,}556773, +6{,}537086, -16{,}71383, +42{,}73334$.

Dividire jetzt die Gleichung $x^3+3x^2+7x+15=0$ durch $x+2{,}556773$, so erhält man die quadratische Gl. $x^2+0{,}44323x+5{,}866763$; hieraus folgt, daß:

$$x_3 \text{ und } x_4 = -0{,}221615 \pm 2{,}41198\sqrt{-1}.$$

28. α) A kommt 24 Wochen länger aus als B, und da B 40 Wochen länger auskommt, als C, so kommt A $24+40=64$ Wochen länger aus als C. Haben nun die Armeekorps B und C zusammen x Regimenter, so sind im Ganzen $x+5$ Regimenter. Diese kommen mit dem Vorrath 36 Wochen aus; demnach würde 1 Regiment mit demselben Vorrath $36(x+5)$ Wochen ausreichen; mithin kommen die 5 Regimenter von A $\frac{36(x+5)}{5}$ Wochen damit aus. Weil nun A bezüglich 24 und 64 Wochen länger damit auskommt als B und C, so kommt B $\frac{36(x+5)}{5}-24=\frac{12(3x+5)}{5}$ und C $\frac{36(x+5)}{5}-64=\frac{4(9x-35)}{5}$ Wochen lang damit aus.

Die Regimenter von A verzehren somit in 1 Woche $\frac{5}{36(x+5)}$ des Vorrathes, die Regimenter von B $\frac{5}{12(3x+5)}$ und die von C $\frac{5}{4(9x-35)}$ des Vorrathes. Nun verzehren sämmtliche Regimenter der 3 Armeekorps, da der Vorrath für 36 Wochen ausreicht, in 1 Woche ${}^1/_{36}$ des Vorrathes; daher ist:

$$\frac{5}{36(x+5)}+\frac{5}{12(3x+5)}+\frac{5}{4(9x-35)} = {}^1/_{36} \text{ oder}$$
$$\frac{1}{9(x+5)}+\frac{1}{3(3x+5)}+\frac{1}{9x-35} = {}^1/_{45}.$$

Entwickelt man diese Gleichung, so erhält man:

$$27x^3-330x^2-1225x+1500=0.$$

Setze hierin $x={}^1/_{27}y$, so wird:

$$y^3-330y^2-33075y+1093500=0.$$

Digitized by Google

Setzt man hierin $y = z + 110$, so resultirt:

$$z^3 - 69375z - 5206750 = 0.$$

In dieser Gl. ist $4p^3 > 27q^2$, daher haben wir nach §. 495 VI:

$$\sin 3\varepsilon = \frac{3q}{p} \cdot \frac{1}{\sqrt{{}^4/_3 p}} \text{ und } z = +\sqrt{{}^4/_3 p}\, \sin(60^0 + \varepsilon).$$

Nun ist: $p = 69375$ und $q = 5206750$; daher $3q = 15620250$; $\frac{3q}{p} = \frac{15620250}{69375} = \frac{124962}{555}$ und ${}^4/_3 p = 92500$. Nun ist:

$$\log \frac{3q}{p} = 2{,}3524850.$$

$$\log \sqrt{{}^4/_3 p} = 2{,}4830708$$
$$\log \sin 3\varepsilon = 9{,}8694142 - 10$$
$$3\varepsilon = 47^0 45' 28{,}48''$$
$$\varepsilon = 15^0 55' 9{,}49''$$
$$60^0 + \varepsilon = 75^0 55' 9{,}49''$$
$$\log \sin(60^0 + \varepsilon) = 9{,}9867511 - 10$$
$$\log \sqrt{{}^4/_3 p} = 2{,}4830708$$
$$\log z = 2{,}4698219$$

$z = 295$; daher $y = 295 + 110 = 405$; folglich $x = 405 : 27 = 15$; demnach kommen die 5 Regimenter von A $\frac{36(15+5)}{5} = 144$ Wochen mit dem Vorrath aus. Die Regimenter von B würden mit dem Vorrath $\frac{12(45+5)}{5}$ $= 120$ und die von C $\frac{4(135-35)}{5} = 80$ Wochen ausreichen. Die Regimenter von A verzehren also in 1 Woche ${}^1/_{144} = {}^5/_{720}$, die von B ${}^1/_{120} = {}^6/_{720}$ und die von C ${}^1/_{80} = {}^9/_{720}$ des Vorrathes; demnach verzehren 5 Regimenter ${}^5/_{720}$; folglich werden ${}^6/_{720}$ des Vorrathes von 6 und ${}^9/_{720}$ von 9 Regimentern verzehrt.

Oder: Die Anzahl der Regimenter der 3 Armeekorps steht im umgekehrten Verhältnisse zu der Zeit, die jedes zur Aufzehrung des Vorrathes gebrauchte. Es ist daher, wenn B x und C y Regimenter hatte:

$144 : 120 = x : 5$; also $x = 6$ Regimenter für B und
$144 : 80 = y : 5$; „ $y = 9$ „ „ C.

Zweite Auflösung. Da die Regimenter von A 24 Wochen länger als die von B und 64 Wochen länger auskommen, als die von C, so folgt daraus, daß B und C bezüglich mehr Regimenter haben müssen als A. Nun habe B x und C y Regimenter mehr als A; alsdann hat B $5+x$ und C $5+y$

Digitized by Google

Regimenter: demnach betragen die Regimenter der 3 Armeekorps zusammen $x+y+15$. Ein Regiment würde also mit dem Vorrathe $36(x+y+15)$ Wochen auskommen; folglich die 5 Regimenter von A

$\frac{36(x+y+15)}{5}$, die von B $\frac{36(x+y+15)}{x+5}$,

und die Regimenter von C

$\frac{36(x+y+15)}{y+5}$ Wochen. Es ist daher:

$$\frac{36(x+y+15)}{5} - 24 = \frac{36(x+y+15)}{x+5}$$

$$\frac{36(x+y+15)}{5} - 64 = \frac{36(x+y+15)}{y+5} \text{ oder:}$$

(1) $3x^2+3xy+35x-50=0.$

(2) $9y^2+55y+9xy-400=0.$

Setzt man aus (1) den Werth für y in (2) und entwickelt diese Gl., so wird:

$$3x^3+2x^2-155x+150=0.$$

Aus dieser Gl. folgt, daß x nur den Werth 1 haben kann, demnach $x=1$ und daher $y=\frac{50-38}{3}=4$; hienach hat das Armeekorps B $5+1=6$ und das von C $5+4=9$ Regimenter.

28. β) Wenn A x, B y und C z Wochen mit dem Proviant auskommt, so kommen A und B in 1 Woche mit $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}$ des Proviants aus, also mit dem ganzen Proviant $\frac{xy}{x+y}$ Wochen; ferner kommen B und C in 1 Woche mit $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ $=\frac{y+z}{yz}$ des Proviants aus, also mit dem ganzen $\frac{yz}{y+z}$ Wochen. Da nun B und C 9 Wochen länger mit dem Vorrath auskommen, als A und B so ist:

$$(1)\ \frac{xy}{x+y}+9=\frac{yz}{y+z}.$$

A und C kommen mit dem ganzen Vorrath $\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{z}}=\frac{xz}{x+z}$

und B und C $\frac{1}{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=\frac{yz}{y+z}$ Wochen aus und weil A und

Digitized by Google

C 15 Wochen länger mit dem Vorrath auskommen, als B und C, so ist:

$$(2)\quad \frac{xz}{x+z} = \frac{yz}{y+z} + 15.$$

In 1 Woche verzehren A, B, C $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = \frac{xy+yz+xz}{xyz}$ des Vorrathes, daher den ganzen Vorrath in $\frac{xyz}{xy+yz+xz}$ Wochen und weil das 30 Wochen ausmacht, so ist:

$$(3)\quad \frac{xyz}{xy+yz+xz} = 30.$$

Stelle die aus (1), (2) und (3) gefundenen Werthe für x einander gleich, so ist:

$$(4)\quad \frac{y(yz-9y-9z)}{y^2+9y+9z} = \frac{30yz}{yz-30y-30z}$$

$$(5)\quad \frac{z(yz+15y+15z)}{z^2-15y-15z} = \frac{30yz}{yz-30y-30z}.$$

Entwickelt man diese beiden Gleichungen, so erhalten wir:

(6) $y(z^2-69z+270) = 3z(13z-90)$

(7) $y^2(z-15)-45y(z+10)-450z = 0.$

Setze aus (6) den Werth für y in (7) und entwickele diese Gleichung, so wird:

(8) $19z^3-3720z^2+54900z-162000 = 0$ oder:

$$(9)\quad z^3 - \frac{3720z^2}{19} + \frac{54900z}{19} - \frac{162000}{19} = 0.$$

Setze $z = {}^1/_{19}u$, so wird:

(10) $u^3-3720u^2+1043100u-58482000 = 0.$

Setze $u = v+1240$, so erhalten wir:

(11) $v^3-3569700v-2578286000 = 0.$

Weil $4p^3 > 27q^2$, so ist diese Gl. nach §. 495. VI aufzulösen. Es ist daher:

$\sin 3\varepsilon = \frac{3q}{p}\cdot\frac{1}{\sqrt{{}^4/_3 p}}$; also $v = \sqrt{{}^4/_3 p}.\sin(60^0+\varepsilon)$. Nun ist:

$p = 3569700$, $q = 2578286000$; also:

$$\frac{3q}{p} = \frac{3.2578286000}{3569700} = \frac{25782860}{11899}.$$

$\log 3q = 7{,}4113311$

$\log p = 4{,}0755105$

$\log\sqrt{{}^4/_3 p} = 3{,}3387852$

$\log\sin 3\varepsilon = 9{,}9970354-10$

Digitized by Google

$$3\varepsilon = 83^0 18'46{,}66''$$
$$\varepsilon = 27^0 46'15{,}55''$$
$$60^0 + \varepsilon = 87^0 46'15{,}55''$$
$$\log\sin(60^0+\varepsilon) = 9{,}9996712 - 10$$
$$\log\sqrt[4]{{}^3/_8 p} = 3{,}3387852$$
$$\log v = 3{,}3384564$$

$v = 2180$; daher $u = 2180 + 1240 = 3420$; folglich:
$z = 3420 : 19 = 180$ Wochen. Aus (6) folgt:

$$y = \frac{3.180.(13.180-90)}{180^2 - 69.180 + 270} = \frac{1215000}{20250} = 60 \text{ Wochen.}$$

Aus (3) ist:

$$x = \frac{30.60.180}{60.180 - 30.60 - 30.180} = \frac{30.60.180}{20.180} = 90 \text{ Wochen.}$$

In 1 Woche verzehren A, B, C $^1/_{90} + {}^1/_{60} + {}^1/_{180} = {}^1/_{30}$, also in 6 Wochen $6.{}^1/_{30} = {}^1/_5$ des Vorraths; mithin wäre nach 6 Wochen noch $^4/_5$ des Vorraths übrig, wenn nicht $^3/_{10}$ hiervon verloren gegangen wäre, weshalb jetzt der Vorrath nur noch $^4/_5 - {}^3/_{10} = {}^1/_2$ beträgt.

Ferner verhält sich die Anzahl der Soldaten wie $^1/_{90} : {}^1/_{60} : {}^1/_{180}$ oder wie 24:36:12. Nun verliert A $^1/_8$, B $^1/_6$ und C $^1/_4$ seiner Soldaten. Auf je 24, 36, 12 Mann von A, B, C kommen daher jetzt 21 für A, 30 für B und 9 für C. Mithin kommen auf je $24+36+12 = 72$ Mann vor dem Gefechte nur je $21+30+9 = 60$ Mann nach dem Gefechte. Mithin ist das Verhältniß der Anzahl der Soldaten von früher gegen jetzt wie 72:60. Wenn nun 72 Mann in 6 Wochen $^1/_5$ des Vorraths verzehrten, so fragt es sich jetzt, in welcher Zeit 60 Mann die noch übrige Hälfte desselben aufzehren? Nach §. 243 erhalten wir, wenn die gesuchte Zeit x Wochen beträgt:

$(60.{}^1/_5) : (72.{}^1/_2) = 6 : x$; also $x = 18$ Wochen.

29. Wenn man $\sqrt[5]{a^5+b} = a+x$, setzt, wobei x noch näher zu bestimmen ist, so erhält man:

$$a^5 + b = (a+x)^5 = a^5 + 5a^4x + 10a^3x^2 + 10a^2x^3 + 5ax^4 + x^5.$$

Vernachlässigt man x^5, so wird:

$$a^5 + b = a^5 + 5a^4x + 10a^3x^2 + 10a^2x^3 + 5ax^4.$$

Dividire diese Gl. durch 5a, so resultirt:

$$^1/_5 a^4 + \frac{b}{5a} = {}^1/_5 a^4 + a^3x + 2a^2x^2 + 2ax^3 + x^4.$$

Addirt man zu beiden Seiten $^1/_{20}a^4$, so ist:

$$^1/_4 a^4 + \frac{b}{5a} = {}^1/_4 a^4 + a^3x + 2a^2x^2 + 2ax^3 + x^4 = (x^2 + ax + {}^1/_2 a^2)^2.$$

Digitized by Google

Ziehe aus beiden Theilen die Quadratwurzel, so hat man:

$$x^2+ax+{}^1/_2a^2=\sqrt{{}^1/_4a^4+\frac{b}{5a}};\ \text{hieraus folgt:}$$

$$(x+{}^1/_2a)^2=\sqrt{{}^1/_4a^4+\frac{b}{5a}}-{}^1/_4a^2;\ \text{mithin:}$$

$$x=-{}^1/_2a+\sqrt{\sqrt{{}^1/_4a^4+\frac{b}{5a}}-{}^1/_4a^2}.$$

Setzen wir diesen Werth für x oben ein, so erhalten wir:

$$\sqrt[5]{a^5+b}={}^1/_2a+\sqrt{\sqrt{{}^1/_4a^4+\frac{b}{5a}}-{}^1/_4a^2}.$$

30. Heißen die beiden Zahlen x und y, so ist (1) $x=y^2$ und (2) $x=\sqrt{y}$. Aus (1) und (2) ergibt sich $y^2=\sqrt{y}$; daher $y^5-1=0$, also $y_1=1$. Die beiden andern Wurzeln dieser Gleichung sind in der Gl. $y^2+y+1=0$ enthalten. Löst man diese quadratische Gl. auf, so sind die beiden andern Wurzeln $y_2=-{}^1/_2(1-\sqrt{-3})$ und $y_3=-{}^1/_2(1+\sqrt{-3})$; daher $x_1=1$, $x_2={}^1/_4(1\mp\sqrt{-3})^2$ oder $x_2=-{}^1/_2(1+\sqrt{-3})$ und $x_3=-{}^1/_2(1-\sqrt{-3})$.

31. Nimmt man die Entwickelung des fraglichen Produktes vor, so wird:

$a^6+2ya^4b^2-x^2a^4b^2-2xa^2b^4+y^2a^2b^4-b^6=a^6-b^6$ oder:

$y^2a^2b^4-2xa^2b^4+2ya^4b^2-x^2a^4b^2=0$ oder durch a^2b^2 dividirt:

$$y^2b^2-2xb^2+2ya^2-x^2a^2=0;\ \text{also:}$$

$$b^2(y^2-2x)+a^2(2y-x^2)=0.$$

Nach §. 112 ist sowohl (1) $y^2-2x=0$, als auch (2)

$$2y-x^2=0.$$

Setzt man aus (2) den Werth für y in (1), so hat man:

$x^4-8x=0$ oder $x(x^3-8)=0$; daher $x_1=0$ und

$$x^3-8=0;\ \text{also}\ x_2=2.$$

Die beiden andern Werthe für x ergeben sich aus der quadratischen Gl.:

$$x^2+2x+4=0\ \text{oder}\ (x+1)^2=-3;\ \text{folglich:}$$

$x_3=-(1+\sqrt{-3})$, $x_4=-(1-\sqrt{-3})$; daher:

$y_1=0$, $y_2=2$, $y_3=-(1-\sqrt{-3})$, $y_4=-(1+\sqrt{-3})$.

Digitized by Google

E. Transscendente Gleichungen.

(Heis §. 106.)

§. 514. Zu den transscendenten Gleichungen gehören die Exponential-, logarithmische und trigonometrische Gl. Kommt in einer Gl. eine bekannte Größe mit einem unbekannten Exponenten vor, so ist es eine Exponential-Gleichung. Solche Gleichungen kommen in den §§. 384, 387, 392 und 400 vor. Erscheint die unbekannte Größe x unter der Gestalt $\log x$ in einer Gl., so ist es eine logarithmische, z. B. $x^{a+b\log x} = c$. Wenn endlich die unbekannte Größe unter dem Zeichen irgend einer trigonometrischen Linie steht, so kann man die Gl. eine trigonometrische im weitesten Sinne des Wortes nennen, obgleich solche Gl. nicht nothwendig trigonometrische Gegenstände betreffen. Z. B: $a \sin x + b \cos x = c$.

Die Auflösung der folgenden Aufgaben geschieht durch die regula falsi, welche in §. 409 näher dargestellt worden ist. Dieselbe führt zwar nur dann mittelst einmaliger Anwendung zum wahren Werthe der Unbekannten, wenn diese in der ersten Potenz vorkommt; kommt dieselbe aber in einer höhern Potenz vor, so gibt die einmalige Anwendung der Regel nur Näherungswerthe. Diese entfernen sich aber vom wahren Werthe um so weniger, je kleiner der Fehler der Sätze ist und hierin liegt der Vorzug dieser Regel, weil sie durch wiederholte Anwendung den wahren Werth der Unbekannten in immer engere Grenzen einschließt.

1. α) Drückt man die gegebene Gl. logarithmisch aus, so wird:

$$x \log x = \log 100 \text{ oder } x \log x - 2 = 0.$$

Um die Grenzen des Werthes von x zu finden, setze man nacheinander $x = 0, 1, 2, 3, 4$, so geben erst die Substitutionen von 3 und 4 Resultate mit entgegengesetzten Zeichen. Denn für $x = 3$ bezüglich 4 wird:

$$\varphi' = 3.0{,}4771213 - 2 = -0{,}56863$$
$$\varphi'' = 4.0{,}60206 - 2 = +0{,}40824.$$

Demnach liegt der Werth von x zwischen 3 und 4. Um nun einen genauern Werth für x zu erhalten, finden wir vermittelst der regula falsi:

$$x = \frac{-0{,}56863.4 - 0{,}40824.3}{-0{,}56863 - 0{,}40824} = \frac{349926}{97687} = 3{,}58.$$

Nun setze man weiter $\alpha' = 3{,}58$ und $\alpha'' = 3{,}59$, so wird:

Digitized by Google

$$\varphi' = 3{,}58.0{,}553883 - 2 = -0{,}0171$$
$$\varphi'' = 3{,}59.0{,}555094 - 2 = -0{,}0072;\ \text{daher:}$$
$$x = \frac{-0{,}0171.3{,}59 + 0{,}0072.3{,}58}{-0{,}0171 + 0{,}0072} = \frac{356{,}16}{99} = 3{,}597.$$

Ferner setze man: $\alpha' = 3{,}597$ und $\alpha'' = 3{,}598$, so wird:

$$\varphi' = 3{,}597.0{,}5559404 - 2 = -0{,}0002823812$$
$$\varphi'' = 3{,}598.0{,}5560612 - 2 = +0{,}0007081976$$
$$x = \frac{-0{,}0002823812.3{,}598 - 0{,}0007081976.3{,}597}{-0{,}0002823812 - 0{,}0007081976}$$
$$= \frac{35633943{,}248}{9905788} = 3{,}59728506.$$

Dieser Werth für x ist in den 7 ersten Decimalen richtig. Eine nochmalige Anwendung der Regel würde eine noch größere Genauigkeit liefern.

1. β) Drückt man die Gl. durch Logarithmen aus, so wird: $x \log x - \log 0{,}776 = 0$ oder $x \log x + 0{,}110138 = 0$.

Bestimmen wir jetzt die Grenzen des Werthes für x.

Setzt man:
$x = 0{,}0$ so wird $\varphi = +0{,}110138$
$x = 0{,}1$ „ „ $\varphi = +0{,}010138$
$x = 0{,}2$ „ „ $\varphi = -0{,}029656$
$x = 0{,}3$ „ „ $\varphi = -0{,}046725$
$x = 0{,}4$ „ „ $\varphi = -0{,}049038$
$x = 0{,}5$ „ „ $\varphi = -0{,}040377$
$x = 0{,}6$ „ „ $\varphi = -0{,}022971$
$x = 0{,}7$ „ „ $\varphi = +0{,}001707.$

Hieraus folgt, daß x zwei Werthe hat, wovon der erste zwischen 0,1 und 0,2 und der zweite zwischen 0,6 und 0,7 liegt. Suchen wir den ersten in engere Grenzen zu ziehen, so ist, weil $\alpha' = 0{,}1$ $\alpha'' = 0{,}2$:

$$x = \frac{0{,}010138.0{,}2 + 0{,}029656.0{,}1}{0{,}010138 + 0{,}029656} = \frac{49932}{397940} = 0{,}12.$$

Setze $\alpha' = 0{,}12$, so wird:

$$\varphi' = 0{,}12 \log 0{,}12 + 0{,}110138 = -0{,}000360.$$

Nun setze man weil φ' negativ, also der Werth für α' zu groß genommen ist, $\varphi'' = 0{,}11$, so wird:

$\varphi'' = 0{,}11 \log 0{,}11 + 0{,}110138 = +0{,}004692$; daher:

$$x = \frac{-0{,}000360.0{,}11 - 0{,}004692.0{,}12}{-0{,}000360 - 0{,}004692} = \frac{60264}{505200} = 0{,}11928.$$

Dieser Werth für x ist schon in den 4 ersten Decimalstellen genau. Man setze ferner:

$\alpha' = 0{,}11928$ und $\alpha'' = 0{,}11927$, so wird:

$\varphi' = 0{,}11928 \log 0{,}11928 + 0{,}11013827 = -0{,}00000874$
$\varphi'' = 0{,}11927 \log 0{,}11927 + 0{,}11013827 = -0{,}00000385$. Nun ist:

Digitized by Google

$\varphi'\alpha'' = -0{,}00000874.0{,}11927 = -0{,}0000010424198$
$\varphi''\alpha' = -0{,}00000385.0{,}11928 = -0{,}0000005831918$
$\varphi'\alpha'' - \varphi''\alpha' = -0{,}0000005831918$
$\varphi' - \varphi'' = -0{,}00000489$; daher:

$$x_1 = \frac{5831918}{48900000} = 0{,}1192621.$$

Berechnung des zweiten Werthes für x, welcher zwischen 0,6 und 0,7 liegt.

Für $\alpha' = 0{,}6$ und $\alpha'' = 0{,}7$ wird $\varphi' = -0{,}022971$ und $\varphi'' = +0{,}001707$; daher:

$$x_2 = \frac{-0{,}022971.0{,}7 - 0{,}001707.0{,}6}{-0{,}022971 - 0{,}001707} = \frac{171039}{246780} = 0{,}693.$$

Setze $\alpha' = 0{,}693$ und $\alpha'' = 0{,}694$, so wird:
$\varphi' = 0{,}693 \log 0{,}693 + 0{,}11013827 = -0{,}00023360$
$\varphi'' = 0{,}694 \log 0{,}694 + 0{,}11013827 = +0{,}00004175$
$\varphi'\alpha'' = -0{,}00023360.0{,}694 = -0{,}00016211840$
$\varphi''\alpha' = +0{,}00004175.0{,}693 = +0{,}00002893275$
$\varphi'\alpha'' - \varphi''\alpha' = -0{,}00019105115$
$\varphi' - \varphi'' = -0{,}00027535$; daher:

$$x_2 = \frac{19105115}{27535000} = 0{,}693848.$$

2. Es ist einleuchtend, daß in dieser Gleichung x zunächst den Werth von 3 hat; weshalb $x_1 = 3$. Um den zweiten Werth für x zu erhalten, potenzire man zuerst die Gl. mit x, dann mit 3, so erhalten wir:

$$x^3 = 3^x; \text{ daher } x \log 3 - 3 \log x = 0.$$

Setzt man der Reihe nach $x = 1,\ 2,\ 2^1/_{10},\ 2^2/_{10},\ 2^3/_{10},\ 2^4/_{10},\ 2^5/_{10}$, so erhält man erst für die beiden letzten Substitutionen Werthe mit entgegengesetzten Zeichen; mithin liegt ein zweiter Werth für x zwischen 2,4 und 2,5. Setzen wir also $\alpha' = 2{,}4$ und $\alpha'' = 2{,}5$, so wird:

$$\varphi' = +0{,}00445 \text{ und } \varphi'' = -0{,}00102;$$

daher ist der erste Näherungswerth:

$$x_2 = \frac{0{,}00445.2{,}5 + 0{,}00102.2{,}4}{0{,}00445 + 0{,}00102} = \frac{13573}{5470} = 2{,}48.$$

Jetzt setze $\alpha' = 2{,}48$ und $\alpha'' = 2{,}47$, so wird:
$\varphi' = 2{,}48 \log 3 - 3 \log 2{,}48 = -0{,}0000940$
$\varphi'' = 2{,}47 \log 3 - 3 \log 2{,}47 = +0{,}0003986$; also:
$\varphi'\alpha'' = -0{,}0000940.2{,}47 = -0{,}000232180$
$\varphi''\alpha' = +0{,}0003986.2{,}48 = +0{,}000988528$
$\varphi'\alpha'' - \varphi''\alpha' = -0{,}001220708$; $\varphi' - \varphi'' = -0{,}0004926$;
daher zweiter Näherungswerth:

$$x_2 = \frac{1220708}{492600} = 2{,}4780.$$

Digitized by Google

Setze endlich $\alpha' = 2{,}4780$ und $\alpha'' = 2{,}4781$, so wird:
$\varphi' = 2{,}4780 \log 3 - 3 \log 2{,}4780 = +0{,}0000026757$
$\varphi'' = 2{,}4781 \log 3 - 3 \log 2{,}4781 = -0{,}0000022001$; also:
$\varphi'\alpha'' = +0{,}00000663065217$; $\varphi''\alpha' = -0{,}00000545184780$
$\varphi'\alpha'' - \varphi''\alpha' = +0{,}00001208249997$; $\varphi' - \varphi'' = 0{,}0000048758$;
daher dritter Näherungswerth:

$$x_2 = \frac{1208249997}{487580000} = 2{,}478055.$$

3. Um die Gleichung $10^x = x^{10}$ aufzulösen, nimmt man auf beiden Seiten die Logarithmen und man erhält:
$x = 10 \log x$ oder $10 \log x - x = 0$.
Es ist leicht ersichtlich, daß für $x = 10$ die Gl. annullirt wird, folglich $x_1 = 10$. Ueberdies hat x auch noch einen zwischen 1 und 2 liegenden Werth; denn für $x = 1$ wird $\varphi' = -1$ und für $x = 2$ wird $\varphi'' = +1{,}0103$. Vermittelst der regula falsi erhalten wir als ersten Näherungswerth:

$$x_2 = \frac{30103}{20103} = 1{,}4.$$

Setzt man jetzt $\alpha' = 1{,}4$ und $\alpha'' = 1{,}3$, so wird:
$\varphi' = 10 \log 1{,}4 - 1{,}4 = +0{,}06128$
$\varphi'' = 10 \log 1{,}3 - 1{,}3 = -0{,}16057$; daher zweiter Näherungswerth:

$$x = \frac{0{,}06128.1{,}3 + 0{,}16057.1{,}4}{0{,}06128 + 0{,}16057} = \frac{304462}{221850} = 1{,}372.$$

Setze ferner $\alpha' = 1{,}372$ und $\alpha'' = 1{,}371$, so wird:
$\varphi' = 10 \log 1{,}372 - 1{,}372 = +0{,}001541$
$\varphi'' = 10 \log 1{,}371 - 1{,}371 = -0{,}000625$; also:
$\varphi'\alpha'' = +0{,}002112711$; $\varphi''\alpha' = -0{,}0008575$
$\varphi'\alpha'' - \varphi''\alpha' = +0{,}002970211$; $\varphi' - \varphi'' = +0{,}002166$;
daher dritter Näherungswerth:

$$x_2 = \frac{2970{,}211}{2166} = 1{,}371288.$$

4. Drückt man diese Gleichung logarithmisch aus, so wird:
$x \log x = \log 100 + \log x$ oder $(x-1) \log x - 2 = 0$.
Für $x = 0{,}1$ wird $\varphi = -1{,}1$
„ $x = 0{,}01$ „ $\varphi = -0{,}02$
„ $x = 0{,}001$ „ $\varphi = +0{,}997$.
Hieraus folgt, daß zwischen 0,01 und 0,001 eine Wurzel der Gleichung liegt. Bestimmen wir dieselbe genauer, so erhalten wir als ersten Näherungswerth:

$$x = \frac{-0{,}02.0{,}001 - 0{,}997.0{,}01}{-0{,}02 - 0{,}997} = \frac{9{,}99}{1017} = 0{,}0098.$$

Setze $\alpha' = 0{,}0098$ und $\alpha'' = 0{,}0097$; so wird:

Digitized by Google

$$\varphi' = (0{,}0098-1)\log 0{,}0098 - 2 = -0{,}010912064416$$
$$\varphi'' = (0{,}0097-1)\log 0{,}0097 - 2 = -0{,}006300044219;$$ also:
$$\varphi'\alpha'' = -0{,}000105847024;\quad \varphi''\alpha' = -0{,}000061740433$$
$$\varphi'\alpha''-\varphi''\alpha' = -0{,}000044106591;\quad \varphi'-\varphi'' = -0{,}004612;$$

daher erhalten wir als zweiten Näherungswerth:

$$x = \frac{44{,}106591}{4612} = 0{,}009563.$$

Setze jetzt $\alpha' = 0{,}009563$ und $\alpha'' = 0{,}009564$, so wird:

$$\varphi' = +0{,}0000942223346;\quad \varphi'' = +0{,}0000472371344$$
$$\varphi'\alpha'' = +0{,}000000911424081144$$
$$\varphi''\alpha' = +0{,}000000451728716 2672$$
$$\varphi'\alpha''-\varphi''\alpha' = +0{,}000000449413691 8472$$
$$\varphi'-\varphi'' = +0{,}0000469852302;$$

daher haben wir als dritten Näherungswerth:

$$x_1 = \frac{4494136{,}918472}{469852302} = 0{,}009565\ldots$$

Nun hat x noch einen zweiten Wurzelwerth; denn setzt man x nach einander gleich 1, 2, 3, 4, 5, so findet erst für die beiden letztern Substitutionen ein Zeichenwechsel statt; mithin liegt der zweite Werth für x zwischen 4 und 5.

Setzen wir $\alpha' = 4$ und $\alpha'' = 5$, so wird:

$$\varphi' = 3\log 4 - 2 = -0{,}19382;\quad \varphi'\alpha'' = -0{,}9691$$
$$\varphi'' = 4\log 5 - 2 = +0{,}79588;\quad \varphi''\alpha' = +3{,}1835$$
$$\varphi'\alpha''-\varphi''\alpha' = -4{,}1526;\quad \varphi'-\varphi'' = -0{,}9897;$$

daher erster Näherungswerth:

$$x_2 = \frac{41526}{9897} = 4{,}19.$$

Setze $\alpha' = 4{,}19$ und $\alpha'' = 4{,}20$, alsdann wird:

$$\varphi' = 3{,}19\log 4{,}19 - 2 = -0{,}01513734$$
$$\varphi'' = 3{,}20\log 4{,}20 - 2 = -0{,}00560320$$
$$\varphi'\alpha'' = -0{,}063576828;\quad \varphi''\alpha' = -0{,}023477408$$
$$\varphi'\alpha''-\varphi''\alpha' = -0{,}04009942;\quad \varphi'-\varphi'' = -0{,}00953414;$$

folglich zweiter Näherungswerth:

$$x_2 = \frac{4009942}{953414} = 4{,}20587.$$

Setze $\alpha' = 4{,}20587$ und $\alpha'' = 4{,}20586$, so wird:

$$\varphi' = 3{,}20587\log 4{,}20587 - 2 = +0{,}000000593546$$
$$\varphi'' = 3{,}20586\log 4{,}20586 - 2 = -0{,}000008850872$$
$$\varphi'\alpha'' = +0{,}00000249637137956$$
$$\varphi''\alpha' = -0{,}00003722561701864$$
$$\varphi'\alpha''-\varphi''\alpha' = +0{,}0000397219883982$$
$$\varphi'-\varphi'' = +0{,}000009444418;$$

Digitized by Google

daher ist der dritte Näherungswerth:

$$x_2 = \frac{39721988{,}3982}{9444418} = 4{,}2058696\ldots$$

5. Potenzirt man die Gl. $100\sqrt[x]{x} = x$ mit x, so wird:

$$100^x . x = x^x.$$

Drücken wir diese Gl. logarithmisch aus, so ist:

$$x\log 100 + \log x = x\log x \text{ oder:}$$
$$(x-1)\log x = 2x;$$

hieraus wird, wenn wir durch x dividiren:

$$\frac{x-1}{x}\log x - 2 = 0.$$

Setzt man $x = 0{,}1$, so wird $\varphi = +7$.
„ „ $x = 0{,}2$, „ „ $\varphi = +0{,}79588$
„ „ $x = 0{,}3$, „ „ $\varphi = -0{,}7799497$.

Mithin liegt zwischen 0,2 und 0,3 eine Wurzel der Gl. Um dieselbe genauer zu bestimmen, haben wir nach der regula falsi:

$$x_1 = \frac{0{,}7958.0{,}3 + 0{,}7799.0{,}2}{0{,}7958 + 0{,}7799} = \frac{3947{,}2}{15757} = 0{,}25.$$

Setze $\alpha' = 0{,}25$ und $\alpha'' = 0{,}24$, so wird:

$$\varphi' = \frac{0{,}25-1}{0{,}25}(-0{,}60206) - 2 = -0{,}19382$$

$$\varphi'' = \frac{0{,}24-1}{0{,}24}(-0{,}6197888) - 2 = -0{,}03734$$

$$\varphi'\alpha'' = -0{,}0465168;\ \varphi''\alpha' = -0{,}009335$$
$$\varphi'\alpha'' - \varphi''\alpha' = -0{,}0371818;\ \varphi' - \varphi'' = -0{,}15648;$$

also zweiter Näherungswerth:

$$x_1 = \frac{3718{,}18}{15648} = 0{,}2376.$$

Setze $\alpha' = 0{,}2376$ und $\alpha'' = 0{,}2377$, so wird:

$$\varphi' = \frac{0{,}2376-1}{0{,}2376}.(-0{,}6241536) - 2 = +0{,}0027555$$

$$\varphi'' = \frac{0{,}2377-1}{0{,}2377}.(-0{,}6239708) - 2 = +0{,}0010641$$

$$\varphi'\alpha'' = +0{,}00065498235;\ \varphi''\alpha' = +0{,}00025283016$$
$$\varphi'\alpha'' - \varphi''\alpha' = +0{,}00040215219;\ \varphi' - \varphi'' = +0{,}0016914;$$

also dritter Näherungswerth:

$$x_1 = \frac{4021{,}5219}{16914} = 0{,}2377629\ldots$$

Digitized by Google

Die Gleichung hat noch einen zweiten Wurzelwerth, der zwischen 100 und 110 liegt. Denn für

für $x = 100$ wird $\varphi' = -0{,}02$ und

„ $x = 110$ „ $\varphi'' = +0{,}0228$.

Schließen wir den Werth für x in engere Grenzen ein, so hat man:

$$x_2 = {}^{44800}/_{428} = 104{,}6.$$

Setze jetzt $\alpha' = 104{,}6$ und $\alpha'' = 104{,}5$, so wird:

$$\varphi' = \frac{104{,}6-1}{104{,}6}.2{,}0195317-2 = +0{,}0002245$$

$$\varphi'' = \frac{104{,}5-1}{104{,}5}.2{,}0191163-2 = -0{,}0002054$$

$\varphi'\alpha'' = +0{,}02346025$; $\varphi''\alpha' = -0{,}02148484$

$\varphi'\alpha''-\varphi''\alpha' = +0{,}04494509$; $\varphi'-\varphi'' = +0{,}0004299$; daher:

$$x_2 = \frac{449450{,}9}{4299} = 104{,}54778\ldots$$

6. α) Setzt man $x = 0$, so wird $\varphi' = -2$; setzt man $x = 1$, so wird $\varphi'' = +1$; also liegt zwischen 0 und 1 ein Wurzelwerth der Gleichung und ein erster Näherungswerth ist daher $x = {}^2/_3 = 0{,}6$.

Nun haben wir vermittelst Logarithmen:

$$\log(2^x+3^x)-\log 4 = 0.$$

Setze $\alpha' = 0{,}6$ und $\alpha'' = 0{,}7$, so wird:

$\varphi' = 0{,}5376756-0{,}6020600 = -0{,}0643844$

$\varphi'' = 0{,}5777330-0{,}6020600 = -0{,}0243270$

$\varphi'\alpha'' = -0{,}04506908$; $\varphi''\alpha' = -0{,}01459620$

$\varphi'\alpha''-\varphi''\alpha' = -0{,}03047288$; $\varphi'-\varphi'' = -0{,}0400574$;

daher zweiter Näherungswerth:

$$x = \frac{304728}{400574} = 0{,}760.$$

Setze $\alpha' = 0{,}760$ und $\alpha'' = 0{,}761$, so wird:

$\varphi' = 0{,}6018612-0{,}6020600 = -0{,}0001988$

$\varphi'' = 0{,}6022641-0{,}6020600 = +0{,}0002041$

$\varphi'\alpha'' = -0{,}0001512868$; $\varphi''\alpha' = +0{,}0001551160$

$\varphi'\alpha''-\varphi''\alpha' = -0{,}0003064028$; $\varphi'-\varphi'' = -0{,}0004029$;

daher dritter Näherungswerth:

$$x = \frac{3064{,}028}{4029} = 0{,}760493.$$

6. β) Diese Gleichung hat eine Wurzel zwischen 0 und -1; denn für $x = 0$ wird $\varphi' = +2$ und für $x = -1$ wird $\varphi'' = -6{,}633\ldots$ Hieraus geht hervor, daß die Wurzel

Digitized by Google

näher bei 0 als bei -1 liegt. Vermittelst Logarithmen haben wir:

$$\log(5^x+6^x)-2\log x-\log 7=0.$$

Setzen wir nun $\alpha'=-0{,}3$ und $\alpha''=-0{,}4$, so wird:

$\varphi'=+0{,}280247$; $\varphi''=-0{,}043422$; daher:

$\varphi'\alpha''=-0{,}1121388$; $\varphi''\alpha'=+0{,}0130266$

$\varphi'\alpha''-\varphi''\alpha'=-0{,}1251654$; $\varphi'-\varphi''=+0{,}323669$;

daher erster Näherungswerth:

$$x=-\frac{125165{,}4}{323669}=-0{,}386.$$

Setze ferner $\alpha'=-0{,}386$ und $\alpha''=-0{,}387$, so wird:

$\varphi'=-0{,}0020581$; $\varphi''=-0{,}0050403$

$\varphi'\alpha''=+0{,}0007964847$; $\varphi''\alpha'=+0{,}0019455558$

$\varphi'\alpha''-\varphi''\alpha'=-0{,}0011490711$; $\varphi'-\varphi''=+0{,}0029822$;

also zweiter Näherungswerth:

$$x=-\frac{11490{,}711}{29822}=-0{,}38531\ldots$$

7. Setzt man $x=0$ und $x=1$, so wird $\varphi=+1$; setzt man $x=2$, so wird $\varphi=-3$; mithin liegt zwischen 1 und 2 eine Wurzel der Gl. Vermittelst Logarithmen hat man:

$$\log(2^x+3^x)-x\log 4=0.$$

Setzt man $\alpha'=1{,}5$ und $\alpha''=1{,}6$, so wird:

$\varphi'=0{,}9044223-0{,}9030900=+0{,}0013323$

$\varphi''=0{,}946084-0{,}9632480=-0{,}0172396$

$\varphi'\alpha''=+0{,}00213168$; $\varphi''\alpha'=-0{,}0258594$

$\varphi'\alpha''-\varphi''\alpha'=+0{,}02799108$; $\varphi'-\varphi''=+0{,}0185719$;

daher erster Näherungswerth:

$$x=\frac{279910{,}8}{185719}=1{,}5071.$$

Nun setze man $\alpha'=1{,}5071$ und $\alpha''=1{,}5072$, so wird:

$\varphi'=0{,}9073694-0{,}9073645=+0{,}0000049$

$\varphi''=0{,}9074102-0{,}9074248=-0{,}0000146$

$\varphi'\alpha''=+0{,}00000738528$; $\varphi''\alpha'=-0{,}00002200366$

$\varphi'\alpha''-\varphi''\alpha'=+0{,}00002938894$; $\varphi'-\varphi''=+0{,}0000195$;

daher zweiter Näherungswerth:

$$x=\frac{293{,}8894}{195}=1{,}507126.$$

8. Ein Wurzelwerth dieser Gl. liegt zwischen 1 und 2. Denn für $x=1$ wird $\varphi=-1$ und für $x=2$ wird $\varphi=14$. Hieraus folgt, daß der Wurzelwerth näher bei 1 als bei 2 liegt. Vermittelst Logarithmen haben wir:

$$x\log x+\log\log x-\log\log 2=0.$$

Digitized by Google

Setze $\alpha' = 1{,}3$ und $\alpha'' = 1{,}4$, so wird:

$$\varphi' = 1{,}3.0{,}11394 + \log 0{,}11394 - \log 0{,}30103$$
$$= 0{,}14812 - 0{,}94332 + 0{,}52139 = -0{,}27381$$
$$\varphi'' = 1{,}4.0{,}14612 + \log 0{,}14612 - \log 0{,}30103$$
$$= 0{,}21458 - 0{,}83529 + 0{,}52139 = -0{,}09932$$
$$\varphi'\alpha'' = -0{,}383334;\quad \varphi''\alpha' = -0{,}129116$$
$$\varphi'\alpha'' - \varphi''\alpha' = -0{,}254218;\quad \varphi' - \varphi'' = -0{,}17449;$$

daher erster Näherungswerth:

$$x = \frac{25421{,}8}{17449} = 1{,}45.$$

Setze $\alpha' = 1{,}45$ und $\alpha'' = 1{,}47$, so wird:

$$\varphi' = 1{,}45.0{,}161368 + \log 0{,}161368 - \log 0{,}30103$$
$$= 0{,}2339836 - 0{,}7921826 + 0{,}5213902 = -0{,}0368088$$
$$\varphi'' = 1{,}47.0{,}1673173 + \log 0{,}1673173 - \log 0{,}30103$$
$$= 0{,}2459564 - 0{,}7764592 + 0{,}5213902 = -0{,}0091126$$
$$\varphi'\alpha'' = -0{,}054108936;\quad \varphi''\alpha' = -0{,}013213270$$
$$\varphi'\alpha'' - \varphi''\alpha' = -0{,}040895666;\quad \varphi' - \varphi'' = -0{,}0276962;$$

zweiter Näherungswerth:

$$x = \frac{408956{,}66}{276962} = 1{,}4765.$$

Setze $\alpha' = 1{,}4765$ und $\alpha'' = 1{,}4766$, so wird:

$$\varphi' = 1{,}4765.0{,}1692335 + \log 0{,}1692335 - \log 0{,}30103$$
$$= 0{,}2498733 - 0{,}7715136 + 0{,}5213902 = -0{,}0002501$$
$$\varphi'' = 1{,}4766.0{,}1692629 + \log 0{,}1692629 - \log 0{,}30103$$
$$= 0{,}2499336 - 0{,}7714382 + 0{,}5213902 = -0{,}0001144$$
$$\varphi'\alpha'' = -0{,}00036929766;\quad \varphi''\alpha' = -0{,}00016891160$$
$$\varphi'\alpha'' - \varphi''\alpha' = -0{,}00020038606;\quad \varphi' - \varphi'' = -0{,}0001357;$$

also dritter Näherungswerth:

$$x = \frac{2003{,}8606}{1357} = 1{,}476684.$$

9. Ein erster Näherungswerth dieser Gl. liegt zwischen 0,3 und 0,4, denn für $x=0{,}3$ wird $\varphi' = -0{,}066$ und für $x=0{,}4$ wird $\varphi'' = +0{,}161$; daher ist erster Näherungswerth:

$$x = \frac{74{,}7}{227} = 0{,}32.$$

Setzen wir ferner $\alpha' = 0{,}32$ und $\alpha'' = 0{,}33$, so wird:

$$\varphi' = -0{,}016498;\quad \varphi'' = +0{,}0074044;\quad \varphi'\alpha'' = -0{,}00544434$$
$$\varphi'' = +0{,}002369408$$
$$\varphi'\alpha'' - \varphi''\alpha' = -0{,}00781375;\quad \varphi' - \varphi'' = -0{,}023902;$$

daher zweiter Näherungswerth:

$$x = \frac{7813{,}75}{23902} = 0{,}3269.$$

Digitized by Google

Setze ferner $\alpha' = 0{,}3269$ und $\alpha'' = 0{,}3268$, so wird:
$\varphi' = +0{,}00005266919$; $\varphi'' = -0{,}0001853576$; also:
$\varphi'\alpha'' = +0{,}000017212291292$; $\varphi''\alpha' = -0{,}0000605939944$;
$\varphi'\alpha'' - \varphi''\alpha' = +0{,}000077805690732$
$\varphi' - \varphi'' = +0{,}00023802679$; daher dritter Näherungswerth:

$$x_1 = \frac{7780569{,}0732}{23802679} = 0{,}3268778.$$

Außer diesem Werthe hat die Gl. noch einen zweiten Wurzelwerth, der zwischen 12 und 13 liegt. Denn
für $x = 12$ wird $\varphi' = +0{,}1290068$
„ $x = 13$ „ $\varphi'' = -0{,}3673196$.
Suchen wir den Werth für x in engere Grenzen zu ziehen, so haben wir:
$\varphi'\alpha'' = +1{,}6770884$; $\varphi''\alpha' = -4{,}4078352$
$\varphi'\alpha'' - \varphi''\alpha' = +6{,}0849236$; $\varphi' - \varphi'' = +0{,}496264$;
daher erster Näherungswerth:

$$x_2 = \frac{6084923{,}6}{496264} = 12{,}26.$$

Setze $\alpha' = 12{,}26$, $\alpha'' = 12{,}27$, so wird:
$\varphi' = +0{,}00359697$; $\varphi'' = -0{,}00127864$
$\varphi'\alpha'' = +0{,}0441348219$; $\varphi''\alpha' = -0{,}01567615092$
$\varphi'\alpha'' - \varphi''\alpha' = +0{,}05981097282$; $\varphi' - \varphi'' = +0{,}00487561$;
daher zweiter Näherungswerth:

$$x_2 = \frac{5981097{,}282}{487561} = 12{,}2673.$$

10. Diese Gl. hat eine Wurzel zwischen 12 und 13. Denn setzen wir $\alpha' = 12$ und $\alpha'' = 13$, so wird;
$\varphi' = 12 - 1{,}0791812 - 11{,}1195413 = -0{,}1987225$
$\varphi'' = 13 - 1{,}1139434 - 11{,}6702518 = +0{,}2158048$
$\varphi'\alpha'' = -2{,}5833925$; $\varphi''\alpha' = +2{,}5896576$
$\varphi'\alpha'' - \varphi''\alpha' = -5{,}1730501$; $\varphi' - \varphi'' = -0{,}4145273$;
also erster Näherungswerth:

$$x = \frac{51730501}{4145273} = 12{,}47.$$

Setze $\alpha' = 12{,}47$ und $\alpha'' = 12{,}48$, so wird:
$\varphi' = 12{,}47 - 1{,}0958665 - 11{,}3791232 = -0{,}0049897$
$\varphi'' = 12{,}48 - 1{,}0962146 - 11{,}3846321 = -0{,}0008467$
$\varphi'\alpha'' = -0{,}062271456$; $\varphi''\alpha' = -0{,}010558349$
$\varphi'\alpha'' - \varphi''\alpha' = -0{,}051713107$; $\varphi' - \varphi'' = -0{,}004143$;
zweiter Näherungswerth:

$$x = \frac{51713{,}107}{4143} = 12{,}4820436.$$

Digitized by Google

11. Es ist leicht ersichtlich, daß, wenn man $x = 0$ setzt, $y = 1$ wird. Demnach ist $x_1 = 0$, $y_1 = 1$. Indessen hat die Gl. noch einen zweiten Wurzelwerth, der zwischen 0 und 1 liegt. Vermittelst Logarithmen erhalten wir:
(1) $y \log 3 = \log(4 - 2^x)$; (2) $x \log 5 = \log(7 - 6^y)$.
Um nun x und y zu bestimmen, setze man in (1) zwei Werthe für x und bestimme hieraus die Werthe für y. Hierauf substituire man die aus (1) für y gefundenen Werthe in (2), berechne die in Folge der fraglichen Substitutionen sich ergebenden Werthe von x, berechne die Differenzen zwischen den beiden Werthen von x, welche die Fehler der Gl. sind, und suche dann hieraus nach der regula falsi einen Näherungswerth für x und y. Setzen wir:
$x = 0{,}5 = \alpha_1$ und $x = 0{,}6 = \alpha_2$, so wird:
$y = 0{,}865 = \alpha'$ „ $y = 0{,}828 = \alpha''$.
Substituire diese Werthe für y in (2), so wird:

$$x = \frac{35966{,}97}{69897} = 0{,}514 = \alpha_1$$

$$x = \frac{41352}{69897} = 0{,}591 = \alpha_2;$$ daher ist:

$$\varphi' = 0{,}5 - 0{,}514 = -0{,}014$$
$$\varphi'' = 0{,}6 - 0{,}591 = +0{,}009;$$ also:
$\varphi'\alpha_2 = -0{,}008274$; $\varphi''\alpha_1 = +0{,}004626$; $\varphi'\alpha_2 - \varphi''\alpha_1 = -0{,}0129$
$\varphi' - \varphi'' = -0{,}023$; daher ist erster Näherungswerth für x:

$$x = \frac{12{,}9}{23} = 0{,}56;$$ ferner ist:

$$\varphi'\alpha'' = -0{,}011592;\ \varphi''\alpha' = +0{,}007785$$
$\varphi'\alpha'' - \varphi''\alpha' = -0{,}019377$; daher erster Näherungswerth für y:

$$y = \frac{19{,}377}{23} = 0{,}842.$$

Nun setze man ferner $x = 0{,}56 = \alpha_1$ und $x = 0{,}5654 = \alpha_2$, so wird:

$$y = \frac{4023871}{4771212} = 0{,}843364 = \alpha'$$

$$y = \frac{4014355}{4771212} = 0{,}841370 = \alpha''.$$

Setze diese Werthe für y in (2), so wird:

$$x = \frac{3923916}{6989700} = 0{,}561384 = \alpha_1$$

$$x = \frac{3952259}{6989700} = 0{,}565440 = \alpha_2;$$ daher ist:

Digitized by Google

$$\varphi' = 0{,}56 - 0{,}561384 = -0{,}001384.$$
$$\varphi'' = 0{,}5654 - 0{,}565440 = -0{,}000040$$
$\varphi'\alpha_2 = -0{,}000782558960$; $\varphi''\alpha_1 = -0{,}000022455360$;
$\varphi'\alpha_2 - \varphi''\alpha_1 = -0{,}0007601036$; $\varphi' - \varphi'' = -0{,}001344$;
daher zweiter Näherungsw.:

$$x = \frac{760{,}1036}{1344} = 0{,}56555;$$ ferner ist:

$\varphi'\alpha'' = -0{,}00116445608$; $\varphi''\alpha' = -0{,}00003373456$
$\varphi'\alpha'' - \varphi''\alpha' = -0{,}00113072152$; daher zweiter Näherungswerth für y:

$$y = \frac{1130{,}72152}{1344} = 0{,}84131.$$

12. Setzt man in (2) $y=3$, so wird $x=\sqrt[3]{3}$.
$y=2$, „ „ $x=\sqrt{3}=1{,}732$
$y=1$, „ „ $x=3$.
Setzt man in (1) $x=1$, „ „ $y=2$
$x=\sqrt{3}$, „ „ $y=1{,}493$
$x=3$ „ „ $y=0{,}259$.

Hieraus folgt, daß zwischen $\sqrt{3}$ und 3 ein Werth von x und zwischen 1 und 2 ein solcher von y liegt. Um einen approximativen Werth von x zu erhalten, bestimme man aus vorstehenden Werthen für die fernere Berechnung zwei Werthe für x. Nun ist:
$\varphi' = 2 - 1{,}493 = +0{,}507$; $\varphi'' = 1 - 1{,}259 = -0{,}259$.
$\varphi'\alpha_2 = +1{,}521$; $\varphi''\alpha_1 = -0{,}4485$; $\varphi'\alpha_2 - \varphi''\alpha_1 = 1{,}9695$;
$\varphi' - \varphi'' = 0{,}766$; also $x = \frac{1969{,}5}{766} = 2{,}5$. Nehmen wir jetzt als zweiten Werth für x das arithmetische Mittel zwischen $\sqrt{3}$ und 3, so wird $x = 2{,}3$.

Drückt man die beiden gegebenen Gleichungen logarithmisch aus, so wird:

$$(1)\ x = \frac{\log 2}{\log y} \text{ und } (2)\ y = \frac{\log 3}{\log x}.$$

Nun setze man in (2) $x = 2{,}5$ und $x = 2{,}3$, so wird:

$$y = \frac{4771212}{3979400} = 1{,}19 = \alpha'.$$

$$y = \frac{4771212}{3617278} = 1{,}31 = \alpha''.$$

Setze diese Werthe für y in (1), so wird:

Digitized by Google

$$x = \frac{3010300}{755470} = 3{,}98 = \alpha_1$$

$$x = \frac{3010300}{1172713} = 2{,}56 = \alpha_2.$$ Nun ist:

$\varphi' = 2{,}5 - 3{,}98 = -1{,}48$; $\varphi'' = 2{,}3 - 2{,}56 = -0{,}26$
$\varphi'\alpha_2 = -3{,}7888$; $\varphi''\alpha_1 = -1{,}0348$; $\varphi'\alpha_2 - \varphi''\alpha_1 = -2{,}754$;
$\varphi' - \varphi'' = -1{,}22$; also:

$$x = \frac{275{,}4}{122} = 2{,}257.$$ Ferner ist:

$\varphi'\alpha'' = -1{,}9388$; $\varphi''\alpha' = -0{,}3094$; $\varphi'\alpha'' - \varphi''\alpha' = -1{,}6294$; daher:

$$y = \frac{162{,}94}{122} = 1{,}335.$$

Ferner setze $x = 2{,}257$ und $x = 2{,}240$ in (2), so wird:

$$y = \frac{4771212}{3535316} = 1{,}3495 = \alpha'$$

$$y = \frac{4771212}{3502480} = 1{,}3622 = \alpha''$$

Setze diese Werthe für y in (1), so wird:

$$x = \frac{3010300}{1301729} = 2{,}3125 = \alpha_1$$

$$x = \frac{3010300}{1342409} = 2{,}2424 = \alpha_2,$$ daher ist:

$\varphi' = 2{,}257 - 2{,}3125 = -0{,}0555$; $\varphi'' = 2{,}240 - 2{,}2424 = -0{,}0024$
$\varphi'\alpha_2 = -0{,}1244532$; $\varphi''\alpha_1 = -0{,}00555$; $\varphi'\alpha_2 - \varphi''\alpha_1 = -0{,}1189032$; $\varphi' - \varphi'' = -0{,}0531$; also:

$$x = \frac{1189{,}032}{531} = 2{,}23923.$$

$\varphi'\alpha'' = -0{,}0756021$; $\varphi''\alpha' = -0{,}0032388$; $\varphi'\alpha'' - \varphi''\alpha' = -0{,}0723633$; daher:

$$y = \frac{723{,}633}{531} = 1{,}36277.$$

Ferner setze $x = 2{,}23923$ und $x = 2{,}23928$ in (2), so wird:

$$y = \frac{4771212}{3500987} = 1{,}362819 = \alpha'$$

$$y = \frac{4771212}{3501084} = 1{,}362781 = \alpha''.$$

Setze diese Werthe für y in (1), so wird:

Digitized by Google

$$x = \frac{3010300}{1344382} = 2{,}239170 = \alpha_1$$

$$x = \frac{3010300}{1344261} = 2{,}239371 = \alpha_2;\ \text{daher:}$$

$$\varphi' = 2{,}23923 - 2{,}239170 = +0{,}000060$$
$$\varphi'' = 2{,}23928 - 2{,}239371 = -0{,}000091$$
$$\varphi'\alpha_2 = +0{,}00013436226;\ \varphi''\alpha_1 = -0{,}00020376447$$
$$\varphi'\alpha_2 - \varphi''\alpha_1 = +0{,}00033812673;\ \varphi' - \varphi'' = +0{,}000151;$$

daher:

$$x = \frac{338{,}12673}{151} = 2{,}23925.$$ Ferner ist:

$$\varphi'\alpha'' = +0{,}000081766860;\ \varphi''\alpha' = -0{,}000124016529.$$
$$\varphi'\alpha'' - \varphi''\alpha' = +0{,}000205783389;\ \text{mithin:}$$

$$y = \frac{205{,}783389}{151} = 1{,}36280.$$

13. Die hier gegebene Gleichung drückt die Aufgabe aus: Welcher Kreisbogen ist seinem Cosinus gleich? Wir haben sonach die Gleichung

$$\log x - \log\cos x = 0$$

aufzulösen. Einige Versuche zeigen, daß der Kreisbogen zwischen 42° und 43° enthalten ist*). Nun ist:

$$\log \text{arc}\, 42^\circ = 9{,}8651267 - 10$$
$$\log\cos 42^\circ = 9{,}8710735 - 10$$

demnach $\varphi' = -0{,}0059468.$

Ferner ist: $\log \text{arc}\, 43^\circ = 9{,}8753459 - 10$
$\log\cos 43^\circ = 9{,}8641275 - 10$

demnach $\varphi'' = +0{,}0112184.$

Nun ist: $\varphi'\alpha'' = -0{,}0059468 . 43 = -0{,}2557124$
$\varphi''\alpha' = +0{,}0112184 . 42 = +0{,}4711728$
$\varphi'\alpha'' - \varphi''\alpha' = -0{,}7268852;\ \varphi' - \varphi'' = -0{,}0171652;$

also $x = \frac{7268852}{171652} = 42{,}34644^\circ = 42^\circ 20' 47''.$

Hieraus folgt, daß der Werth für x zwischen 42° 20′ und

---

*) Um den Logarithmus der Länge A eines Bogens von a Graden, oder a′ Minuten oder a″ Sekunden schnell zu berechnen, dienen auch nach Egen II. Theil S. 419 folgende Formeln:

$$\log A = \log a - 1{,}7581226324091722154 5\ldots = \log a - (\log 180 - \log p)$$
$$\log A = \log a' - 3{,}5362738827928158479 6\ldots$$
$$= \log a' - (\log 180 . 60 - \log p)$$
$$\log A = \log a'' - 5{,}3144251331764594804 7\ldots$$
$$= \log a'' - (\log 180 . 60^2 - \log p).$$

Digitized by Google

$42^0 21'$ liegt. Man setze daher $\alpha' = 42^0 20'$ und $\alpha'' = 42^0 21'$, so wird:

$$\log \text{arc}\, 42^0 20' = 9{,}8685598 - 10$$
$$\log \cos 42^0 20' = 9{,}8687851 - 10$$
$$\text{daher ist } \varphi' = -0{,}0002253.$$
$$\log \text{arc}\, 42^0 21' = 9{,}8687308 - 10$$
$$\log \cos 42^0 21' = 9{,}8686700 - 10$$
$$\text{daher ist: } \varphi'' = +0{,}0000608$$

$\varphi'\alpha'' = -0{,}009541455$; $\varphi''\alpha' = +0{,}002573867$
$\varphi'\alpha'' - \varphi''\alpha' = -0{,}012115322$; $\varphi' - \varphi'' = -0{,}0002861$;
daher:

$$x = \frac{121153{,}22}{2861} = 42{,}34646^0 = 42^0 20' 47{,}26''.$$

Es ist also: $\text{arc}\, x = 42^0 20' 47{,}26'' = 152447{,}26''$; daher:

$$\log \text{arc}\, x = \log 152447{,}26 - 5{,}3144251$$
$$= 5{,}1831196 - 5{,}3144251$$
$$= -0{,}1313055 = \bar{1}{,}8686945; \text{ mithin}$$
$$\text{arc}\, x = \text{num log}\, \bar{1}{,}8686945 = 0{,}7390851.$$

14. Weil im ersten Quadranten $\text{tang}\, x > x$ und im zweiten Quadranten $\text{tang}\, x$ negativ ist, so kann in den beiden ersten und überhaupt in allen gradzahligen Quadranten keine Wurzel der Gleichung liegen; dieselben befinden sich im 3., 5., 7., 9. u. s. w. Quadranten, so daß also x unendlich viele Werthe erhalten kann. Der Gleichung genügt als erster Wurzelwerth $x = 0$. Nach einigen Versuchen findet man, daß der zweite Wurzelwerth im 3. Quadranten zwischen 257^0 und 258^0 liegt. Drücken wir die gegebene Gl. vermittelst Logarithmen aus, so haben wir:

$$\log \text{tang}\, x - \log x = 0.$$

Nun ist $\log \text{arc}\, 257^0 = 2{,}4099331 - 1{,}7581226 = 0{,}6518105$
$\log \text{tang}\, 257^0 = \log \text{tang}\, 77^0 \ldots\ldots = 0{,}6366359$ *); daher:
$\varphi' = 0{,}6366359 - 0{,}6518105 = -0{,}0151746.$
$\log \text{arc}\, 258^0 = 2{,}4116197 - 1{,}7581226 = 0{,}6534971$
$\log \text{tang}\, 258^0 = \log \text{tang}\, 78^0 = 0{,}6725255$
$\varphi'' = 0{,}6725255 - 0{,}6534971 = +0{,}0190284$
$\varphi'\alpha'' = -0{,}0151746.258 = -3{,}9150468$
$\varphi''\alpha' = +0{,}01090284.257 = +4{,}8902988$
$\varphi'\alpha'' - \varphi''\alpha' = -8{,}8053456$; $\varphi' - \varphi'' = -0{,}034203$;

---

*) Wenn Q ein Bogen ist, der zum Quadranten gehört, so ist $\text{tang}\,(2Q + a) = \text{tang}\, a$: Nun ist $2Q = 180^0$; daher $180^0 + a = 257^0$; folglich $a = 77^0$.

Digitized by Google

daher erster Näherungswerth:

$$x_2 = \frac{8805345,6}{34203} = 257,44^0 = 257^0 26'.$$

Nun setze man ferner $x = 257^0 26' = \alpha'$ und $x = 257^0 28' = \alpha''$.

$\log \text{arc}\, 257^0 26' = \log \text{arc}\, 15446' = 4,1888160 - 3,5362738 = 0,6525422$

$\log \text{tang}\, 257^0 26' = \log \text{tang}\, 77^0 26' = 0,6518593$

$\log \text{arc}\, 257^0 28' = \log \text{arc}\, 15448' = 4,1888723 - 3,5362738 = 0,6525985$

$\log \text{tang}\, 257^0 28' = \log \text{tang}\, 77^0 28' = 0,6530506$; daher:

$\varphi' = 0,6518593 - 0,6525422 = -0,0006829$

$\varphi'' = 0,6530506 - 0,6525985 = +0,0004521$

$\varphi'\alpha'' = -10,5494392$; $\varphi''\alpha' = +6,9831366$

$\varphi'\alpha'' - \varphi''\alpha' = -17,5325758$; $\varphi' - \varphi'' = -0,001135$;

also zweiter Näherungswerth:

$$x_2 = \frac{17532575,8}{1135} = 15447,203' = 257^0 27' 12,2''.$$

Nun ist $\text{arc}\, x_2 = 257^0 27' 12,2'' = 926832,2''$.

$\log \text{arc}\, x_2 = 5,9670021 - 5,3144251 = 0,6525770$

$\text{arc}\, x_2 = \text{num log}\, 0,6525770 = 4,493419.$

Der dritte Wurzelwerth liegt im 5. Quadranten und zwar zwischen 442^0 und 443^0:

$\log \text{arc}\, 442^0 = 2,6454223 - 1,7581226 = 0,8872997$

$\log \text{tang}\, 442^0 = \log \text{tang}\, 82^0 = 0,8521975$

$\log \text{arc}\, 443^0 = 2,6464037 - 1,7581226 = 0,8882811$

$\log \text{tang}\, 443^0 = \log \text{tang}\, 83^0 = 0,9108562$; daher:

$\varphi' = 0,8521975 - 0,8872997 = -0,0351022$

$\varphi'' = 0,9108562 - 0,8882811 = +0,0225751$

$\varphi'\alpha'' = -15,5502746$; $\varphi''\alpha' = +9,9781942$

$\varphi'\alpha'' - \varphi''\alpha' = -25,5284688$; $\varphi' - \varphi'' = -0,0576773$;

also erster Näherungswerth:

$$x_3 = \frac{255284688}{576773} = 442,60^0 = 442^0 36'.$$

Man setze ferner $x = 442^0 36' = \alpha'$ und $x = 442^0 40' = \alpha''$

$\log \text{arc}\, 442^0 36' = \log \text{arc}\, 26556' = 4,4241627 - 3,5362738 = 0,8878889$

$\log \text{tang}\, 442^0 36' = \log \text{tang}\, 82^0 36' = 0,8864667$

$\log \text{arc}\, 442^0 40' = \log \text{arc}\, 26560' = 4,4242281 - 3,5362738 = 0,8879543$

$\log \text{tang}\, 442^0 40' = \log \text{tang}\, 82^0 40' = 0,8904406$; daher:

$\varphi' = 0,8864667 - 0,8878889 = -0,0014222$

$\varphi'' = 0,8904406 - 0,8879543 = +0,0024863$

Digitized by Google

$\varphi'\alpha'' = -37{,}7736320$; $\varphi''\alpha' = +66{,}0261828$
$\varphi'\alpha'' - \varphi''\alpha' = -103{,}7998148$; $\varphi' - \varphi'' = -0{,}0039085$;
also zweiter Näherungswerth:

$$x_3 = \frac{1037998148}{39085} = 26557{,}455' = 442^0 37' 27''$$

Der vierte Wurzelwerth liegt im 7. Quadranten zwischen 624^0 und 625^0:

$\log \text{arc}\, 624^0 = 2{,}7951846 - 1{,}7581226 = 1{,}0370620$
$\log \text{tang}\, 624^0 = \log \text{tang}\, 84^0 = 0{,}9783798$
$\log \text{arc}\, 625^0 = 2{,}7958800 - 1{,}7581226 = 1{,}0377574$
$\log \text{tang}\, 625^0 = \log \text{tang}\, 85^0 = 1{,}0580482$; daher:
$\varphi' = 0{,}9783798 - 1{,}0370620 = -0{,}0586822$
$\varphi'' = 1{,}0580482 - 1{,}0377574 = +0{,}0202908$
$\varphi'\alpha'' = -36{,}6763750$; $\varphi''\alpha' = +12{,}6614592$
$\varphi'\alpha'' - \varphi''\alpha' = -49{,}3378342$; $\varphi' - \varphi'' = -0{,}0789730$;
daher erster Näherungswerth:

$$x_4 = \frac{493378342}{789730} = 624{,}74^0 = 624^0 44'$$

Setze ferner $x = 624^0 44' = \alpha'$ und $x = 624^0 48' = \alpha''$:
$\log \text{arc}\, 624^0 44' = \log \text{arc}\, 37484' = 4{,}5738459 - 3{,}5362738 = 1{,}0375721$
$\log \text{tang}\, 624^0 44' = \log \text{tang}\, 84^0 44' = 1{,}0353612$
$\log \text{arc}\, 624^0 48' = \log \text{arc}\, 37488' = 4{,}5738923 - 3{,}5362738 = 1{,}0376185$
$\log \text{tang}\, 624^0 48' = \log \text{tang}\, 84^0 48' = 1{,}0409246$; daher:
$\varphi' = 1{,}0353612 - 1{,}0375721 = -0{,}0022109$
$\varphi'' = 1{,}0409246 - 1{,}0376185 = +0{,}0033061$
$\varphi'\alpha'' = -82{,}8822192$; $\varphi''\alpha' = +123{,}9258524$
$\varphi'\alpha'' - \varphi''\alpha' = -206{,}8080716$; $\varphi' - \varphi'' = -0{,}0055170$;
daher zweiter Näherungswerth:

$$x_4 = \frac{2068080716}{55170} = 37485{,}6' = 624^0 45' 36''.$$

Der fünfte Wurzelwerth liegt im 9. Quadranten zwischen 805^0 und 806^0:

$\log \text{arc}\, 805^0 = 2{,}9057959 - 1{,}7581226 = 1{,}1476733$
$\log \text{tang}\, 805^0 = \log \text{tang}\, 85^0 = 1{,}0580482$
$\log \text{arc}\, 806^0 = 2{,}9063350 - 1{,}7581226 = 1{,}1482124$
$\log \text{tang}\, 806^0 = \log \text{tang}\, 86^0 = 1{,}1553563$; daher:
$\varphi' = 1{,}0580482 - 1{,}1476733 = -0{,}0896251$
$\varphi'' = 1{,}1553563 - 1{,}1482124 = +0{,}0071439$
$\varphi'\alpha'' = -72{,}2378306$; $\varphi''\alpha' = +5{,}7508395$
$\varphi'\alpha'' - \varphi''\alpha' = -77{,}9886701$; $\varphi' - \varphi'' = -0{,}0967690$;

Digitized by Google

also erster Näherungswerth:

$$x_5 = \frac{779886701}{967690} = 805{,}92^0 = 805^0 55'$$

Setze weiter $x = 805^0 55' = \alpha'$ und $x = 805^0 58' = \alpha''$:

$\log \text{arc}\, 805^0 55' = \log \text{arc}\, 48355' = 4{,}6844414 - 3{,}5362738 = 1{,}1481676$

$\log \text{tang}\, 805^0 55' = \log \text{tang}\, 85^0 55' = 1{,}1463717$

$\log \text{arc}\, 805^0 58' = \log \text{arc}\, 48358' = 4{,}6844683 - 3{,}5362738 = 1{,}1481945$

$\log \text{tang}\, 805^0 58' = \log \text{tang}\, 85^0 58' = 1{,}1517403$; daher:

$\varphi' = 1{,}1463717 - 1{,}1481676 = -0{,}0017959$

$\varphi'' = 1{,}1517403 - 1{,}1481945 = +0{,}0035458$

$\varphi'\alpha'' = -86{,}8461322$; $\varphi''\alpha' = +171{,}4571590$

$\varphi'\alpha'' - \varphi''\alpha' = -258{,}3032912$; $\varphi' - \varphi'' = -0{,}0053417$;

zweiter Näherungswerth:

$$x_5 = \frac{2583032912}{53417} = 48356' = 805^0 56' \text{ u. s. w.}$$

15. Die Cotangente nimmt im 1. Quadranten von ∞ bis 0 ab, weshalb ein Wurzelwerth dieser Gleichung im 1. Quadranten liegt und zwar zwischen arc 49° und arc 50°. Nun haben wir die Gleichung:

$$\log x - \log \cot x = 0.$$

Setze $x = \text{arc}\, 49^0 = \alpha'$ und $x = 50^0 = \alpha''$, so wird:

$\log \text{arc}\, 49^0 = 1{,}6901961 - 1{,}7581226 = -0{,}0679265$

$= 9{,}9320735 - 10$

$\log \cot 49^0 = 9{,}9391631 - 10$

also $\varphi' = -0{,}0070896$

$\log \text{arc}\, 50^0 = 1{,}6989700 - 1{,}7581226 = -0{,}0591526$

$= 9{,}9408474 - 10$

$\log \cot 50^0 = 9{,}9238135 - 10$

also $\varphi'' = +0{,}0170339$

$\varphi'\alpha'' = -0{,}3544800$; $\varphi''\alpha' = +0{,}8346611$;

$\varphi'\alpha'' - \varphi''\alpha' = -1{,}1891411$; $\varphi' - \varphi'' = -0{,}0241235$

$$x = \frac{11891411}{241235} = 49{,}29^0 = 49^0 17'.$$

Setze $x = 49^0 17' = \alpha'$ und $x = 49^0 18' = \alpha''$

$\log \text{arc}\, 49^0 17' = \log \text{arc}\, 2957' = 3{,}4708513 - 3{,}5362738 = -0{,}0654225$

$= 9{,}9345775 - 10$

$\log \cot 49^0 17' = 9{,}9348225 - 10$

also $\varphi' = -0{,}0002450$

Digitized by Google

$$\log \text{arc}\, 49^0 18' = \log \text{arc}\, 2958' = 3{,}4709982 - 3{,}5362738 = -0{,}0652756$$
$$= 9{,}9347244 - 10$$
$$\log \cot 49^0 18' = 9{,}9345670 - 10$$
$$\text{also } \varphi'' = +0{,}0001574$$

$$\varphi'\alpha'' = -0{,}7247100;\ \varphi''\alpha' = +0{,}4654318;\ \varphi'\alpha'' - \varphi''\alpha' = -1{,}1901418;\ \varphi' - \varphi'' = -0{,}0004024;$$
$$x = \frac{11901418}{4024} = 2957{,}608' = 49^0 17' 36{,}48''.$$

Nun ist $\text{arc}\, x = 49^0 17' 36{,}48'' = 177456{,}48''$
$$\log \text{arc}\, x = 5{,}2490919 - 5{,}3144251 = -0{,}0653332$$
$$= \bar{1}{,}9346668$$
$$\text{arc}\, x = \text{num log}\, \bar{1}{,}9346668 = 0{,}8603334.$$

16. Weil $\frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$, so erhält man aus der gegebenen Gl.:

$$x^2 + {}^4/_3 x \cot x - {}^4/_3 = 0.$$

Sucht man zunächst, zwischen welchen Grenzen der Bogen x liegt, indem man die Intervalle von 10 zu 10 Grad nimmt, so findet man, daß für positive Werthe von $\cot x$, also für Bogen zwischen 0^0 und 90^0, so wie zwischen 180^0 und 270^0 das Resultat der Substitutionen stets > 0 bleibt. Da also die $\cot x$ negativ sein muß, so schreibt man die Gleichung besser: $x^2 - {}^4/_3(x \cot x + 1) = 0.$

Die trigonometrischen Tafeln geben nun, wenn man zunächst nur 3 Decimalen berücksichtigt für:

$x = 90^0$ $1{,}570^2 - {}^4/_3(1{,}570.0 + 1) > 0$ oder Resultat +
$x = 100^0$ $1{,}745^2 - {}^4/_3(1{,}745.0{,}176 + 1) > 0$ oder Resultat +
$x = 110^0$ $1{,}919^2 - {}^4/_3(1{,}919.0{,}364 + 1) > 0$ „ „ +
$x = 120^0$ $2{,}094^2 - {}^4/_3(2{,}094.0{,}577 + 1) > 0$ „ „ +
$x = 130^0$ $2{,}269^2 - {}^4/_3(2{,}269.0{,}839 + 1) > 0$ „ „ +
$x = 140^0$ $2{,}443^2 - {}^4/_3(2{,}443.1{,}192 + 1) > 0$ „ „ +
$x = 150^0$ $2{,}618^2 - {}^4/_3(2{,}618.1{,}732 + 1) < 0$ „ „ −

Es liegt also x zwischen 140^0 und 150^0. Nimmt man nun x und $\cot x$ mit so vielen Decimalstellen, als die Tafeln unmittelbar darbieten, so bekommt man für:

$$x = 140^0\ 2{,}44346095^2 - {}^4/_3(2{,}44346095.1{,}1917536 + 1)$$
$$= +0{,}754497$$
$$x = 150^0\ 2{,}61799388^2 - {}^4/_3(2{,}61799388.1{,}7320508 + 1)$$
$$= -0{,}525443.$$

Daher ist, weil $\alpha' = 140$, $\alpha'' = 150$, $\varphi' = +0{,}754497$, $\varphi'' = -0{,}525443$, $\varphi'\alpha'' = 113{,}17455$,

Digitized by Google

$$\varphi''\alpha' = -73{,}56202,\ \varphi'\alpha'' - \varphi''\alpha' = +186{,}73657,$$
$$\varphi' - \varphi'' = +1{,}27994$$
$$x = \frac{18673657}{127994} = 145{,}8^0.$$

Setze jetzt $x = 146^0$ und $x = 147^0$, alsdann ist:
$2{,}54818071^2 - {}^4/_3(2{,}54818071.1{,}4825610+1) = 0{,}122783$
$2{,}565634^2 - {}^4/_3(2{,}565634.1{,}5398650+1) = -0{,}018495.$
Nun ist $\alpha' = 146$, $\alpha'' = 147$, $\varphi' = +0{,}122783$,
$\varphi'' = -0.018495$; $\varphi'\alpha'' = +18{,}049101$,
$\varphi''\alpha' = -2{,}700270$, $\varphi'\alpha'' - \varphi''\alpha' = +20{,}749371$,
$\varphi' - \varphi'' = +0{,}141278$; daher:
$$x = \frac{20749371}{141278} = 146{,}87^0.$$

Setze weiter $x = 146{,}87^0$ und $x = 146{,}97^0$, so ist:
$2{,}56336470^2 - {}^4/_3(2{,}56336470.1{,}532242+1) = +0{,}000578$
$2{,}56511003^2 - {}^4/_3(2{,}56511003.1{,}538101+1) = -0{,}014075.$
Es ist also $\alpha' = 146{,}87$, $\alpha'' = 146{,}97$, $\varphi' = +0{,}000578$,
$\varphi'' = -0{,}014075$, $\varphi'\alpha'' = +0{,}08494866$;
$\varphi''\alpha' = -2{,}06719525$; $\varphi'\alpha'' - \varphi''\alpha' = 2{,}15214391$;
$\varphi' - \varphi'' = 0{,}014653$;
daher: $x_1 = \frac{2152143{,}91}{14653} = 146{,}8739^0 = 2{,}563433.$

In derselben Weise berechnet sich auch der zweite Werth von x. Derselbe liegt zwischen 270^0 und 360^0. Um die Gränze desselben genauer zu bestimmen, setze man $x = 340^0$ und $x = 350^0$. Alsdann resultirt:
$5{,}934^2 - {}^4/_3(5{,}934.2{,}747+1) = +12{,}1448$
$6{,}108^2 - {}^4/_3(6{,}108.5{,}671+1) = -8{,}8770.$
Hieraus folgt, daß der Werth für x zwischen 340^0 und 350^0 liegt, und zwar näher bei 350^0 als bei 340^0. Um die Grenzen noch enger zu ziehen, setze man daher $x=346^0$ und $x = 348^0$, so wird:
$6{,}038838^2 - {}^4/_3(6{,}038838.4{,}010780+1) = +2{,}84027$
$6{,}073745^2 - {}^4/_3(6{,}073745.4{,}704630+1) = -2{,}54260.$
Nun ist $\alpha' = 346$, $\alpha'' = 348$, $\varphi' = +2{,}84027$,
$\varphi'' = -2{,}54260$; $\varphi'\alpha'' = +988{,}41396$, $\varphi''\alpha' = -879{,}73960$;
$\varphi'\alpha'' - \varphi''\alpha' = +1868{,}15356$; $\varphi' - \varphi'' = 5{,}38287$; daher:
$$x = \frac{186815356}{538287} = 347{,}0^0.$$

Mithin liegt die Wurzel zwischen 347^0 und 348^0, aber ganz nahe bei 347^0. Man setze daher $x = 347{,}1^0$ und $347{,}2^0$, so wird:

Digitized by Google

$6{,}058037^2 - {}^4/_3(6{,}058037.4{,}366229+1) = +0{,}09878$
$6{,}059782^2 - {}^4/_3(6{,}059782.4{,}401516+1) = -0{,}17533.$

Nun ist $\alpha' = 347{,}1$, $\alpha'' = 347{,}2$, $\varphi' = +0{,}09878$, $\varphi'' = -0{,}17533$; $\varphi'\alpha'' = +34{,}296416$, $\varphi''\alpha' = -60{,}857043$ $\varphi'\alpha'' - \varphi''\alpha' = 95{,}153459$; $\varphi' - \varphi'' = 0{,}27411$; daher:

$$x = \frac{9515345{,}9}{27411} = 347{,}135^0.$$

Setze endlich $x = 347{,}135^0$ und $x = 347{,}137^0$, so wird:
$6{,}058648^2 - {}^4/_3(6{,}058648.4{,}378518+1) = +0{,}00341$
$6{,}058683^2 - {}^4/_3(6{,}058683.4{,}379203+1) = -0{,}00257.$
Also ist: $\alpha' = 347{,}135$; $\alpha'' = 347{,}137$; $\varphi' = +0{,}00341$
$\varphi'' = -0{,}00257$
$\varphi'\alpha'' = 1{,}18373717$; $\varphi''\alpha' = -0{,}89213695$
$\varphi'\alpha'' - \varphi''\alpha' = 2{,}07587412$; $\varphi' - \varphi'' = 0{,}00598$; daher:

$$x = \frac{207587{,}412}{598} = 347{,}1361^0 = 6{,}0586672.$$

17. Wenn positive Werthe von x der Gleichung genügen sollen, so muß offenbar cos x auch positiv sein, also x entweder zwischen 0^0 und 90^0 oder zwischen 270^0 und 360^0 liegen. Wir beschränken uns auf die dem Werthe von x zunächst liegenden Substitutionen für $x = 270^0$, 271^0 und 272^0. Nun ist zunächst:

$270^0 = 270 \times 0{,}01745329 = 4{,}712388$; $271^0 = 4{,}729842$
$272^0 = 4{,}747295.$

Ferner ist: $\log e = \log 2{,}718281828 = 0{,}434294482$ (siehe I. Theil S. 452. §. 362).
Da für $x = 270^0$ $\cos x = 0$ ist, so erhält man für die erste Substitution:

$$\{e^{4{,}712388} + e^{-4{,}712388}\}.0 - 2 = -2.$$

Bestimmen wir für die zweite Substitution die Werthe für e^x, e^{-x} und cos x, so wird:
$x \log e = 4{,}729842.0{,}434294482 = 2{,}054144366469$; also:
$e^x + e^{-x} = 113{,}27769304 + 0{,}00882874 = 113{,}28652178.$
Weiter ist: $\cos x = \cos(360^0 - 271^0) = \cos 89^0$. Nun ist:
$\log\cos 89^0 = 8{,}2418553 - 10$; daher: $\cos x = 0{,}0174524$;
folglich ist:
$(e^x + e^{-x})\cos x = 113{,}27769304.0{,}0174524 = 1{,}97696761$; daher:
$(e^x + e^{-x})\cos x - 2 = -0{,}02303239.$

Berechnung der verschiedenen Werthe für die dritte Substitution: $x \log e = 4{,}747295.0{,}434294482 = 2{,}061724108375$;
daher: $e^x + e^{-x} = 115{,}27208305 + 0{,}00867512 = 115{,}28075817$
Weil $\log\cos x = \log\cos 88^0 = 8{,}5428192 - 10$,

Digitized by Google

so ist $\cos x = 0{,}0348995$; daher:

$(e^x + e^{-x})\cos x - 2 = 115{,}28075817.0{,}0348995 - 2$
$= +2{,}023240819.$

Berechnen wir jetzt vermittelst der regula falsi den ersten Näherungswerth, so ist, weil:

$\alpha' = 271$; $\alpha'' = 272$; $\varphi' = -0{,}02303239$; $\varphi'' = +2{,}023240819$
$\varphi'\alpha'' = -6{,}26481008$; $\varphi''\alpha' = +548{,}29826194$
$\varphi'\alpha'' - \varphi''\alpha' = -554{,}56307202$; $\varphi' - \varphi'' = -2{,}04627321$

$$x = \frac{54829826194}{204627321} = 271{,}011^0.$$

Man setze weiter: $x = 271{,}011^0$ und $x = 271{,}012^0$.

Nun ist: $271{,}011^0 = 4{,}730033576$; $271{,}012^0 = 4{,}730051029$; also:

$x \log e = 4{,}730033576.0{,}434294482 = 2{,}054227566872$; daher:

$e^x + e^{-x} = 113{,}29938902 + 0{,}00882617 = 113{,}30821519.$

Da $\log\cos x = \log\cos 88^0 59' 20{,}4'' = 8{,}2466059 - 10$;

so ist: $\cos x = 0{,}01764436$

$(e^x + e^{-x})\cos x - 2 = 1{,}9992509397 - 2 = -0{,}0007490603.$

Für die zweite Substitution erhalten wir:

$x \log e = 2{,}054235146614$; also:

$e^x + e^{-x} = 113{,}30136678 + 0{,}00882601 = 113{,}31019279.$

Ferner ist: $\log\cos x = \log\cos 88^0 59' 16{,}8'' = 8{,}2470350 - 10$;

also: $\cos x = 0{,}01766180$: daher:

$(e^x + e^{-x})\cos x - 2 = +0{,}0012619630.$

Nun ist: $\alpha' = 271{,}011$; $\alpha'' = 271{,}012$; $\varphi' = -0{,}0007490603$
$\varphi'' = +0{,}0012619630$; $\varphi'\alpha'' = -0{,}2030043300236$
$\varphi''\alpha' = +0{,}342005854593$
$\varphi'\alpha'' - \varphi''\alpha' = -0{,}5450101846166$; $\varphi' - \varphi'' = -0{,}0020110233$;

folglich: $x = \frac{5450101846{,}166}{20110233} = 271{,}01137^0 = 4{,}73004003.$

18. Weil hier x im zweiten Quadranten liegen muß, so setze man zur Bestimmung der Grenze $x = 103^0$, 105^0, 107^0 und 108^0. Nun ist:

$103^0 = 1{,}7976887$; $105^0 = 1{,}83259545$; $107^0 = 1{,}86750203$
$108^0 = 1{,}88495532$

und weil $\cos x$ negativ sein muß, so können wir die Gl. besser schreiben:

$2 - (e^x + e^{-x})\cos x = 0$

$x \log e = 1{,}79769.0{,}4342945 = 0{,}7807269$; daher:

$e^x = 6{,}035688$; $e^{-x} = 0{,}165697$; $e^x + e^{-x} = 6{,}201385$

$\log\cos x = \log 77^0 = 9{,}3520880 - 10$; also:

$\cos x = 0{,}2249510$; mithin:

$(e^x + e^{-x})\cos x = 6{,}201385.0{,}224951 = 1{,}395008$;

daher haben wir:

(1) $2 - (e^x + e^{-x})\cos x = 2 - 1{,}395008 = +0{,}604992.$

Digitized by Google

Für $x = 105^0$ ist $x \log e = 1{,}832595.0{,}4342945 = 0{,}7958859$;
daher: $e^x + e^{-x} = 6{,}250084 + 0{,}159997 = 6{,}410081$
$\log \cos x = \log \cos 75^0 = 9{,}4129962 - 10$
$\cos x = 0{,}258819$
$(e^x + e^{-x}) \cos x = 6{,}410081.0{,}258819 = 1{,}659050$; also:
(2) $2 - (e^x + e^{-x}) \cos x = 2 - 1{,}659050 = + 0{,}340950.$

Für $x = 107^0$ ist $x \log e = 1{,}867502.0{,}4342945 = 0{,}8110468$
$e^x + e^{-x} = 6{,}472124 + 0{,}154508 = 6{,}626632$
$\log \cos x = \log \cos 73^0 = 9{,}4659353 - 10$
$\cos x = 0{,}2923716$
$(e^x + e^{-x}(\cos x = 6{,}626632.0{,}2923716 = 1{,}937439$; also:
(3) $2 - (e^x + e^{-x}) \cos x = 2 - 1{,}937439 = + 0{,}062561.$

Für $x = 108^0$ ist $x \log e = 1{,}884955.0{,}4342945 = 0{,}8186256$;
also: $e^x + e^{-x} = 6{,}586059 + 0{,}151835 = 6{,}737894$
$\log \cos x = \log \cos 72^0 = 9{,}4899824 - 10$
$\cos x = 0{,}309017$; daher:
$(e^x + e^{-x}) \cos x = 6{,}737894.0{,}309017 = 2{,}082124$; daher:
(4) $2 - (e^x + e^{-x}) \cos x = 2 - 2{,}082124 = - 0{,}082124.$

Aus diesen Substitutionen ergibt sich, daß zwischen 107^0 und 108^0 eine Wurzel der Gl. liegt. Suchen wir jetzt die Grenzen genauer zu bestimmen vermittelst der regula falsi.

Es ist: $\alpha' = 107$; $\alpha'' = 108$; $\varphi' = + 0{,}062561$; $\varphi'' = - 0{,}082124$;
$\varphi' \alpha'' = + 6{,}756588$; $\varphi'' \alpha' = - 8{,}787268$;
$\varphi' \alpha'' - \varphi'' \alpha' = + 15{,}543856$; $\varphi' - \varphi'' = + 0{,}144685$;
daher erhalten wir:

$$x = \frac{15543856}{144685} = 107{,}432^0.$$

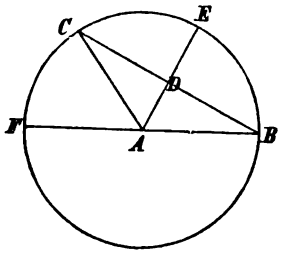
Weiter setze man: $x = 107{,}432^0 = 1{,}87504185$ und
$x = 107{,}436^0 = 1{,}87511166$, so wird für die erste Substitution:
$x \log e = 1{,}87504185.0{,}4342945 = 0{,}8143204$; also:
$e^x + e^{-x} = 6{,}521092 + 0{,}153348 = 6{,}674440$
$\log \cos x = \log \cos 72^0 34' 4{,}8'' = 9{,}4765037 - 10$
$\cos x = 0{,}2995717$
$(e^x + e^{-x}) \cos x = 6{,}674440.0{,}2995717 = 1{,}999486$; daher:
(1) $2 - (e^x + e^{-x}) \cos x = 2 - 1{,}999486 = + 0{,}000514.$

Für $x = 107{,}436^0$ ist $x \log e = 1{,}87511166.0{,}4342945 = 0{,}8143507$
$e^x + e^{-x} = 6{,}521548 + 0{,}153337 = 6{,}674885$
$\log \cos x = \log \cos 72^0 33' 50{,}4'' = 9{,}4766002 - 10$
$\cos x = 0{,}299640$
$(e^x + e^{-x}) \cos x = 6{,}674885.0{,}299640 = 2{,}000064$; daher:
(2) $2 - (e^x + e^{-x}) \cos x = 2 - 2{,}000064 = - 0{,}000064.$

Daher ist: $\alpha' = 107{,}432$; $\alpha'' = 107{,}436$; $\varphi' = + 0{,}000514$;
$\varphi'' = - 0{,}000064$; $\varphi' \alpha'' = + 0{,}055222104$;

Digitized by Google

$$\varphi''\alpha' = -0{,}006875648;\ \varphi'\alpha'' - \varphi''\alpha' = +0{,}062097752;$$
$$\varphi' - \varphi'' = +0{,}000578;\ \text{daher:}$$
$$x = \frac{62097{,}752}{578} = 107{,}435557^0 = 1{,}8751040.$$



19. ABEC sei der verlangte Kreisausschnitt, der durch die Sehne BC in zwei gleiche Theile getheilt wird. Setzt man den gesuchten Bogen BEC $= 2x$, so ist der Inhalt des Kreisausschnittes ABEC für den Halbmesser AB$=1$, gleich der Hälfte des Produktes aus dem Bogen und dem Halbmesser $= 2x.{}^1/_2 = x$. Ferner ist $DB = \sin x$ und $AD = \cos x$; daher ist der Inhalt des Dreiecks $ABC = \sin x.\cos x = {}^1/_2 \sin 2x$. Da nun dieses Dreieck die Hälfte des Ausschnittes sein soll, so ist:

$${}^1/_2 x = {}^1/_2 \sin 2x;\ \text{daher } x - \sin 2x = 0.$$

Vermittelst Logarithmen haben wir:

$$\log x - \log \sin 2x = 0.$$

Durch einige Versuche findet man, daß x zwischen arc 54° und arc 55° liegt. Nun ist;

$$\log \text{arc}\, 54^0 = 1{,}7323938 - 1{,}7581226 = -0{,}0257288$$
$$= 9{,}9742712 - 10$$
$$\log \sin 2(54^0) = \log \sin 72^0 = 9{,}9782063 - 10$$

$$\text{also } \varphi' = -0{,}0039351$$
$$\log \text{arc}\, 55^0 = 1{,}7403627 - 1{,}7581226 = -0{,}0177599$$
$$= 9{,}9822401 - 10$$
$$\log \sin 2(55^0) = \log \sin 70^0 = 9{,}9729858 - 10$$

$$\text{also } \varphi'' = +0{,}0092543$$
$$\varphi'\alpha'' = -0{,}2164605;\ \varphi''\alpha' = +0{,}4997322$$
$$\varphi'\alpha'' - \varphi''\alpha' = -0{,}7161927$$
$$\varphi' - \varphi'' = -0{,}0131894;\ \text{daher erster Näherungswerth:}$$
$$x = \frac{7161927}{131894} = 54{,}3^0 = 54^0 18'.$$

Man setze weiter $x = 54^0 18' = \alpha'$ und $x = 54^0 19' = \alpha''$, so ist:

$$\log \text{arc}\, 54^0 18' = \log \text{arc} 3258' = 3{,}5129511 - 3{,}5362738$$
$$= -0{,}0233227 = 9{,}9766772 - 10$$
$$\log \sin 2(54^0 18') = \log \sin 71^0 24' = 9{,}9767022 - 10$$

$$\text{also } \varphi' = -0{,}0000250$$

Digitized by Google

$$\log \text{arc}\, 54°19' = \log \text{arc}\, 3259 = 3{,}5130844 - 3{,}5362739$$
$$= -0{,}0231895 = 9{,}9768105 - 10$$
$$\log \sin 2(54°19') = \log \sin 71°22' = 9{,}9766171 - 10$$

also $\varphi'' = +0{,}0001934$

$\varphi'\alpha'' = -0{,}0814750$; $\varphi''\alpha' = +0{,}6300972$

$\varphi'\alpha'' - \varphi''\alpha' = -0{,}7115722$

$\varphi' - \varphi'' = -0{,}0002184$; daher zweiter Näherungswerth:

$$x = \frac{7115722}{2184} = 3258{,}1144' = 54°18'6{,}864''.$$

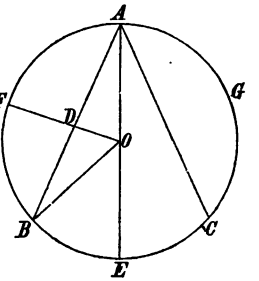
Mithin: $2x = BAD = 108°36'13{,}728''$.

Nun ist: $DB = CD = \sin x = \sin 54°18'6{,}864''$

$\log DB = \bar{1}{,}9096111$; also $DB = 0{,}8121029$; mithin:

Sehne $2BD = BC = 2.0{,}8121029 = 1{,}6242058$.

20. α) Durch die Sehnen AB und AC, die beide von demselben Punkte A auslaufen, werde der Kreis um O in die drei gleichen Theile ACG, ABC und ABF getheilt, so daß jeder dieser Theile ein Drittel des Kreises ausmacht. Zieht man den Durchmesser AE und verbindet B mit O, so entsteht der Kreisausschnitt AOBF, der aus dem Dreieck AOB und dem Kreisabschnitt ADBF besteht. Nun ziehe man noch OD senkrecht auf AB und verlängere es bis zur Peripherie in F. Hiernach ist also Kreisausschnitt AOBF — Dreieck AOB = $^1/_3$ vom Kreise um O. Nun sei Bogen BF = AF = x, dann ist Bogen AB = 2x; mithin ist für den Radius 1 der Inhalt des Kreisausschnittes $= 2x.^1/_2 = x$. Ferner ist $DB = \sin x$ und $OD = \cos x$; daher ist der Inhalt des Dreiecks AOB = $\sin x . \cos x = {}^1/_2 \sin 2x$, weshalb der Inhalt des Kreisabschnittes BAF = $x - {}^1/_2 \sin 2x$ ist. Nun ist ferner für den Radius r der Inhalt des Kreises $= r^2\pi$, also für den Radius 1 ist dieser Inhalt $= \pi$. Und weil der Kreisabschnitt den dritten Theil des Kreisinhaltes ausmachen soll, so ist:



$$x - {}^1/_2 \sin 2x = {}^1/_3\pi \text{ oder:}$$
$$2(x - {}^1/_3\pi) = \sin 2x; \text{ daher:}$$
$$\log\{2(x - {}^1/_3\pi)\} - \log \sin 2x = 0.$$

Nach einigen Versuchen findet man, daß der Bogen zwischen 74° und 75° liegt. Suchen wir zunächst die Werthe für x und π zu bestimmen.

Digitized by Google

Nun ist: $\log \text{arc } 74^0 = 1{,}8692317 - 1{,}7581226 = +0{,}1111091$
$\log \text{arc } 75^0 = 1{,}8750613 - 1{,}7581226 = +0{,}1169387.$

Die Zahlen, die zu diesen beiden Logarithmen gehören, sind bezüglich:

1,2915436 und 1,3089969.

Nun ist ferner $\pi = 3{,}14159265$; also $^1/_8\pi = 1{,}0471975$; daher ist:

$2(x - {}^1/_8\pi) = 2(1{,}2915436 - 1{,}0471975) = 0{,}4886922$
$2(x - {}^1/_8\pi) = 2(1{,}3089969 - 1{,}0471975) = 0{,}5235988$
$\log 0{,}4886922 = 0{,}6890354 - 1 = -0{,}3109646$
$\log 0{,}5235988 = 0{,}7189986 - 1 = -0{,}2810014.$

Endlich ist:

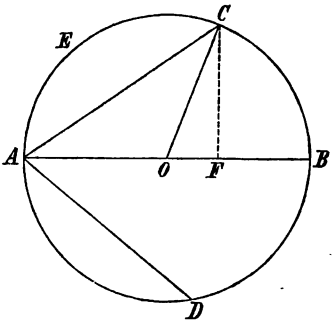
$\log \sin 2(74^0) = \log \sin 32^0 = 0{,}7242097 - 1 = -0{,}2757903$
$\log \sin 2(75^0) = \log \sin 30^0 = 0{,}6989700 - 1 = -0{,}3010300.$

Daher ist: $\varphi' = -0{,}3109646 + 0{,}2757903 = -0{,}0351743$
$\varphi'' = -0{,}2810014 + 0{,}3010300 = +0{,}0200286$
$\varphi'\alpha'' = -0{,}0351743.75 = -2{,}6380725$
$\varphi''\alpha' = +0{,}0200286.74 = +1{,}4821164$
$\varphi'\alpha'' - \varphi''\alpha' = -4{,}1201889$; $\varphi' - \varphi'' = -0{,}0552029$; daher:

$$x = \frac{41201889}{552029} = 74{,}6372^0 = 74^0 38' 13{,}9'' = \text{Winkel BOF};$$

daher der Centriwinkel $BOA = 2.BOF = 149^0 16' 27{,}8''$.

Weiter ist $BD = AD = \sin x = 74^0 38' 13{,}9''$
$\log BD = \bar{1}{,}9841975$; also:
$BD = 0{,}9642670$; daher:
$2BD = AB = 2.0{,}9642670 = 1{,}9285340.$



20. β) Ziehen wir im Kreise um O den Durchmesser AB, so wird der Kreis in zwei Halbkreise getheilt, die durch die von A auslaufenden Sehnen AC und AD halbirt werden sollen. Auf diese Weise wird der Kreis in 4 gleiche Theile getheilt. Unsere Aufgabe wird also gelöst sein, wenn wir nachweisen, daß z. B. der Kreisabschnitt ACE gleich der Hälfte des Halbkreises ABCE ist. Wir verbinden O mit C und ziehen aus C die Linie CF senkrecht auf AB. Man setze den Bogen $AEC = ADB = x$, dann ist der Kreisausschnitt $AOCE = {}^1/_2 x$ und das Dreieck $AOC = {}^1/_2 . AO . CF = {}^1/_2 \sin x$; demnach

Digitized by Google

ist der Kreisabschnitt $ACE = {}^1/_2x - {}^1/_2\sin x$. Wenn nun der Halbkreis $AECB = \pi$ gesetzt wird, so soll nach der Annahme sein:

$$x - \sin x = {}^1/_2\pi = 90^0 \text{ oder:}$$
$$x - 90^0 = \sin x.$$

Nun ist aber $\sin x = \cos x - 90^0$ und es sei $x - 90^0 = x'$; alsdann ist:

$$\sin x = \cos x' \text{ und } x' = \cos x'.$$

Nun ist die Aufgabe $x' = \cos x'$ in Nr. 13 gelöst worden; hiernach ist: $x' = 42^0 20' 47{,}26''$;
daher ist der Bogen:

$$AEC = ADB = x' + 90^0 = 132^0 20' 47{,}26''.$$

Nun ist Sehne $AC = AD = 2\sin {}^1/_2x$

$$\log\sin {}^1/_2x = \log\sin 66^0 10' 23{,}63'' = \bar{1},9613124$$
$${}^1/_2x = 0{,}9147711; \text{ daher:}$$
$$AD = AC = 2.0{,}9147711 = 1{,}8295422.$$

21. Nehmen wir an, der Bogen AEC der vorhergehenden Figur sei der verlangte Bogen und $= x$, dann ist die zu diesem Bogen gehörige Sehne $AC = 2\sin {}^1/_2x$ und weil nach der Annahme Bogen $AEC = 2AC$ sein soll, so ist:

$$x = 4\sin {}^1/_2x \text{ oder } x - 4\sin {}^1/_2x = 0.$$

Dividirt man diese Gleichung durch 4, so wird:

$${}^1/_4x - \sin {}^1/_2x = 0.$$

Setzt man nun ${}^1/_2x = z$, so erhalten wir vermittelst Logarithmen:

$$\log({}^1/_2z) - \log\sin z = 0.$$

Einige Versuche ergeben, daß z zwischen $108^0 = \alpha'$ und $z = 109^0 = \alpha''$ liegt. Nun ist:

$$\log\text{arc}({}^1/_2.108^0) = 1{,}7323938 - 1{,}7581226 = \bar{1},9742712$$
$$\log\sin 108^0 = \log\sin 72^0 = \bar{1},9782063; \text{ daher:}$$
$$\varphi' = \bar{1},9742712 - \bar{1},9782063 = -0{,}0039352$$
$$\log\text{arc}({}^1/_2.109^0) = \log\text{arc}\,3270' = 3{,}5145478 - 3{,}5362739 = \bar{1},9782739$$
$$\log\sin 109^0 = \log\sin 71^0 = \bar{1},9756701; \text{ daher:}$$
$$\varphi'' = \bar{1},9782739 - \bar{1},9756701 = +0{,}0026038$$
$$\varphi'\alpha'' = -0{,}4289368; \quad \varphi''\alpha' = +0{,}2812104$$
$$\varphi'\alpha'' - \varphi''\alpha' = -0{,}7101472; \quad \varphi' - \varphi'' = -0{,}0065390;$$

daher erster Näherungswerth:

$$z = \frac{7101472}{65390} = 108{,}601^0 = 108^0 36'.$$

Setze ferner $z = 108^0 36' = \alpha'$ und $z = 108^0 38' = \alpha''$

$$\log\text{arc}({}^1/_2.108^0 36') = 3{,}5129511 - 3{,}5362738 = \bar{1},9766773$$

Digitized by Google

$\log \sin 108^\circ 36' = \log \sin 71^\circ 24' = \bar{1},9767022$; daher:

$\varphi' = \bar{1},9766773 - \bar{1},9767022 = -0,0000249.$

$\log \text{arc}(1/2 . 108^\circ 38') = 3,5130844 - 3,5362738 = \bar{1},9768106$

$\log \sin 108^\circ 38' = \log \sin 71^\circ 22' = \bar{1},9766171$; daher:

$\varphi'' = \bar{1},9768106 - \bar{1},9766171 = +0,0001935$

$\varphi'\alpha'' = -0,1622982$; $\varphi''\alpha' = +1,2608460$

$\varphi'\alpha'' - \varphi''\alpha' = -1,4231442$; $\varphi' - \varphi'' = -0,0002184$;

daher zweiter Näherungswerth:

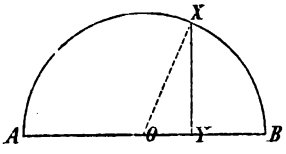
$$z = \frac{14231442}{2184} = 6516,228' = 108^\circ 36' 13,68''.$$

Weil $x = 2z$, so ist $x = 217^\circ 12' 27,36''$. Nun ist:

$\log \text{arc}\, x = \log \text{arc}\, 217^\circ 12' 27,36'' = \log \text{arc}\, 781947,36''$

$= 5,8931776 - 5,3144251 = 0,5787525$; folglich:

$\text{arc}\, x = AEC = \text{num log}\, 0,5787525 = 3,790988.$



22. In dem Halbkreise AXB sei O der Mittelpunkt des Kreises und X der gesuchte Punkt. Zieht man XY senkrecht auf AB und verbindet O mit X, alsdann ist XY der Sinus des Winkels XOB; dieser Winkel hat den Bogen $XB = AXB - AX$ zum Maße; daher:

$$XY = \sin(AXB - AX) \text{ oder:}$$

wenn wir den Bogen $AXB = \pi$ und $AX = z$ setzen:

$$XY = \sin(\pi - z).$$

OY ist der Cosinus des Winkels BOX oder des Bogens $AXB - AX$, folglich $OY = \cos(\pi - z)$. Nun ist $AY = AO + OY$ und weil der Radius AO als 1 angenommen wird, so ist:

$$AY = 1 + \cos(\pi - z).$$

Nun soll nach der Annahme $XY + AY = \text{arc}\, AX$ sein; mithin ist:

$$\sin(\pi - z) + 1 + \cos(\pi - z) = z \text{ oder:}$$
$$z - 1 - \cos(\pi - z) - \sin(\pi - z) = 0.$$

Weil $\sin(\pi - z) = \sin z$ und $\cos(\pi - z) = -\cos z$ ist, so wird:

$$z - 1 + \cos z - \sin z = 0.$$

Da nun $\cos z - \sin z = \sqrt{2}\cos(45^\circ + z) = \sqrt{2}\cos(1/4\pi + z)$, so ist auch:

$$z - 1 + \sqrt{2}\cos(z + 1/4\pi) = 0 \text{ oder:}$$
$$z + \sqrt{2}\cos(z + 1/4\pi) - 1 = 0.$$

Nach einigen Versuchen wird man finden, daß der Bogen zwischen $\text{arc}\, 138^\circ = \alpha'$ und $\text{arc} = 139^\circ = \alpha''$ liegt. Nun ist:

Digitized by Google

$$\text{arc}\,138^0 = 2{,}408554 - 1{,}000000$$
$$\sqrt{2\cos 183^0} = \sqrt{2\cos 3^0} = 1{,}412275$$
$$\text{also } \varphi' = -0{,}003721$$
$$\text{arc}\,139^0 = 2{,}426007 - 1{,}000000$$
$$\sqrt{2\cos 184^0} = \sqrt{2\cos 4^0} = 1{,}410768$$
$$\text{also } \varphi'' = +0{,}015239$$
$$\varphi'\alpha'' = -0{,}517219;\ \varphi''\alpha' = +2{,}102982$$
$$\varphi'\alpha'' - \varphi''\alpha' = -2{,}620201;\ \varphi' - \varphi'' = -0{,}01896;$$

also erster Näherungswerth:

$$z = \frac{2620201}{18960} = 138{,}19^0 = 138^0 11'.$$

Setze $z = 138^0 11' = \alpha'$ und $z = 138^0 12' = \alpha''$, so wird:

$$\text{arc}\,138^0 11' = 2{,}411752 - 1{,}000000$$
$$\sqrt{2\cos 138^0 11'} = \sqrt{2\cos 3^0 11'} = 1{,}412031$$
$$\text{daher } \varphi' = -0{,}000279$$
$$\text{arc}\,138^0 12' = 2{,}412043 - 1{,}000000$$
$$\sqrt{2\cos 138^0 12'} = \sqrt{2\cos 3^0 12'} = 1{,}412008$$
$$\text{also } \varphi'' = +0{,}000035;\ \text{daher:}$$
$$\varphi'\alpha'' = -2{,}313468;\ \varphi''\alpha' = +0{,}290185$$
$$\varphi'\alpha'' - \varphi''\alpha' = -2{,}603653;\ \varphi' - \varphi'' = -0{,}000314;$$

zweiter Näherungswerth:

$$z = \frac{2603653}{314} = 8291{,}888' = 138^0 11' 53'' \text{ oder:}$$
$$z = 8291{,}888.0{,}000290888 = 2{,}4120107 = AX.$$

Demnach ist:

$$\log XY = \log\sin(180^0 - 138^0 11' 53'') = \log\sin 41^0 48' 7'' = \bar{1}{,}8238378;\ \text{daher:}$$
$$XY = \text{num}\log\bar{1}{,}8238378 = 0{,}6665578.$$

Nun ist: $XY + AY = \text{arc}\,AX$; daher:

$$AY = \text{arc}\,AX - XY \text{ oder:}$$
$$AY = 2{,}4120107 - 0{,}6665578 = 1{,}7454529.$$

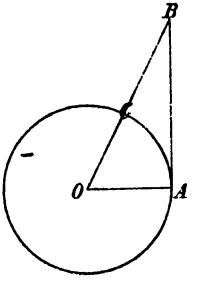
23. AB ist die Tangente des Winkels AOC und sei $= x$. Da dieselbe senkrecht auf dem Endpunkte des Radius OA steht, so ist der Inhalt des Dreiecks

$$ABO = {}^1/_2 AO \times AB$$

und weil der Radius als 1 angenommen wird, so ist das Dreieck $ABO = {}^1/_2 \text{tang}\,x$. Nun ist der Kreisausschnitt

$$ACO = {}^1/_2 x.$$

Soll das Dreieck ABO durch den Bogen AC halbirt werden, so muß sein:



Digitized by Google

$$^1/_2.^1/_2 \operatorname{tang} x = {}^1/_2 x \text{ oder } \operatorname{tang} x = 2x.$$

Vermittelst Logarithmen haben wir:

$$\log(2x) - \log\operatorname{tang} x = 0.$$

Nach einigen Versuchen wird man finden, daß der Bogen zwischen $66^0 = \alpha'$ und $67^0 = \alpha''$ liegt. Nun ist:

$$\log \operatorname{arc}(2.66^0) = 2{,}1205739 - 1{,}7581226 = 0{,}3624513$$
$$\log \operatorname{tang} 66^0 = 0{,}3514169$$
$$\text{also } \varphi' = +0{,}0110344$$
$$\log \operatorname{arc}(2.67^0) = 2{,}1271048 - 1{,}7581226 = 0{,}3689822$$
$$\log \operatorname{tang} 67^0 = 0{,}3721481$$
$$\text{also } \varphi'' = -0{,}0031659$$
$$\varphi'\alpha'' = 0{,}7393048;\ \varphi''\alpha' = -0{,}2089494$$
$$\varphi'\alpha'' - \varphi''\alpha' = +0{,}9482542;\ \varphi' - \varphi'' = +0{,}0142003;$$

also erster Näherungswerth:

$$x = \frac{9482542}{142003} = 66{,}77^0 = 66^0 46'.$$

Setze $x = 66^0 46' = \alpha'$ und $x = 66^0 47' = \alpha''$, so wird:

$$\log \operatorname{arc}(2.66^0 46') = 3{,}9037409 - 3{,}5362738 = 0{,}3674671$$
$$\log \operatorname{tang} 66^0 46' = 0{,}3672499$$
$$\text{also } \varphi' = +0{,}0002172$$
$$\log \operatorname{arc}(2.66^0 47') = 3{,}9038493 - 3{,}5362738 = 0{,}3675755$$
$$\log \operatorname{tang} 66^0 47' = 0{,}3675985$$
$$\text{also } \varphi'' = -0{,}0000230$$
$$\varphi'\alpha'' = +0{,}8703204;\ \varphi''\alpha' = -0{,}0921380$$
$$\varphi'\alpha'' - \varphi''\alpha' = +0{,}9624584;\ \varphi' - \varphi'' = +0{,}0002402;$$

zweiter Näherungswerth:

$$x = \frac{9624584}{2402} = 4006{,}904' = 66^0 46' 54{,}24''.$$

24. Bestimmen wir zunächst in dieser Gl. die Werthe für M und e, indem wir aus diesen Winkeln die ihnen entsprechenden Bogen berechnen. Nun ist:

$$M = 332^0 28' 54{,}77'' = 1196934{,}77.0{,}0000048481 = 5{,}8028595$$
$$e = 14^0 3' 20'' = 50600.0{,}0000048481 = 0{,}2453139.$$

Aus der umgeformten Gleichung:

$$E - M = e \sin E$$

folgt, daß zwischen M und E nur ein geringer Unterschied ist und E wegen der Größe von M im vierten Quadranten liegen muß. Mithin können wir $-e\sin E = +e\sin(360^0 - E)$ setzen und wir erhalten aus der gegebenen Gl. folgende:

$$M - E = e\sin(360^0 - E) \text{ oder:}$$
$$\log(M - E) - \log e - \log\sin(360^0 - E) = 0.$$

Digitized by Google

Einige Versuche zeigen, daß E zwischen 324° und 325° liegt. Nun ist:

$$E = \text{arc}\,324^\circ = 324.0{,}01745329 = 5{,}65486596;\ \text{daher:}$$
$$M-E = 5{,}8028595 - 5{,}65486596 = 0{,}1479935$$
$$\log(M-E) = \log 0{,}1479935 = \bar{1}{,}1702426$$
$$\log e = \log 0{,}2453139 = \bar{1}{,}3897221$$
$$\log\sin(360^\circ-E) = \log\sin 36^\circ = \bar{1}{,}7692187;\ \text{daher:}$$
$$\varphi' = \bar{1}{,}1702426 - \bar{1}{,}3897221 - \bar{1}{,}7692187 = +0{,}0113018$$
$$E = \text{arc}\,325^\circ = 325.0{,}01745329 = 5{,}67231925$$
$$M-E = 5{,}80285946 - 5{,}67231925 = 0{,}1305402$$
$$\log(M-E) = \log 0{,}1305402 = \bar{1}{,}1157442$$
$$\log\sin(360^\circ-E) = \log\sin 35^\circ = \bar{1}{,}7585913;\ \text{daher:}$$
$$\varphi'' = \bar{1}{,}1157442 - \bar{1}{,}3897221 - \bar{1}{,}7585913 = -0{,}0325692$$
$$\varphi'\alpha'' = +0{,}0113018.325 = +3{,}6730850$$
$$\varphi''\alpha' = -0{,}0325692.324 = -10{,}5524208$$
$$\varphi'\alpha'' - \varphi''\alpha' = +14{,}2255058;\ \varphi' - \varphi'' = +0{,}0438710;$$

also erster Näherungswerth:

$$E = \frac{142255058}{438710} = 324{,}25^\circ = 324^\circ 15'.$$

Setze ferner $E = 324^\circ 15' = \alpha'$ und $E = 324^\circ 16' = \alpha''$. Nun ist:

$$E = \text{arc}\,324^\circ 15' = 19455.0{,}000290888 = 5{,}65922604$$
$$\log(M-E) = \log 0{,}14363342 = \bar{1}{,}1572554$$
$$\log\sin 35^\circ 45' = \bar{1}{,}7665985;\ \text{daher:}$$
$$\varphi' = \bar{1}{,}1572554 - \bar{1}{,}3897221 - \bar{1}{,}7665985 = +0{,}0009348$$
$$E = \text{arc}\,324^\circ 16' = 19456.0{,}000290888 = 5{,}65951693$$
$$\log(M-E) = \log 0{,}1433425 = \bar{1}{,}1563750$$
$$\log\sin(360^\circ - 324^\circ 16') = \log\sin 35^\circ 44' = \bar{1}{,}7664229$$
$$\varphi'' = \bar{1}{,}1563750 - \bar{1}{,}3897221 - \bar{1}{,}7664229 = +0{,}0002300$$
$$\varphi'\alpha'' = 18{,}1874688;\ \varphi''\alpha' = 4{,}4746500$$
$$\varphi'\alpha'' - \varphi''\alpha' = 13{,}7128188;\ \varphi' - \varphi'' = 0{,}0007048;$$

also zweiter Näherungswerth:

$$E = \frac{137128188}{7048} = 19456{,}32' = 324^\circ 16' 19''$$

Setze weiter $E = 324^\circ 16' 19'' = \alpha'$ und $E = 324^\circ 16' 30''$, so wird:

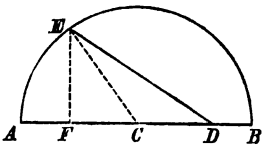
$$E = \text{arc}\,324^\circ 16' 19'' = 1167379.0{,}0000048481 = 5{,}65957013$$
$$\log(M-E) = \log 0{,}14328933 = \bar{1}{,}1562138$$
$$\log\sin 35^\circ 43' 41'' = \bar{1}{,}7663673;\ \text{daher:}$$
$$\varphi' = \bar{1}{,}1562138 - \bar{1}{,}3897221 - \bar{1}{,}7663673 = +0{,}0001244;$$
$$E = \text{arc}\,324^\circ 16' 30'' = 1167390.0{,}0000048481 = 5{,}65962346;$$

Digitized by Google

$$\log(M-E) = \log 0{,}1432360 = \bar{1}{,}1560522$$
$$\log\sin 35^0 43'30'' = \bar{1}{,}7663351;\ \text{daher:}$$
$$\varphi'' = \bar{1}{,}1560522 - \bar{1}{,}3897221 - \bar{1}{,}7663351 = -0{,}0000050$$
$$\varphi'\alpha'' = +145{,}2233160;\ \varphi''\alpha' = -5{,}8368950$$
$$\varphi'\alpha'' - \varphi''\alpha' = +151{,}0602110;\ \varphi' - \varphi'' = +0{,}0001294;$$

dritter Näherungswerth:

$$E = \frac{1510602110}{1294} = 1167389{,}57'' = 324^0 16'29{,}57''.$$



25. Wir nehmen an, DE halbire den Halbkreis und der kleinere Bogen AE sei $= x$. Ziehen wir den Radius CE, so wird dadurch der Raum ADE in den Kreisausschnitt AEC und das Dreieck ECD zerlegt. Für den Radius r ist jeder Bogen, dessen Centriwinkel x Grad beträgt $= rx$; also ist der Inhalt des Kreisausschnittes $AEC = {}^1/_2 r.rx = {}^1/_2 r^2 x$. Ziehen wir aus E die senkrechte EF, so ist der Inhalt des Dreiecks $ECD = {}^1/_2 CD \times EF$. Nun ist nach der Angabe $CD = r - 1$ und $EF = AC\sin x = r\sin x$; mithin ist das Dreieck $ECD = {}^1/_2(r-1).r\sin x$; daher ist der Kreisausschnitt ACE + dem Dreiecke $ECD = {}^1/_2 r^2 x + {}^1/_2(r-1).r\sin x = {}^1/_2 r(rx + (r-1)\sin x)$. Nun soll dies die Hälfte des Halbkreises oder den vierten Theil des Kreises um $C = {}^1/_4 r^2\pi$ ausmachen; daher erhalten wir die Gleichung:

$${}^1/_2 r(rx + (r-1)\sin x) = {}^1/_4 r^2\pi \text{ oder:}$$
$$2(rx + (r-1)\sin x) = r\pi;\ \text{hieraus folgt:}$$

$$\frac{r}{2(r-1)}(\pi - 2x) = \sin x.$$

Setzen wir hierin den Werth für $r = 5$ und drücken die Gl. logarithmisch aus, so ist:

$$\log\{{}^5/_8(\pi - 2x)\} - \log\sin x = 0.$$

Durch einige Versuche wird man sich bald überzeugen, daß der Bogen x zwischen 53^0 und 54^0 liegt. Nun ist für $x = 53^0$:

$$\pi - 2x = 74^0 = 74.0{,}01745329 = 1{,}29154346$$
$$\log\{{}^5/_8(\pi - 2x)\} = \log 0{,}80721466 = \bar{1}{,}9069891$$
$$\log\sin x = \log\sin 53^0 = \bar{1}{,}9023486$$
$$\text{also } \varphi' = +0{,}0046405.$$

Für $x = 54^0$ wird:

$$\pi - 2x = 72^0 = 72.0{,}01745329 = 1{,}25663688$$
$$\log\{{}^5/_8(\pi - 2x)\} = \log 0{,}78539805 = \bar{1}{,}8950898$$
$$\log\sin x = \log\sin 54^0 = \bar{1}{,}9079576$$
$$\text{also } \varphi'' = -0{,}0128678;\ \text{daher:}$$

Digitized by Google

$\varphi'\alpha'' = +0{,}2505870$; $\varphi''\alpha' = -0{,}6819934$;
$\varphi'\alpha'' - \varphi''\alpha' = +0{,}9325804$; $\varphi' - \varphi'' = +0{,}0175083$;
also erster Näherungswerth:

$$x = \frac{9325804}{175083} = 53{,}265^0 = 53^0 15' 54''.$$

Setze ferner $x = 53^0 15' 54'' = \alpha'$ und $x = 53^0 16' = \alpha''$.
Für $x = 53^0 15' 54''$ wird $\pi - 2x = 73^0 28' 12'' = 1{,}2822838$

$$\log\{{}^5/_8(\pi - 2x)\} = \log 0{,}8014274 = \bar{1}{,}9038642$$
$$\log \sin 53^0 15' 54'' = \bar{1}{,}9038550$$
$$\text{also } \varphi' = +0{,}0000092.$$

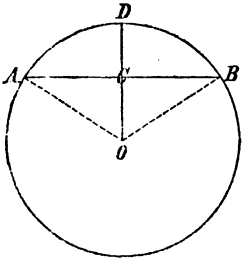
Für $x = 53^0 16'$ wird $\pi - 2x = 73^0 28' = 1{,}2822343$

$$\log\{{}^5/_8(\pi - 2x)\} = \log 0{,}8013964 = \bar{1}{,}9038473$$
$$\log \sin 53^0 16' = \bar{1}{,}9038644$$
$$\text{also } \varphi'' = -0{,}0000171$$

$\varphi'\alpha'' = +1{,}7641920$; $\varphi''\alpha' = -3{,}2789934$
$\varphi'\alpha'' - \varphi''\alpha' = +5{,}0431854$; $\varphi' - \varphi'' = +0{,}0000263$;
also zweiter Näherungswerth:

$$x = \frac{50431854}{263} = 53^0 15' 56{,}5''.$$

26. Es sei ACBD der verlangte Kreisabschnitt. Zieht man vom Mittelpunkte des Kreises um O eine Senkrechte auf die Sehne AB und verlängert dieselbe bis zum Bogen, so halbirt OD sowohl die Sehne AB als auch den Bogen ADB. Zieht man noch die Radien AO und BO, so entsteht der Kreisausschnitt AOBD. Derselbe besteht aus dem Kreisabschnitt ABD und dem Dreieck AOB. Nun sei der Bogen $AD = x$, dann ist $AD + DB = 2x$; mithin ist für den Radius 1 der Inhalt des Kreisausschnittes $AOBD = 2x \cdot {}^1/_2 = x$. Ferner ist der Inhalt des Dreiecks $AOB = \sin x \cdot \cos x = {}^1/_2 \sin 2x$; folglich ist der Kreisabschnitt $ACBD = x - {}^1/_2 \sin 2x$. Derselbe soll nun nach der Angabe α) drei- und β) fünfmal so groß sein, als ein Kreis, der zum Durchmesser $DC = DO - CO = 1 - \cos x$ hat; mithin ist der Inhalt eines solchen Kreises $= {}^1/_4(1 - \cos x)^2\pi$. Nun ist:



$$1 - \cos x = 2(\sin {}^1/_2 x)^2; \text{ also:}$$
$$(1 - \cos x)^2 = 4(\sin {}^1/_2 x)^4; \text{ daher ist:}$$
$${}^1/_4(1 - \cos x)^2\pi = (\sin {}^1/_2 x)^4\pi.$$

Demnach haben wir folgende zwei Gleichungen aufzulösen:

Digitized by Google

$$\alpha)\ x - {}^1/_2\sin 2x = 3\pi(\sin {}^1/_2 x)^4$$
$$\beta)\ x - {}^1/_2\sin 2x = 5\pi(\sin {}^1/_2 x)^4$$

α) Vermittelst Logarithmen erhalten wir aus der ersten Gl.:

$$\log(2x - \sin 2x) - \log(6\pi) - 4\log\sin {}^1/_2 x = 0.$$

Der gesuchte Bogen liegt zwischen 62^0 und 63^0. Nun ist:

$$2x = 2.\text{arc}\,62^0 = 2.62.0{,}01745329 = 2{,}16420796$$
$$\log\sin(2.62^0) = \log\sin 56^0 = \bar{1}{,}9185742;\ \text{also:}$$
$$\sin 2x = 0{,}8290375;\ \text{daher:}$$
$$\log(2x - \sin 2x) = \log 1{,}3351704 = 0{,}1255366$$
$$\log(6\pi) = \log(3.6{,}28318531) = \log 18{,}84955593 = 1{,}2753013$$
$$4\log\sin {}^1/_2 x = 4\log\sin 31^0 = 4.\bar{1}{,}7118393 = \bar{2}{,}8473572;\ \text{also:}$$
$$\varphi' = 0{,}1255366 - 1{,}2753013 - \bar{2}{,}8473572 = +0{,}0028781$$

Für $x = 63^0$ wird:

$$2x = 2\,\text{arc}\,63^0 = 2{,}19911454$$
$$\log\sin 2.63^0 = \log\sin 54^0 = \bar{1}{,}9079576;\ \text{also:}$$
$$\sin 2x = 0{,}8090168$$
$$\log(2x - \sin 2x) = \log 1{,}3900977 = 0{,}1430454$$
$$4\log\sin {}^1/_2 x = 4\log\sin 31^0 30' = \bar{2}{,}8723404;\ \text{daher:}$$
$$\varphi'' = 0{,}1430454 - 1{,}2753013 - \bar{2}{,}8723404 = -0{,}0045963;$$
$$\text{mithin}\ \varphi'\alpha'' = 0{,}1813203;\ \varphi''\alpha' = -0{,}2849706$$
$$\varphi'\alpha'' - \varphi''\alpha' = +0{,}4662909;\ \varphi' - \varphi'' = +0{,}0074744;\ \text{folglich:}$$
$$x = \frac{4662909}{74744} = 62{,}385^0 = 62^0 23' 6''$$

β) Aus der obigen Gleichung unter β) erhalten wir:

$$\log(2x - \sin 2x) - \log(10\pi) - 4\log\sin {}^1/_2 x = 0.$$

Setzen wir hierin $x = \text{arc}\,38^0$, so wird:

$$2x = 2.\text{arc}\,38^0 = 1{,}32645004$$
$$\log\sin 2x = \log\sin(2.38^0) = \bar{1}{,}9869041;\ \text{also:}$$
$$\sin 2x = 0{,}9702957$$
$$\log(2x - \sin 2x) = \log 0{,}3561543 = \bar{1}{,}5516382$$
$$\log(10\pi) = \log(5.6{,}28318531) = \log 31{,}41592655 = 1{,}4971499$$
$$4\log\sin {}^1/_2 x = 4\log\sin 19^0 = \bar{2}{,}0505676;\ \text{also:}$$
$$\varphi' = \bar{1}{,}5516382 - 1{,}4971499 - \bar{2}{,}0505676 = +0{,}0039207$$

Für $x = 38^0 30'$ wird $2x = 2\,\text{arc}\,38^0 30' = 1{,}34390256$

$$\log\sin 2x = \log\sin(2.38^0 30') = \bar{1}{,}9887239;\ \sin 2x = 0{,}9743700$$
$$\log(2x - \sin 2x) = \log 0{;}3695326 = \bar{1}{,}5676527$$
$$4\log\sin {}^1/_2 x = 4\log\sin 19^0 15' = \bar{2}{,}0724264;\ \text{daher:}$$
$$\varphi'' = \bar{1}{,}5676527 - 1{,}4971499 - \bar{2}{,}0724264 = -0{,}0019236$$
$$\varphi'\alpha'' = +0{,}1509469;\ \varphi''\alpha' = -0{,}0730968$$
$$\varphi'\alpha'' - \varphi''\alpha' = +0{,}2240437;\ \varphi' - \varphi'' = +0{,}0058443;\ \text{mithin:}$$
$$x = \frac{2240437}{58443} = 38{,}335^0 = 38^0 20' 6''.$$

Digitized by Google

A. Aufgaben aus der Geometrie.

(Heis §. 107.)

§. 515. 1. Die Anzahl der Seiten sei x. Nun findet man die Anzahl der rechten Winkel eines Vielecks aus der Anzahl seiner Seiten, wenn man von der Anzahl der Seiten 2 subtrahirt und den Rest verdoppelt; demnach beträgt die Summe der Winkel des x-Ecks $(x-2).2$ Rechte, und weil dies n Rechte beträgt, so ist:

$$(x-2).2 = n; \text{ also } x = 2+{}^1/_2 n \text{ Seiten.}$$

2. Das Vieleck habe x Seiten; es enthält also $(x-2).2$ rechte Winkel; folglich, da in einem regelmäßigen Vieleck alle Winkel einander gleich sind, beträgt 1 Winkel $\frac{(x-2).2}{x}$ Rechte; daher ist:

$$\frac{(x-2).2}{x} = a; \text{ also } x = \frac{4}{2-a} \text{ Seiten.}$$

3. α) Das x Eck habe 65 Diagonalen. Nun erhält man die Anzahl aller möglichen Diagonalen, die man in ein Vieleck ziehen kann, wenn man von der vollen Seitenanzahl 3 subtrahirt, den Rest mit der Seitenanzahl multiplicirt und das entstandene Produkt durch 2 dividirt; demnach hat also das x-Eck $\frac{(x-3)x}{2}$ Diagonalen. Man vgl. §. 458. 11. β).

Hiernach ist:

$$\frac{(x-3)x}{2} = 65 \text{ oder } (x-1{}^1/_2)^2 = (11{}^1/_2)^2; \text{ folgl. } x = 13.$$

3. β) Soll das Vieleck n Diagonalen haben, so ist:

$$\frac{(x-3)x}{2} = n; \text{ also } x = 1{}^1/_2 + \sqrt{2n+2{}^1/_4}.$$

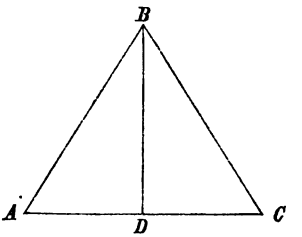
4. Zieht man in dem gleichseitigen Dreiecke ABC die Höhe $BD = h$ und nimmt man $AB = x$, so ist, da AC durch BD halbirt worden ist, sowohl AD als auch $DC = {}^1/_2 x$. Nun ist:

$$BD^2 + AD^2 = AB^2 \text{ oder:}$$

$h^2 + ({}^1/_2 x)^2 = x^2$; daher $h^2 = {}^3/_4 x^2$; mithin $h = \sqrt{{}^3/_4 x^2} = {}^1/_2 x\sqrt{3}$. Der Inhalt des Dreiecks ist daher:

$${}^1/_2 x . {}^1/_2 x\sqrt{3} = {}^1/_4 x^2\sqrt{3}$$

und da der Inhalt $= p$ sein soll, so ist:



Digitized by Google

$\frac{1}{4}x^2\sqrt{3} = p$ oder $\frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{3}p\sqrt{3}$; folglich:

$$x = 2\sqrt{\tfrac{1}{3}p\sqrt{3}} = \tfrac{2}{3}\sqrt{3p\sqrt{3}} = 1{,}5196\sqrt{p}.$$

5. In dem Dreiecke ABC sei $AB = BC = c$ und die Grundlinie $AC = x$. Man ziehe in demselben die Höhe $BD = h$, so ist $AD = DC = \frac{1}{2}x$. Bestimmt man h wie in der vorigen Aufgabe so hat man $h^2 = c^2 - \frac{1}{4}x^2$; folglich:

$$h = \sqrt{c^2 - \tfrac{1}{4}x^2}.$$

Demnach ist der Inhalt des Dreiecks $ABC = \frac{1}{2}x.\sqrt{c^2 - \frac{1}{4}x^2}$ und weil dieser Inhalt p beträgt, so ist:

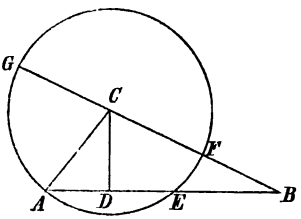
$$\tfrac{1}{2}x.\sqrt{c^2 - \tfrac{1}{4}x^2} = p \text{ oder:}$$

$$\tfrac{1}{4}x^2(c^2 - \tfrac{1}{4}x^2) = p^2 \text{ oder } x^4 - 4c^2x^2 + 16p^2 = 0;$$

$$(x^2 - 2c^2)^2 = 4(c^4 - 4p^2) = 4(c^2 + 2p)(c^2 - 2p); \text{ daher:}$$

$$x^2 = 2\{c^2 \pm \sqrt{(c^2 + 2p)(c^2 - 2p)}\}; \text{ folglich:}$$

$$x = \sqrt{2\{c^2 \pm \sqrt{(c^2 + 2p)(c^2 - 2p)}\}}.$$



6. In dem Dreiecke ABC sei $BC = a$, $AC = b$; die dritte gesuchte Seite $AB = x$. Man ziehe die Höhe $CD = h$ und bestimme dieselbe. Um diese zu finden, muß man die beiden Abschnitte AD und DB zu bestimmen suchen, in welche die Seite AB durch die Höhe CD getheilt worden. Setzt man $DB = z$ und $AD = y$, so ist $z + y = x$. Da man also die Summe dieser Abschnitte kennt, so suche man ihre Differenz. Deshalb beschreibe man etwa mit der kleinern Seite $AC = b$ um C einen Kreis, der AB in E, BC in F und ihre Verlängerung in G schneidet. Wenn nun aus einem Punkte (B) außerhalb des Kreises zwei Linien (AB und BG) gezogen werden, welche den Kreis schneiden, so verhalten sich die ganzen Sekanten umgekehrt, wie ihre äußern Abschnitte. Hiernach ist also:

$$(1)\ BE : BF = BG : BA.$$

Nun ist, weil die aus dem Mittelpunkte des Kreises auf die Sehne gezogene Senkrechte CD die Sehne AE halbirt, $AD = DE$ und da $DB = z$, so ist $BE = z - y$. Ferner ist $CF = AC$ als Radius, also ist $BF = a - b$. Ferner ist $BG = BC + GC$ und $GC = AC$; daher $BG = BC + AC = a + b$. Diese für BE, BF und BG gefundenen Werthe in (1) gesetzt, liefert:

$$(2)\ (z - y) : (a - b) = (a + b) : x; \text{ daher:}$$

Digitized by Google

$$(3)\ z-y=\frac{(a-b)(a+b)}{x}=\frac{a^2-b^2}{x}.$$

Nun ist nach der Annahme:

$$(4)\ z+y=x;\ \text{folglich:}$$

$$(5)\ z=\frac{a^2-b^2+x^2}{2x}=BD\ \text{und}$$

$$(6)\ y=\frac{x^2-a^2+b^2}{2x}=AD.$$

Da nun das Dreieck ADC ein rechtwinkliges ist, so ist:

$$DC^2=AC^2-AD^2\ \text{oder:}$$

$$h^2=b^2-y^2=b^2-\left(\frac{x^2-a^2+b^2}{2x}\right)^2=\frac{4b^2x^2-(x^2-a^2+b^2)^2}{4x^2};\ \text{daher:}$$

$$(7)\ h=\frac{1}{2x}\sqrt{4b^2x^2-(x^2-a^2+b^2)^2}=DC.$$

Hiernach ist der Inhalt des Dreiecks:

$$ABC=\frac{{}^1/_2x.\sqrt{4b^2x^2-(x^2-a^2+b^2)^2}}{2x}$$

$$={}^1/_4\sqrt{4b^2x^2-(x^2-a^2+b^2)^2}.$$

Nun ist nach der Aufgabe der Inhalt des Dreiecks ABC auch $=p$; daher ist:

$$(8)\ {}^1/_4\sqrt{4b^2x^2-(x^2-a^2+b^2)^2}=p\ \text{oder:}$$

$${}^1/_{16}\{4b^2x^2-(x^2-a^2+b^2)^2\}=p^2;\ \text{hieraus folgt:}$$

$$\{x^2-(a^2+b^2)\}^2=4(ab-2p)(ab+2p);\ \text{also:}$$

$$x^2=a^2+b^2\pm2\sqrt{(ab-2p)(ab+2p)};\ \text{folglich:}$$

$$x=\sqrt{a^2+b^2\pm2\sqrt{(ab-2p)(ab+2p)}}=AB.$$

7. Der in der Gleichung (7) der vorigen Nummer unter dem Wurzelzeichen stehende Ausdruck läßt sich auch auf folgende Weise umformen:

$$h=\frac{1}{2x}\sqrt{(a+b+x)(a+b-x)(a-b+x)(-a+b+x)}.$$

Setzt man hierin die unsrer Aufgabe entsprechenden Werthe ein und multiplicirt die Gl. mit $2x$, so wird:

$$(1)\ 2hx=\sqrt{(x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z)}.$$

Nun ist ${}^1/_2hx={}^1/_2h'y={}^1/_2h''z$ oder:

$$(2)\ hx=h'y=h''z.$$

Substituirt man in Gl. (1) folgende Werthe für y und z aus (2), nämlich $y=\frac{hx}{h'}$ und $z=\frac{hx}{h''}$, so ergibt sich:

Digitized by Google

$$2hx=\sqrt{\left(x+\frac{hx}{h'}+\frac{hx}{h''}\right)\left(x+\frac{hx}{h'}-\frac{hx}{h''}\right)\left(x-\frac{hx}{h'}+\frac{hx}{h''}\right)\left(-x+\frac{hx}{h'}+\frac{hx}{h''}\right)}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{x}{h'h''}\right)^4\cdot(h'h''+hh''+hh')(h'h''+hh''-hh')(h'h''-hh''+hh')(-h'h''+hh''+hh')}$$

Hieraus folgt:

$$x=\frac{2h(h'h'')^2}{\sqrt{\{(h'h''+hh''+hh')(h'h''+hh''-hh')(h'h''-hh''+hh')(-h'h''+hh''+hh')\}}}$$

Multiplicirt man diesen für die Grundlinie gefundenen Ausdruck mit $^1/_2h$, um den Inhalt des Dreiecks zu erhalten, so hat man, wenn man denselben p gleichstellt:

$$\frac{(hh'h'')^2}{\sqrt{\{(h'h''+hh''+hh')(h'h''+hh''-hh')(h'h''-hh''+hh')(-h'h''+hh''+hh')\}}}=p.$$

Hiernach ist: $x=2p:h$; $y=2p:h'$ und $z=2p:h''$.

Oder: Setzt man der Kürze wegen:

$$\sqrt{h'h''+hh''+hh'}=H,\ \sqrt{h'h''+hh''-hh''}=H'$$

$$\sqrt{h'h''-hh''+hh'}=H'',\ \sqrt{-h'h''+hh''+hh'}=H''',$$

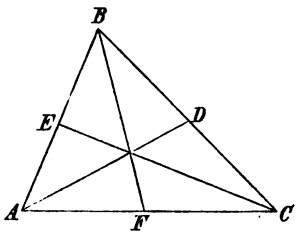
so erhält man: $x=\frac{2h(h'h'')^2}{HH'H''H'''}$.

Auf ganz analoge Weise findet man:

$$y=\frac{2h'(hh'')^2}{HH'H''H'''}\text{ und }z=\frac{2h''(hh')^2}{HH'H''H'''}.$$

Hieraus ergibt sich leicht der Inhalt des Dreiecks:

$$p=\frac{(hh'h'')^2}{HH'H''H'''}.$$



8. Verbindet man die Spitze eines Dreiecks mit der Mitte der Grundlinie durch eine gerade Linie, so ist die Summe der Quadrate der beiden Seiten gleich der Summe aus dem halben Quadrate der Grundlinie und dem doppelten Quadrate der Verbindungslinie. Halbirt man also die 3 Seiten des Dreiecks ABC, nämlich $AC=x$ in F, $BC=y$ in D, $AB=z$ in E und zieht die Verbindungslinien $BF=a$, $AD=b$ und $EC=c$, so ist:

$$AB^2+BC^2=\,^1/_2AC^2+2BF^2 \text{ oder:}$$

$$z^2+y^2=\,^1/_2x^2+2a^2;\text{ daher:}$$

$$(1)\ 2z^2+2y^2-x^2=4a^2.$$

Ferner ist: $AB^2+AC^2=\,^1/_2BC^2+2AD^2$ oder:

Digitized by Google

$z^2+x^2 = {}^1/_2y^2+2b^2$; daher:

(2) $2z^2-y^2+2x^2 = 4b^2$.

Endlich ist: $BC^2+AC^2 = {}^1/_2AB^2+2EC^2$; oder:

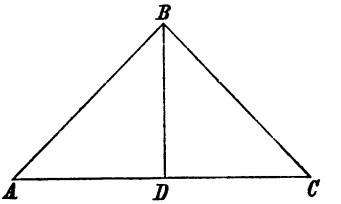
$y^2+x^2 = {}^1/_2z^2+2c^2$; daher:

(3) $-z^2+2y^2+2x^2 = 4c^2$.

Bestimmt man aus diesen 3 Gleichungen x, so findet man:

$9x^2 = 4(-a^2+2b^2+2c^2)$; $x = {}^2/_3\sqrt{-a^2+2b^2+2c^2} = AC$.

9. α) In dem bei B rechtw. Dreiecke ABC sei die Höhe $BD = h$, $AB + BC = s$, $AB = y$, also $BC = s-y$ und die Hypotenuse $AC = x$. Nun ist $AC^2 = AB^2 + BC^2$; oder $x^2 = y^2+(s-y)^2$; daher:



(1) $x^2-2y^2+2sy = s^2$.

Ferner ist: $AB \times BC = AC \times BD$ oder $y(s-y) = hx$; daher:

(2) $sy-y^2 = hx$.

Eliminirt man aus den beiden Gl. (1) und (2) y und vervollständigt das Quadrat, so ist:

$(x+h)^2 = h^2+s^2$; also: $x = \sqrt{h^2+s^2}-h$ = der Hypotenuse AC.

Den Werth für x in (2) gesetzt, gibt:

$sy-y^2 = h\{\sqrt{h^2+s^2}-h\}$ oder:

$(y-{}^1/_2s)^2 = {}^1/_4\{s^2-4h[\sqrt{h^2+s^2}-h]\}$; also:

$y = {}^1/_2\{s \pm \sqrt{s^2-4h(\sqrt{h^2+s^2}-h)}\}$ = den beiden Katheten AB und BC.

9. β) Werden die 3 Seiten eines Dreiecks durch 2a, a^2+1 und a^2-1 ausgedrückt, so ist dasselbe ein rechtwinkliges, weil $(a^2+1)^2 = (a^2-1)^2+(2a)^2$.

9. γ) In vorstehendem rechtw. Dreiecke ABC sei $AC = a^2+1$, $AB = a^2-1$ und $BC = 2a$. Nun ist der Inhalt des Dreiecks $ABC = {}^1/_2AB \times BC = {}^1/_2(a^2-1)2a = (a^2-1)a$. Es soll nun algebraisch gezeigt werden, daß:

${}^1/_2AB \times BC = {}^1/_2(AB+BC+AC).{}^1/_2(AB+BC-AC)$ sei.

Setzt man hierin die Werthe für AB, BC und AC ein, so wird:

$(a^2-1)a = {}^1/_2(a^2-1+2a+a^2+1).{}^1/_2(a^2-1+2a-(a^2+1))$

$= (a^2+a).(a-1) = a(a+1)(a-1) = (a^2-1)a$.

10. Heißen die beiden Katheten x und y, so ist:

(1) $x^2+y^2 = h^2$.

Nun besteht der Inhalt des rechtw. Dreiecks aus dem halben Produkte der beiden Katheten; daher ist:

(2) ${}^1/_2xy = p$.

Digitized by Google

Aus den beiden Gl. (1) und (2) erhält man:
(3) $x+y=\sqrt{h^2+4p}$ und (4) $x-y=\sqrt{h^2-4p}$; folglich:

$$\left.\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right\}=\tfrac{1}{2}\{\sqrt{h^2+4p}\pm\sqrt{h^2-4p}\}.$$

11. Bezeichnen wir die Hypotenuse mit x, die beiden Katheten mit y und z, so ist:
(1) $x+y+z=u$; (2) $x^2=y^2+z^2$; (3) $\tfrac{1}{2}yz=p$.
Erhebe (1) ins Quadrat und setze in diese Gl. aus (2) den Werth für y^2+z^2 und aus (3) den Werth für yz, so erhalten wir:

$$(4)\quad 2x(x+y+z)=u^2-4p.$$

Setze hierin den Werth für $x+y+z$ aus (1), so wird:

$$2ux=u^2-4p;\ \text{also}\ x=\frac{u^2-4p}{2u}.$$

Setze diesen Werth von x in (1), so hat man:

$$(5)\quad y+z=\frac{4p+u^2}{2u}.$$

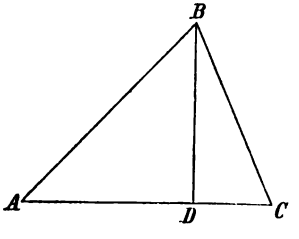
Hiermit ist die Summe der beiden Unbekannten y und z gegeben; suchen wir die Differenz derselben Unbekannten. Erhebt man (5) ins Quadrat und subtrahirt hiervon das achtfache der Gl. (3), so wird:

$$(6)\quad (y-z)^2=\frac{(4p+u)^2-32pu^2}{4u^2};\ \text{daher:}$$

$$(7)\quad y-z=\pm\frac{1}{2u}\sqrt{(4p+u)^2-32pu^2}.$$

Aus (5) und (7) folgt:

$$\left.\begin{matrix}y\\z\end{matrix}\right\}=\frac{4p+u^2\pm\sqrt{(4p+u^2)^2-32pu^2}}{4u}.$$



12. Es sei $BC=x$, $AC=2p:h$ und $AB=u-x-\frac{2p}{h}$. Man bestimme nun die beiden oder nur einen der Abschnitte AD und DC nach den bei Nr. 6 angestellten Betrachtungen, so findet man, daß:

$$DC=\frac{x^2-\left(u-x-\frac{2p}{h}\right)^2+\frac{4p^2}{h^2}}{(4p:h)}$$

$$=\frac{2ux-(4px:h)+(4pu:h)-u^2}{(4p:h)}.$$

Digitized by Google

Nun ist ferner $BD = h$ und weil in dem rechtw. Dreieck BDC $BC^2 = BD^2 + DC^2$ ist, so erhalten wir, wenn wir die bestimmten Werthe einsetzen:

$$x^2 = h^2 + \frac{\{2ux - (4px:h) + (4up:h) - u^2\}^2}{(4p:h)}.$$

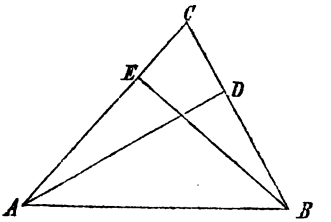
Entwickelt man diese Gl., so haben wir:

$$x^2 - x\left(u - \frac{2p}{h}\right) = \frac{16p^2 + \left(\frac{4up}{h} - u^2\right)^2}{4\left(\frac{4up}{h} - u^2\right)}; \text{ hieraus:}$$

$$\left(x - \frac{uh - 2p}{2h}\right)^2 = \frac{p^2\{(u-2h)(u+2h)h - 4pu\}}{uh^2(uh - 4p)}; \text{ folglich:}$$

$$x = \frac{u}{2} - \frac{p}{h}\left\{1 \mp \sqrt{\frac{(u-2h)(u+2h)h - 4pu}{u(uh - 4p}}\right\}.$$

13. α) In dem Dreiecke ABC sei $AB = a$, $BC = x$, $AD = h_1$, $EB = h_2$ und $AC = y$. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ACD und BEC ergibt sich:



$BC : AC = BE : AD$ oder:
$x : y = h_2 : h_1$; daher:

$$(1)\quad y = \frac{h_1}{h_2}x.$$

Nun ist weiter $AE = \sqrt{a^2 - h_2^2}$ und $CE = \sqrt{x^2 - h_2^2}$.
Da nun $y = AE + CE$ ist, so ist auch:

$$(2)\quad y = \sqrt{a^2 - h_2^2} + \sqrt{x^2 - h_2^2}.$$

Aus (1) und (2) folgt also:

$$h_1 x - h_2\sqrt{a^2 - h_2^2} = h_2\sqrt{x^2 - h_2^2}.$$

Entwickelt und ordnet man diese Gl., so wird:

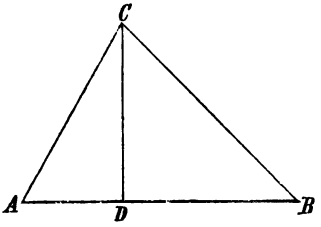
$$x^2 - x\frac{2h_1h_2\sqrt{a^2 - h_2^2}}{h_1^2 - h_2^2} + \frac{a^2h_2^2}{h_1^2 - h_2^2} = 0; \text{ daher:}$$

$$x = \frac{h_1h_2\sqrt{(a+h_2)(a-h_2)}}{(h_1+h_2)(h_1-h_2)} \pm \sqrt{-\frac{a^2h_2^2}{(h_1+h_2)(h_1-h_2)} + \frac{h_1^2h_2^2(a+h_2)(a-h_2)}{(h_1+h_2)^2(h_1-h_2)^2}}$$

$$= \frac{h_1h_2\sqrt{(a+h_2)(a-h_2)} \pm \sqrt{-a^2h^2_2(h_1+h_2)(h_1-h_2) + h^2_1h^2_2(a+h_2)(a-h_2)}}{(h_1+h_2)(h_1-h_2}$$

$$= \frac{h_1\sqrt{(a+h_2)(a-h_2)} \pm h_2\sqrt{(a+h_1)(a-h_1)}}{(h_1+h_2)(h_1-h_2)}h_2.$$

Digitized by Google



13. β) Die Seite AB sei = a, die Höhe darauf CD = h, die Summe der beiden Seiten AC + BC = s. Es fragt sich, wie groß sind AC und BC. Es sei nun AC = x, so ist BC = s − x. Berechnet man jetzt den Abschnitt BD, wie in Nr. 6 gezeigt ist, so findet man:

$$BD = \frac{(s-x)^2 - x^2 + a^2}{2a} = \frac{s^2 - 2sx + a^2}{2a}.$$

Da nun BDC ein bei D rechtw. Dreieck ist, so ist $BC^2 = CD^2 + BD^2$ oder:

$$(s-x)^2 = h^2 + \left(\frac{s^2 - 2sx + a^2}{2a}\right)^2 \text{ oder:}$$

$$x^2 - sx = \frac{2a^2s^2 - a^4 - 4a^2h^2 - s^4}{4(s^2 - a^2)}; \text{ daher:}$$

$$x = {}^1/_2 s \pm {}^1/_2 a \sqrt{\frac{s^2 - a^2 - 4h^2}{s^2 - a^2}} \text{ oder}$$

$$x = {}^1/_2 \left\{ s \pm a \sqrt{\frac{(s+a)(s-a) - 4h^2}{(s+a)(s-a)}} \right\} = \text{AC und BC.}$$

14. In dem obigen Dreiecke sei BC = a, AC = b und AB = c, CD = h. Nun sollen die Seiten a, b, c und die Höhe h in einer geometrischen Progression stehen. Der Exponent derselben sei $= \frac{1}{q}$ und demnach werde $c = b.q$, $b = b$, $a = \frac{b}{q}$, $h = \frac{b}{q^2}$ gesetzt. Nun ist $ch = 2ABC$, wenn ABC den Inhalt des Dreiecks bezeichnet; hierfür kann man aber auch setzen:

$$ch = {}^1/_2 \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)} \text{ oder:}$$
$$4c^2h^2 = (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c).$$

Setzt man hierin die für a, b, c, h angenommenen Ausdrücke durch b und q ein, so ist:

$$4b^2q^2 \cdot \frac{b^2}{q^4} = \left(\frac{b}{q} + b + bq\right)\left(\frac{b}{q} + b - bq\right)\left(\frac{b}{q} - b + bq\right)\left(-\frac{b}{q} + b + bq\right)$$
$$= \frac{b^4}{q^4}(1+q+q^2)(1+q-q^2)(1-q+q^2)(-1+q+q^2);$$

also: $4q^2 = \{(1+q)^2 - q^4\} \times \{q^4 - (1-q)^2\}$. Hieraus ergibt sich:

$$q^8 - 2q^6 - q^4 + 2q^2 + 1 = 0.$$

Digitized by Google

Setzt man $q^2 = x$, so erhalten wir:

$$x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0.$$

Löst man diese reciproke Gleichung durch Substitution von $x - \frac{1}{x} = z$, so wird: $z^2 - 2z + 1 = 0$, also $z = 1$. Hiernach ist:

$x - \frac{1}{x} = 1$; hieraus folgt $x = 1/2 \pm \sqrt{5/4} = 1/2(1 \pm \sqrt{5})$.

Nun ist $q^2 = x$; also $q = \sqrt{x} = \sqrt{1/2(1 \pm \sqrt{5})}$.
Da q positiv sein muß, so ist das untere Zeichen nicht statthaft, also ist:

$$q = \sqrt{1/2(1 + \sqrt{5})}.$$

Es ist $c = b.q = b.\sqrt{1/2(1+\sqrt{5})}$; $b = b$, $a = \frac{b}{q} = \frac{b}{\sqrt{1/2(1+\sqrt{5})}}$

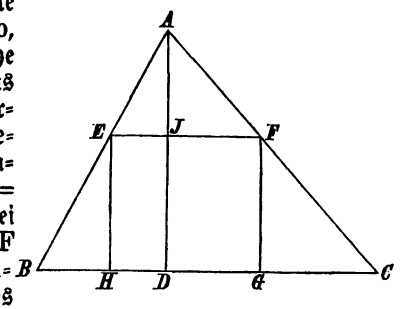
$= \frac{b\sqrt{1/2(\sqrt{5}-1)}}{\sqrt{1/4(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}} = \frac{b\sqrt{1/2(\sqrt{5}-1)}}{\sqrt{1/4(5-1)}}$, also $a = b.\sqrt{1/2(\sqrt{5}-1)}$.

Endlich ist $h = \frac{b}{q^2} = \frac{b}{1/2(1+\sqrt{5})} = b.1/2(\sqrt{5}-1)$. Somit ist also:

$AB : AC : BC : CD = \sqrt{1/2(\sqrt{5}+1)} : 1 : \sqrt{1/2(\sqrt{5}-1)} : 1/2(\sqrt{5}-1)$.

Diese 4 Ausdrücke bilden in der That eine geometrische Reihe, deren Exponent $= \frac{1}{\sqrt{1/2(\sqrt{5}+1)}} = \sqrt{1/2(\sqrt{5}-1)}$ ist.

15. In dem Dreiecke ABC sei $BC = a$, $AB = b$, $AC = c$ und die Höhe $AD = h$. Ferner habe das Quadrat, dessen Seite verlangt wird, die ihm gegebene Lage, es sei das Quadrat EFGH, worin $EF = EH$ und $EF \parallel BC$ ist. Es sei nun $EF = EH = HG = GF = DJ = x$. Zieht man zwischen den Schenkeln eines Winkels (A) zwei Parallelen (EF und BC), so sind die dadurch entstandenen Dreiecke (EAF und ABC) einander ähnlich. Da sich in ähnlichen Dreiecken die Höhen wie ihre Grundlinien verhalten, so ist:



$$AD : AJ = CB : EF \text{ oder,}$$

da $AD = h$, $JD = x$, also $AJ = h - x$ ist:

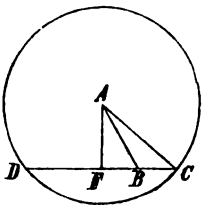
$h : (h - x) = a : x$; hieraus folgt $x = \frac{ah}{a+h} = HG$ u. s. w.

Digitized by Google

Um die Höhe $h = AD$ zu berechnen, hat man nur in die für denselben Werth in Nr. 6 gefundene Formel die jetzigen Werthe einzusetzen. Nach jener Aufgabe ist:

$$h = \frac{\sqrt{4b^2x^2 - (x^2+b^2-a^2)^2}}{2x} = \frac{\sqrt{4a^2b^2 - (a^2+b^2-c^2)^2}}{2a}$$

$$= \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}}{2a}$$



16. α) Gegeben sei der Kreis um A. Durch den Punkt B lege man die Sehne DC. Die Entfernung des Punktes B vom Mittelpunkte AB sei $= d$. Der Radius $AC = r$, die Sehne $DC = s$. Nun müssen die Theile DB und BC bestimmt werden. Halbirt man die Sehne im Punkte F und verbindet F mit dem Mittelpunkte A, so steht nach einem Satze in der Planimetrie AF senkrecht auf der Sehne. Es ist nun auch, da $DC = s$, sowohl DF als auch $CF = {}^1/_2 s$. Bezeichnet man das Stück BC mit x, so ist $BF = {}^1/_2 s - x$. Nun ist das Dreieck ABC aus leicht ersichtlichen Gründen ein stumpfwinkliges und da in einem stumpfwinkligen Dreieck das Quadrat der dem stumpfen Winkel gegenüberliegenden Seite gleich ist den Quadraten der beiden Schenkel des stumpfen Winkels vermehrt um das doppelte Rechteck aus einem dieser Schenkel und der Projection des andern auf diesen, so ist:

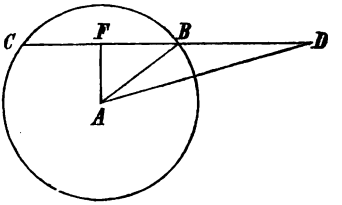
$$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC \times BF, \text{ also auch:}$$

$$r^2 = d^2 + x^2 + 2x.({}^1/_2 s - x) \text{ oder:}$$

$$x^2 - sx = d^2 - r^2; \text{ also: } x = {}^1/_2 s + \sqrt{{}^1/_4 s^2 - (r^2 - d^2)} = BC.$$

Da nun $DB = DC - BC$, so ist:

$$DB = s - {}^1/_2 s - \sqrt{{}^1/_4 s^2 - (r^2 - d^2)} = {}^1/_2 s - \sqrt{{}^1/_4 s^2 - (r^2 - d^2)}.$$



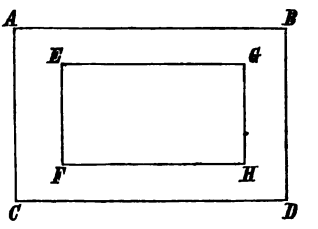
16. β) Liegt der Punkt D, durch welche die verlangte Sehne geht, außerhalb des Kreises, so ziehe man die Linie CD, verbinde A mit D, ziehe den Radius AB und halbire BC in F, ziehe AF, so ist dies wieder senkrecht auf BC. Es soll nun BD und DC gesucht werden, wenn $AD = d$, $AB = r$, $CB = s$ und $BD = x$,

Digitized by Google

so ist $BF = {}^1/_2 s$. Nach dem unter α) erwähnten Satze aus der Planimetrie hat man hier wieder:

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 + 2.BD \times FB \text{ oder:}$$
$$d^2 = r^2 + x^2 + 2x.{}^1/_2 s; \text{ hieraus erhält man:}$$
$$(x + {}^1/_2 s)^2 = {}^1/_4 s^2 + d^2 - r^2; \text{ folglich:}$$
$$x = \sqrt{{}^1/_4 s^2 + d^2 - r^2} - {}^1/_2 s = BD \text{ und daher:}$$
$$CD = CB + BD = \sqrt{{}^1/_4 s^2 + d^2 - r^2} + {}^1/_2 s.$$

17. ABCD sei ein ganzer Bogen und EFGH ein halber. In jenem sei die Länge $AB = x$ und die Breite $AC = y$, so ist $EF = {}^1/_2 AB = {}^1/_2 x$ und $FH = AC = y$. Da der halbe Bogen dem ganzen ähnlich ist, so erhält man:



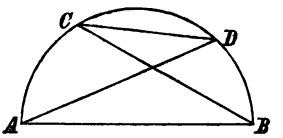
$${}^1/_2 x : y = y : x; \text{ daher:}$$
$${}^1/_2 x^2 = y^2; \text{ also } x = y\sqrt{2}.$$

Da nun $x = 1.x$ und $y\sqrt{2} = y.\sqrt{2}$, so hat man nach §. 225:

$$x : y = \sqrt{2} : 1;$$

d. h. die Länge steht zur Breite in dem Verhältnisse $\sqrt{2}:1$.

18. Man denke sich A mit C und D mit B durch gerade Linie verbunden. Es sei $AC = a$, $CD = b$, $BD = c$ und der zu suchende Durchmesser $AB = x$. Zieht man in dem Vierecke ABCD die beiden Diagonalen AD und BC, so ist, da ACB und ADB rechtwinklige Dreiecke sind:



$AD^2 = AB^2 - BD^2$ oder $AD^2 = x^2 - c^2$; folglich:

$AD = \sqrt{x^2 - c^2}$. Ferner ist:

$BC^2 = AB^2 - AC^2$ oder $BC^2 = x^2 - a^2$; folglich $BC = \sqrt{x^2 - a^2}$. Ferner ist nach dem geometrischen Satze, daß in jedem Kreisviereck das Rechteck unter den Diagonalen gleich der Summe der Rechtecke unter den entgegengesetzten Seiten ist:

$$BC \times AD = AB \times CD + AC \times BD \text{ oder:}$$
$$\sqrt{x^2 - a^2} \times \sqrt{x^2 - c^2} = b.x + a.c.$$

Erhebt man diese Gl. ins Quadrat, ordnet sie und dividirt sie durch x, so wird:

$$x^3 - (a^2 + b^2 + c^2)x - 2abc = 0.$$

Setzt man $a = 2$, $b = 3$ und $c = 4$, so wird:

$$x^3 - 29x - 48 = 0.$$

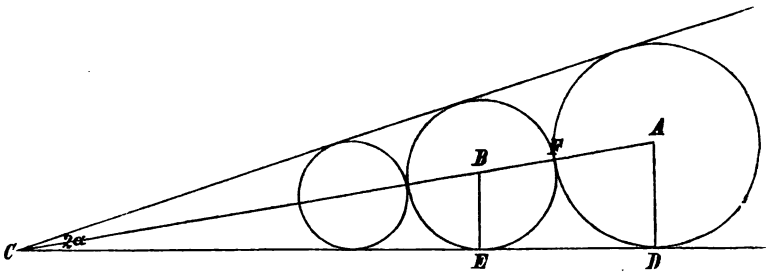
Digitized by Google

Hier ist $p=29$, $q=48$ und weil $4p^3>27q^2$, so ist nach §. 495 VI:

$$\sin 3\varepsilon=\frac{3q}{p\sqrt{{}^4/_3 p}} \text{ und } x=\sqrt{{}^4/_3 p}.\sin(60^0+\varepsilon).$$ Nun ist:

$$\begin{aligned}
\log 3q &= 2{,}1583625\\
\log p &= 1{,}4623980\\
\log\sqrt{{}^4/_3 p} &= 0{,}7936684\\
\hline
\log\sin 3\varepsilon &= 9{,}9022961-10\\
3\varepsilon &= 52^0 59' 27''\\
\varepsilon &= 17^0 39' 49''\\
60^0+\varepsilon &= 77^0 39' 49''\\
\log\sin(60^0+\varepsilon) &= 9{,}9898547-10\\
\log\sqrt{{}^4/_3 p} &= 0{,}7936684\\
\hline
\log x &= 0{,}7835231\\
x &= 6{,}07467
\end{aligned}$$

Figur zu 18. β)



18. β) Der Kreis um A berühre die Schenkel des gegebenen Winkels 2α und sei von allen der größte. Nun sei AC der Abstand des Mittelpunktes A von der Spitze des Winkels 2α. Verbindet man noch den Mittelpunkt A mit dem Berührungspunkte D, so entsteht das bei D rechtw. Dreieck ACD. Von diesem Dreieck sind außer dem rechten Winkel noch $AD=r$ und der spitze Winkel $ACD=\alpha$ bekannt. Gesucht wird AC. Nun ist:

$$\frac{AD}{CD}=\tang\alpha;\ \text{also } CD=\frac{AD}{\tang\alpha}=\frac{r}{\tang\alpha}$$

$$\frac{CD}{AC}=\sin ACD=\cos\alpha;\ \text{also } AC=\frac{CD}{\cos\alpha}.$$

Setzen wir hierin den Werth für CD ein, so wird:

$AC=\frac{r}{\cos\alpha\tang\alpha}$. Nun ist $\cos\alpha.\tang\alpha=\sin\alpha$; daher:

Digitized by Google

$AC = \frac{r}{\sin\alpha}$. Nun ist ferner $\frac{1}{\sin\alpha} = \operatorname{cosec}\alpha$; folglich:

$$AC = r\operatorname{cosec}\alpha.$$

Ferner ist $BC = AC - (AF + BF)$ oder, wenn wir die Werthe für AC, $AF = r$ und $BF = \varrho$ setzen, so erhalten wir:

$$BC = r(\operatorname{cosec}\alpha - 1) - \varrho.$$

Jetzt müssen wir den Werth für ϱ aus den gegebenen Stücken zu bestimmen suchen. Verbinden wir noch den Mittelpunkt B mit dem Berührungspunkte E, so entstehen die ähnlichen Dreiecke ACD und BCE; daher verhält sich:

$$AC : BC = AD : BE; \text{ also:}$$

$$BE = \frac{AD \times BC}{AC}; \text{ oder:}$$

$$\varrho = \frac{r(\operatorname{cosec}\alpha - 1) - \varrho}{\operatorname{cosec}\alpha}; \text{ hieraus folgt:}$$

$\varrho(\operatorname{cosec}\alpha + 1) = r(\operatorname{cosec}\alpha - 1)$ oder weil $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$,

$\varrho(1 + \sin\alpha) = r(1 - \sin\alpha)$; ins Quadrat erhoben gibt:

$$\varrho^2(1 + \sin\alpha)^2 = r^2(1 - \sin\alpha)^2; \text{ also:}$$

$$\varrho^2 = r^2\left(\frac{1 - \sin\alpha}{1 + \sin\alpha}\right)^2.$$

Nun ist der Inhalt des Kreises um $A = r^2\pi$ und der des Kreises um $B = \varrho^2\pi$. Die sämmtlichen Kreise bilden eine abnehmende geometrische Progression von unendlich vielen Gliedern, wovon das erste Glied $r^2\pi$, das zweite $\varrho^2\pi$; daher ist der Exponent der Progression nach §. 414. 22, also:

$$e = \varrho^2\pi : r^2\pi = \varrho^2 : r^2.$$

Setzen wir hierin den oben für ϱ^2 gefundenen Werth, so wird:

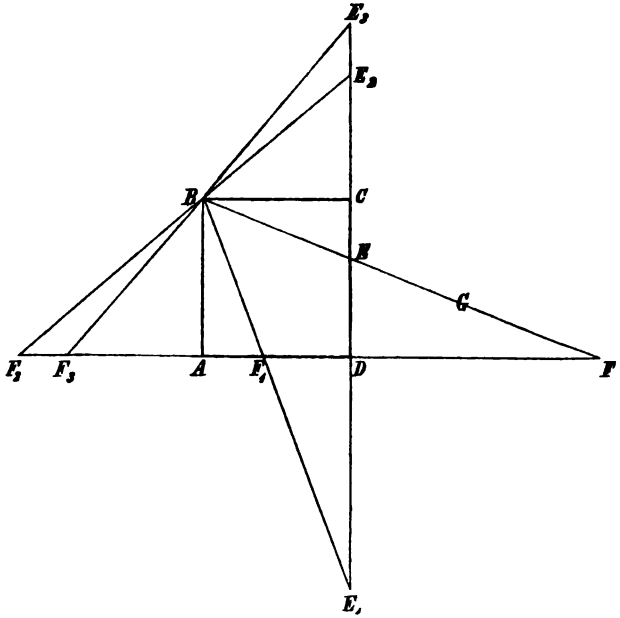
$$e = r^2\left(\frac{1 - \sin\alpha}{1 + \sin\alpha}\right)^2 : r^2 = \left(\frac{1 - \sin\alpha}{1 + \sin\alpha}\right)^2.$$

Wir haben also zur Berechnung der Summe sämmtlicher Kreise das erste Glied $a = r^2\pi$, den Exponenten $e = \left(\frac{1 - \sin\alpha}{1 + \sin\alpha}\right)^2$ und $n = \infty$; folglich ist nach §. 413:

$$s = \frac{a}{1 - e} = r^2\pi : \left\{1 - \left(\frac{1 - \sin\alpha}{1 + \sin\alpha}\right)^2\right\} = \frac{(1 + \sin\alpha^2)r^2\pi}{4\sin\alpha}.$$

Digitized by Google

Figur zu 19. α)



19. α) Die verlangte Linie soll etwa durch die Ecke B des Quadrates ABCD gelegt werden. Man verlängere AD und CD, dann kann, wie aus der Figur ersichtlich ist, die verlangte Linie vier verschiedene Lagen haben, nämlich FE, F_1E_1, F_2E_2, F_3E_3. Nun sei die Seite des gegebenen Quadrates ABCD = a, EF = b, AF = x. Die Aufgabe wird auf eine Gleichung vom vierten Grade führen, weil x vier Werthe hat, nämlich AF und AF_1, die positiv und immer reell sein werden und AF_2 und AF_3, die beide negativ sind, da sie in entgegengesetzter Richtung liegen; überdies werden diese auch noch imaginär, wenn $b < 2a\sqrt{2}$ angenommen ist. Bezeichnet man diese vier Werthe mit y, y_1, y_2, y_3, so folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ABF_3 und BCE_3, daß:

$$AF_3 : AB = BC : CE_3 \text{ oder da } CE_3 = AF_2$$
$$y_2 : a = a : y_3, \text{ woraus folgt:}$$
$$(1)\quad y_2 y_3 = a^2 \text{ oder } y_2 y_3 - a^2 = 0.$$

Ferner hat man aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ABF_1 und BCE_1, daß:

$$AF_1 : AB = BC : CE_1 \text{ oder da } CE_1 = AF$$

Digitized by Google

$y_1 : a = a : y$; hieraus folgt:

$$(2)\quad yy_1 - a^2 = 0.$$

Setzt man nun $y = az$, $y_1 = az_1$, $y_2 = az_2$ und $y_3 = az_3$, so gehen die beiden Gleichungen (1) und (2) über in die beiden andern:

$$(3)\quad az_2 . az_3 - a^2 = 0 \text{ oder } z_2 . z_3 - 1 = 0$$
$$(4)\quad az . az_1 - a^2 = 0 \text{ oder } z . z_1 - 1 = 0.$$

Aus diesen beiden letzten Gleichungen folgt, daß $z_2 = \frac{1}{z_3}$ und $z = \frac{1}{z_1}$. Hiernach muß die Endgleichung eine reciproke sein.

Gehen wir jetzt nach diesen vorläufigen Bemerkungen an die Lösung der Aufgabe selbst. Da das Dreieck ABF rechtwinklig ist, so ist:

$BF^2 = AB^2 + AF^2$ oder $BF^2 = a^2 + x^2$; also $BF = \sqrt{a^2 + x^2}$.

Nun folgt ferner aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ABF und DEF, daß: DF:EF = AF:BF oder durch Einsetzung der bezüglichen Werthe:

$(x - a) : b = x : \sqrt{a^2 + x^2}$, woraus man erhält:

$(x - a).\sqrt{a^2 + x^2} = bx$. Entwickelt man diese Gl. so erhält man:

$$x^4 - 2ax^3 + (2a^2 - b^2)x^2 - 2a^3x + a^4 = 0.$$

Setzt man hierin $x = az$, so wird:

$a^4z^4 - 2a^4z^3 + a^2(2a^2 - b^2)z^2 - 2a^4z + a^4 = 0$; oder:

$$z^4 - 2z^3 + \frac{2a^2 - b^2}{a^2}z^2 - 2z + 1 = 0.$$

Dividire diese Gl, durch z^2 und ordne sie, so wird:

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 2\left(z + \frac{1}{z}\right) - \frac{b^2}{a^2} = 0.$$

Setzt man $z + \frac{1}{z} = y$, so wird $\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 = y^2$;

hiernach haben wir:

$$y^2 - 2y - \frac{b^2}{a^2} = 0; \text{ folglich: } y = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2}}{a}.$$

Ist nun $a = 1$, $b = 10$, so ist $y = 1 \pm \sqrt{101} = 1 \pm 10{,}0498756$; daher: $y_1 = 11{,}0498756$, $y_2 = -9{,}0498756$.

Daher: $z + \frac{1}{z} = 11{,}0498756$; $(z - 5{,}5249378)^2 = 29{,}5249376938688$; also: $z = 5{,}5249378 \pm 5{,}4336853$; daher: $z_1 = 10{,}9586233$, $z_2 = 0{,}0912525$. Ferner ist:

Digitized by Google

$z+\frac{1}{z}=-9{,}0498756$; $(z+4{,}5249378)^2=19{,}47506209386884$;

also: $z=-4{,}5249378\pm4{,}4130558$; folglich: $z_3=-0{,}1118820$
und $z_4=-8{,}9379936$.

Da nun $x=az$ und $a=1$ ist, so hat x dieselben Werthe wie z.

Es sei nun ferner $EF=b$, $AF=x$. Ist nun G der Mittelpunkt von EF, so ist $BG=y$ die zu berechnende Linie. Für x hat man folgende Proportion:

$$(x-a):b=x:\sqrt{a^2+x^2}.$$

Nun ist aber $x^2=BF^2-AB^2=(y+{}^1/_2b)^2-a^2$. Setzen wir diesen Werth in die vorige Gl., so wird aus derselben:

$\{\sqrt{(y+{}^1/_2b)^2-a^2}-a\}:b=\sqrt{(y+{}^1/_2b)^2-a^2}:(y+{}^1/_2b)$ oder, wenn wir die mittleren Glieder vertauschen:

$$\{\sqrt{(y+{}^1/_2b)^2-a^2}-a\}:\sqrt{(y+{}^1/_2b)^2-a^2}=b:(y+{}^1/_2b).$$

Wenden wir auf diese Proportion den Satz in §. 227 (2) an, so haben wir:

$$(-a):\sqrt{(y+{}^1/_2b)^2-a^2}=({}^1/_2b-y):(y+{}^1/_2b) \text{ oder:}$$
$$a:\sqrt{(y+{}^1/_2b)^2-a^2}=(y-{}^1/_2b):(y+{}^1/_2b).$$

Entwickeln wir diese Proportion, so erhalten wir:

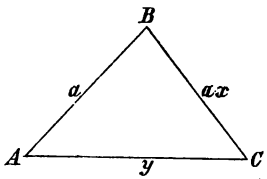
$$a^2(y+{}^1/_2b)^2=(y-{}^1/_2b)^2\times\{y+{}^1/_2b^2)^2-a^2\} \text{ oder:}$$
$$y^4-(2a^2+{}^1/_2b^2)y^2+{}^1/_{16}b^4-{}^1/_2a^2b^2=0; \text{ hieraus folgt:}$$
$$\{y^2-(a^2+{}^1/_4b^2)\}^2=a^2(a^2+b^2); \text{ daher:}$$
$$y^2=a^2+{}^1/_4b^2\pm a\sqrt{a^2+b^2}; \text{ mithin:}$$
$$y=\pm\sqrt{a^2+{}^1/_4b^2\pm a\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Ist statt eines Quadrates ein Rechteck ABCD gegeben, so daß $AB=a$ und $AD=c$, so ist $BF=\sqrt{c^2+x^2}$ und wir erhalten:

$$(x-a):b=x:\sqrt{c^2+x^2}.$$

Hieraus erhalten wir die Gleichung des vierten Grades:

$$x^4-2ax^3+(a^2-b^2+c^2)x^2-2ac^2x+a^2c^2=0.$$



19. β) Der Winkel B sei der gegebene. Da das Verhältniß von AB und BC wie 1:x ist, so kann AB mit a und BC mit ax bezeichnet werden, wo a eine Größe ist, die später aus der Formel wegfallen muß. Die dritte Seite AC sei $=y$, dann ist:

$$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\times BC.\cos B \text{ oder:}$$
$$y^2=a^2+a^2x^2-2a^2x\cos B$$
$$=a^2(1+x^2-2cx), \text{ wenn } c=\cos B \text{ ist.}$$

Digitized by Google

Die Aufgabe verlangt nun, daß $AB^3+BC^3 = y^3 = y^2.y$ ist. Dies gibt also:

$$a^3+a^3x^3 = a^2(1+x^2-2cx).a\sqrt{1+x^2-2cx};$$

durch a^3 dividirt, gibt:

$$1+x^3 = (1+x^2-2cx)\sqrt{1+x^2-2cx}.$$

Erhebe diese Gl. ins Quadrat, so wird:

$$(1+x^3)^2 = (1+x^2-2cx)^2.(1+x^2-2cx).$$

Hieraus ergibt sich:

$$-6cx+(12c^2+3)x^2-(8c^3+12c+2)x^3+(12c^2+3)x^4-6cx^5=0.$$

Dividirt man diese Gl. durch $6cx$, so erhält man:

$$1-\frac{4c^2+1}{2c}x+\frac{4c^3+6c+1}{3c}x^2-\frac{4c^2+1}{2c}x^3+x^4=0,$$

welches die verlangte reciproke Gleichung ist.

20. Heißen Länge, Breite und Höhe des Parallelepipeds x_1, x_2, x_3, so liefern die Bedingungen der Aufgabe folgende drei Gleichungen:

$$(1)\ x_1+x_2+x_3 = 29$$
$$(2)\ x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3 = 271$$
$$(3)\ x_1x_2x_3 = 819.$$

Aus diesen 3 Gl. könnte man jede Unbekannte durch Elimination bestimmen. Kürzer ist jedoch folgender Weg. Jede cubische Gl. hat 3 Wurzeln und man kann sich daher eine cubische Gleichung:

$$x^3+ax^2+bx+c = 0$$

denken, welche die 3 Unbekannten x_1, x_2, x_3 zu Wurzeln hat. Diese cubische Gl. kann man nach §. 479. (1) leicht bilden, sie ist nämlich:

$$x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x-x_1x_2x_3 = 0.$$

Die Coefficienten dieser Gl. sind aber durch die Gleichungen (1), (2), (3) gegeben, sie wird demnach sein:

$$x^3-29x^2+271x-819 = 0.$$

Die 3 Wurzeln dieser Gl. stellen also die Länge, Breite und Höhe des Parallelepipeds vor. Welche Wurzel man als Länge oder als Breite u. s. w. betrachtet, ist natürlich gleichgültig, da beim rechtwinkligen Parallelepipedon Länge, Breite und Höhe verwechselt werden können.

Zur Fortschaffung des zweiten Gliedes setze man:

$$x = {}^1/_3(y+29);$$

für diesen Fall erhalten wir:

$$y^3-84y-160 = 0.$$

Man löse diese Gl. nach den trigonometrischen Formeln im §. 495. VI, weil $4p^3>27q^2$ ist. Zur Auflösung hat man also den Winkel 3ε aus der Gleichung:

Digitized by Google

$$\sin 3\varepsilon = \frac{3q}{p\sqrt{^4/_3 p}}$$

zu berechnen, wenn $p = 84$ und $q = 160$ ist; und man erhält dann die drei Wurzeln unserer Gleichung, nämlich:

$$y_1 = -\sqrt{^4/_3 p}\sin\varepsilon;\quad y_2 = -\sqrt{^4/_3 p}\sin(60^0+\varepsilon);$$
$$y_3 = +\sqrt{^4/_3 p}.\sin(60^0-\varepsilon).$$

Nun ist:

$$\log 3q = 2{,}2041200$$
$$\log p = 1{,}4471580$$
$$\log\sqrt{^4/_3 p} = 1{,}0246090$$
$$\log\sin 3\varepsilon = 9{,}7323530 - 10$$
$$3\varepsilon = 32^0 40' 48{,}68''$$
$$\varepsilon = 10^0 53' 36{,}22''$$
$$60^0+\varepsilon = 70^0 53' 36{,}22''$$
$$60^0-\varepsilon = 49^0 6' 23{,}78''$$
$$\log\sin\varepsilon = 9{,}2764209 - 10$$
$$\log\sqrt{^4/_3 p} = 1{,}0246090$$
$$\log(-y) = 0{,}3010299$$
$$y_1 = -2$$
$$\log\sin(60^0-\varepsilon) = 9{,}8784810 - 10$$
$$\log\sqrt{^4/_3 p} = 1{,}0246090$$
$$\log(-y_2) = 0{,}9030900$$
$$y_2 = -8$$
$$\log\sin(60^0+\varepsilon) = 9{,}9753910 - 10$$
$$\log\sqrt{^4/_3 p} = 1{,}0246090$$
$$\log y_3 = 1{,}0000000$$
$$y_3 = 10$$

Daher $x_1 = {}^1/_3(29-2) = 9$, $x_2 = {}^1/_3(29-8) = 7$;
$x_3 = {}^1/_3(29+10) = 13$.

Also sind Länge, Breite und Höhe 9,7 und 13.

21. Heißen die 3 Dimensionen des Parallelepipeds wieder x_1, x_2, x_3, so liefert die Aufgabe:

$$(1)\ x_1x_2x_3 = p;\quad (2)\ 2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3 = b$$
$$(3)\ x_1^2+x_2^2+x_3^2 = c^2.$$

Addirt man die Gl. (2) und (3), so hat man:
$x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3 = c^2+b$ oder:
$(x_1+x_2+x_3)^2 = c^2+b$; daher:

$$(4)\ x_1+x_2+x_3 = \sqrt{c^2+b}.$$

Nach den bei der vorigen Aufgabe angestellten Betrachtungen erhalten wir aus den vorstehenden Gl. wieder eine cubische Gl., welche die Unbekannten x_1, x_2, x_3 zu Wurzeln hat und dieselbe heißt:

Digitized by Google

$x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x-x_1x_2x_3=0.$

Setzt man nun die durch die Gl. (1), (2) und (4) gegebenen Coefficienten dieser Gl. ein, so wird dieselbe:

$$x^3-x^2\sqrt{c^2+b}+{}^1/_2bx-p=0.$$

Setzt man $p=144$, $b=192$, $c=13$, also $\sqrt{c^2+b}=\sqrt{361}=19$, so erhalten wir:

$$x^3-19x^2+96x-144=0.$$

Wenn die Gl. durch ganze Zahlen befriedigt werden kann, so müssen diese unter den Faktoren der Zahl 144, ihres letzten oder absoluten Gliedes enthalten sein. Nun sind aber sämmtliche Faktoren von 144 folgende:

$1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 3, 3^2; 2.3, 2^2.3, 2^3.3, 2^4.3, 2.3^2, 2^2.3^2, 2^3.3^2, 2^4.3^2.$

Die ganzen Zahlen, welche unsre Gleichung zu Wurzeln hat, müssen unter diesen enthalten sein. Eigentlich müßte jede dieser Zahlen mit dem doppelten Zeichen ± genommen werden; in unsrer Aufgabe sind indeß negative Zahlen nicht zuläßig. Setzt man diese Faktoren an die Stelle von x, so findet man, daß durch Substitution 2^2, 3, $2^2.3$ oder 4, 3, 12 die erhaltene Gl. annullirt wird, und somit sind die Wurzeln der Gl. 3, 4, 12. Vgl. §. 507.

22. Der Durchmesser der Grundfläche des Cylinders sei x, so ist der Halbmesser ${}^1/_2x$ und die Höhe $x+2{}^1/_2$ Centimeter, folglich Inhalt der Grundfläche ${}^1/_4x^2\pi$; daher Inhalt des Cylinders $={}^1/_4x^2\pi.(x+2{}^1/_2)$. Demnach ist:

${}^1/_4x^2\pi(x+2{}^1/_2)=240{,}33183$; hieraus erhält man:

$$x^3+2{}^1/_2x^2-306=0.$$

Die Theiler des absoluten Gliedes sind, 3, 6, 9, 17, 18 u. s. w. Durch Substitution von 6 für x wird die Gl. in Null verwandelt. Mithin ist der Durchmesser $=6$, also die Höhe $=6+2{}^1/_2=8{}^1/_2$ Centimeter.

Zweite Aufl. Heißt der Durchmesser der Grundfläche des Cylinders d, die Höhe desselben h, so ist sein Inhalt ${}^1/_4d^2h\pi$. Nun ist aber $d=h-2{}^1/_2$, also liefert die Aufgabe folgende Gl.:

$${}^1/_4h\pi(h-2{}^1/_2)^2=240{,}33183;\ \text{oder:}$$

$$h^3-5h^2+({}^5/_2)^2h=\frac{961{,}32732}{\pi}.$$

Setzt man hierin $h=x+{}^5/_3$, so erhält man:

$$x^3-2{,}0833333x-304{,}842592=0.$$

Diese Gleichung hat die Form $x^3-px-q=0$; da aber $4p^3<27q^2$, so muß dieselbe nach §. 495. IV aufgelöst

Digitized by Google

werden. Zu dem Zwecke müssen zwei Hülfswinkel nach folgenden Formeln berechnet werden:

$$\sin\gamma = \frac{p}{3q}\sqrt{{}^4/_3 p},\quad \tang\delta = \sqrt[3]{\tang {}^1/_2\gamma}$$

dann hat man die eine reelle Wurzel der Gl.:

$$x = \frac{1}{\sin 2\delta}\sqrt{{}^4/_3 p}.$$

Nun ist: $p = 2{,}0833333$, ${}^4/_3 p = 2{,}7777777$

$q = 304{,}842592$; $3q = 914{,}527776$.

$\log p = 0{,}3187587$

$\log\sqrt{{}^4/_3 p} = 0{,}2218487$

$\log 3q = 2{,}9611970$

$\log\sin\gamma = 7{,}5794104 - 10$

$\gamma = 0^0 13' 3{,}15''$

${}^1/_2\gamma = 0^0 6' 31{,}57''$

$\log\tang {}^1/_2\gamma = 27{,}2783662 - 30$

$\log\sqrt[3]{\tang {}^1/_2\gamma} = 9{,}0927887 - 10$

$\log\tang\delta = 9{,}0927887 - 10$

$\delta = 7^0 3' 30{,}26''$

$2\delta = 14^0 7' 0{,}52''$

$\log\sin 2\delta = 9{,}3872110 - 10$

$\log\frac{1}{\sin 2\delta} = 0{,}6127890$

$\log\sqrt{{}^4/_3 p} = 0{,}2218487$

$\log x = 0{,}8346377$; also $x = 6{,}8333$.

Daher ist: $h = 6{,}8333 + 1{,}6667 = 8{,}5$ Centimeter.

23. Die Mantelfläche eines graden Cylinders ist einem Rechtecke gleich, das zur Höhe die Höhe des Cylinders und zur Grundlinie die Peripherie der Grundfläche des Cylinders hat. Ist nun x der Radius der Grundfläche, h die Höhe, so ist der Inhalt $x^2 h\pi$; die Mantelfläche $2xh\pi$; die beiden Grundflächen zusammen $= 2x^2\pi$, also die ganze Oberfläche des Cylinders $= 2xh\pi + 2x^2\pi$. Die Aufgabe liefert demnach folgende beide Gl.:

(1) $x^2 h\pi = 120$; (2) $2xh\pi + 2x^2\pi = 200$.

Demnach haben wir durch Elimination von h für x folgende Gleichung:

$$x^3 - \frac{100}{\pi}x + \frac{120}{\pi} = 0.$$

Digitized by Google

Diese Gleichung hat die Form $x^3 - px + q = 0$ und ist nach §. 495. V zu lösen, denn $4\left(\frac{100}{\pi}\right)^3 > 27\left(\frac{120}{\pi}\right)^2$. Zur Auflösung dienen die Formeln:

$$\sin 3\varepsilon = \frac{3q}{p}\cdot\frac{1}{\sqrt{{}^4/_3 p}};\quad x_1 = \sqrt{{}^4/_3 p}.\sin\varepsilon;\quad x_2 = \sqrt{{}^4/_3 p}.\sin(60^0 - \varepsilon).$$

$$x_3 = -\sqrt{{}^4/_3 p}.\sin(60^0 + \varepsilon).$$

Der letzte Wurzelwerth, als negativ, kann der Aufgabe nicht genügen, es bleiben also nur die beiden ersten zu berechnen.

Es ist: $p = \frac{100}{\pi}$, ${}^4/_3 p = \frac{400}{3\pi}$, $q = \frac{120}{\pi}$, $3q = \frac{360}{\pi}$

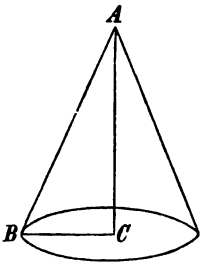
$$\log 360 = 2{,}5563025$$
$$\log \pi = 0{,}4971499$$
$$\log 3q = 2{,}0591526$$
$$\log p = 1{,}5028501$$
$$\log(3q : p) = 0{,}5563025 \quad (1)$$
$$\log 400 = 2{,}6020600$$
$$\log 3\pi = 0{,}9742712$$
$$\log {}^4/_3 p = 1{,}6277888$$
$$\log \sqrt{{}^4/_3 p} = 0{,}8138944$$
$$\log \frac{1}{\sqrt{{}^4/_3 p}} = 0{,}1861056 - 1 \quad (2)$$
$$(1) + (2) = \log\sin 3\varepsilon = 9{,}7424081 - 10$$
$$3\varepsilon = 33^0 32' 43{,}17''$$
$$\varepsilon = 11^0 10' 54{,}39''$$
$$60^0 - \varepsilon = 48^0 49' 5{,}61''$$
$$\log\sin\varepsilon = 9{,}2876277 - 10$$
$$\log \sqrt{{}^4/_3 p} = 0{,}8138944$$
$$\log x_1 = 0{,}1015221;\ \text{also}\ x_1 = 1{,}263345$$
$$\log\sin(60^0 - \varepsilon) = 9{,}8765783 - 10$$
$$\log \sqrt{{}^4/_3 p} = 0{,}8138944$$
$$\log x_2 = 0{,}6904727;\ \text{also}\ x_2 = 4{,}903121.$$

Da $x^2 h\pi = 120$ sein muß, so ergeben sich hieraus die diesen Werthen von x entsprechenden Werthe von h. Es ist nämlich:

$$h = \frac{120}{x^2\pi};\ \text{daher:}$$

Digitized by Google

$\log h_1 = \log 120 - (2\log x + \log \pi)$
$= 2{,}0791812 - (0{,}2030442 + 0{,}4971499)$
$= 1{,}378987$; folglich $h_1 = 23{,}93245$.
Ferner ist $\log h_2 = 2{,}0791812 - (1{,}3809454 + 0{,}4971499)$
$= 0{,}2010859$; folglich $h_2 = 1{,}588861$.



24. Der Radius der Grundfläche des Kegels, also BC sei x, so ist der Inhalt der Grundfläche $= x^2\pi$. Ist nun die Höhe desselben $= h$, so ist, da der Kegel gleich ist dem dritten Theile eines Cylinders, der mit ihm gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat, der Inhalt des Kegels $= \frac{1}{3}x^2h\pi$, und weil derselbe a beträgt, so ist:

(1) $\frac{1}{3}x^2h\pi = a$.

Zur Bestimmung der Manteloberfläche des Kegels müssen wir zunächst die Seitenlinie AB berechnen. Ziehen wir die Höhe $AC = h$ und auch den Radius $BC = x$, so erhalten wir das rechtw. Dreieck ABC, worin:

$AB^2 = AC^2 + BC^2$ oder $AB^2 = h^2 + x^2$; also $AB = \sqrt{h^2+x^2}$.
Nun ist der Mantel eines geraden Kegels einem Dreieck gleich, welches die Seitenlinie zur Höhe und den Umfang der Grundfläche zur Grundlinie hat. Hiernach ist, da der Umfang der Grundfläche $= 2x\pi$ und die Höhe $= \sqrt{h^2+x^2}$, der Inhalt der Mantelfläche $= x\pi\sqrt{h^2+x^2}$. Da nun die Oberfläche der Grundfläche $x^2\pi$ beträgt, so ist die ganze Kegeloberfläche $= x\pi.\sqrt{h^2+x^2} + x^2\pi$. Es ist also:

(2) $x\pi.\sqrt{h^2+x^2} + x^2\pi = b$ oder:

$x^2\pi - b = -x\pi\sqrt{h^2+x^2}$. Hieraus folgt:

(3) $h^2x^2\pi^2 = b^2 - 2x^2b\pi$.

Setzt man aus (1) den Werth für x^2 in (3), so erhalten wir:

$3a\pi h^2 - b^2h = -6ab$ oder $h^2 - \frac{b^2}{3a\pi}h = -\frac{2b}{\pi}$; hieraus folgt:

$$h = \frac{b^2}{6a\pi} \pm \sqrt{\left(\frac{b^2}{6a\pi}\right)^2 - \frac{2b}{\pi}} = \text{Höhe des Kegels.}$$

Nach (1) ist $x^2 = \frac{3a}{\pi h}$, also nach Einsetzung des Werthes für h ist:

Digitized by Google

$$x^2 = \frac{3a}{\pi} \cdot \frac{1}{\frac{b^2}{6a\pi} \pm \sqrt{\left(\frac{b^2}{6a\pi}\right)^2 - \frac{2b}{\pi}}} = \frac{3a}{\pi} \cdot \frac{\frac{b^2}{6a\pi} \mp \sqrt{\left(\frac{b^2}{6a\pi}\right)^2 - \frac{2b}{\pi}}}{\left(\frac{b^2}{6a\pi}\right)^2 - \left\{\left(\frac{b^2}{6a\pi}\right)^2 - \frac{2b}{\pi}\right\}}$$

$$= \frac{3a}{2b}\left\{\frac{b^2}{6a\pi} \mp \sqrt{\left(\frac{b^2}{6a\pi}\right)^2 - \frac{2b}{\pi}}\right\}; \text{ daher:}$$

$$x = \sqrt{\frac{3a}{2b}\left\{\frac{b^2}{6a\pi} \mp \sqrt{\left(\frac{b^2}{6a\pi}\right)^2 - \frac{2b}{\pi}}\right\}} = \text{Radius der Grundfläche.}$$

25. Ist wieder x der Radius der Grundfläche, h die Höhe des Kegels, so ist dessen Inhalt $= {}^1/_3 x^2 h\pi$. Die Mantelfläche ist, wie in der vorigen Aufgabe $= x\pi.\sqrt{x^2+h^2}$. Die Aufgabe liefert hiernach die beiden Gleichungen:

(1) $x^2 h\pi = 3.7^1/_2$ und (2) $x\pi\sqrt{x^2+h^2} = 25$.

Erheben wir die Gl. (2) ins Quadrat, setzen dann aus Gl. (1) den Werth für h in diese ein, so erhalten wir:

$$x^6 - \left(\frac{25}{\pi}\right)^2 x^2 + \left(\frac{22{,}5}{\pi}\right) = 0.$$

Setzen wir $x^2 = y$, so erhalten wir die Gl.:

$$y^3 - \left(\frac{25}{\pi}\right)^2 y + \left(\frac{22{,}5}{\pi}\right)^2 = 0.$$

Diese Gl. ist nach §. 495 V. aufzulösen; denn es ist:

$$4.\left(\left(\frac{25}{\pi}\right)^2\right)^3 > 27\left(\left(\frac{22{,}5}{\pi}\right)^2\right)^2.$$

Die Formeln zur Auflösung sind:

$$\sin 3\varepsilon = \frac{3q}{p} \cdot \frac{1}{\sqrt{{}^4/_3 p}}; \quad y_1 = \sqrt{{}^4/_3 p}.\sin\varepsilon; \quad y_2 = \sqrt{{}^4/_3 p}.\sin(60^0 - \varepsilon);$$

$$y_3 = -\sqrt{{}^4/_3 p}.\sin(60^0 + \varepsilon).$$

Der letzte Werth liefert für y einen negativen Werth, also für $x = \sqrt{y}$ etwas Imaginäres und ist daher nicht zu brauchen. Es bleiben also die beiden ersten.

Nun ist: $p = \left(\frac{25}{\pi}\right)^2$, $q = \left(\frac{22{,}5}{\pi}\right)^2$

$$\log 3q = 2{,}1871865$$
$$\log p = 1{,}8015802$$
$$\log(3q:p) = 0{,}3856063 \quad (1)$$
$$\log {}^4/_3 p = 1{,}9265189$$

Digitized by Google

$$\log\sqrt[4]{3p} = 0{,}9632594$$
$$\log\frac{1}{\sqrt[4]{3p}} = 0{,}0367406 - 1 \quad (2)$$
$$(1)+(2) = \log\sin 3\varepsilon = 9{,}4223469 - 10$$
$$3\varepsilon = 15°20'3{,}82''$$
$$\varepsilon = 5°6'41{,}27''$$
$$60° - \varepsilon = 54°53'18{,}73''$$
$$\log\sin\varepsilon = 8{,}9498464 - 10$$
$$\log\sqrt[4]{3p} = 0{,}9632594$$
$$\log y_1 = 0{,}9131058 - 1.$$

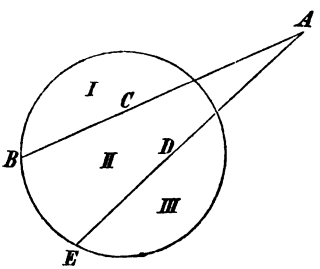
Es ist nun $x^2 = y$; also $x_1 = \sqrt{y_1}$ oder $\log x_1 = \frac{1}{2}\log y_1$; folglich: $\log x_1 = 0{,}9565529 - 1$; daher: $x_1 = 0{,}9048006$

$$\log\sin(60° - \varepsilon) = 9{,}9127717 - 10$$
$$\log\sqrt[4]{3p} = 0{,}9632594$$
$$\log y_2 = 0{,}8760311; \text{ daher:}$$
$$\log x_2 = 0{,}4380155; \text{ folglich:}$$
$$x_2 = 2{,}741672.$$

Der Radius der Grundfläche ist hiernach entweder 0,9048006 oder 2,741672. Die entsprechenden Werthe von h ergeben sich aus $h = \frac{22{,}5}{x^2\pi}$. Es ist:

$$\log 22{,}5 = 1{,}3521825$$
$$\log x^2 = 0{,}9131058 - 1$$
$$\text{also } \log\left(\frac{22{,}5}{x^2}\right) = 1{,}4390767$$
$$\log\pi = 0{,}4971499$$
$$\text{also } \log h_1 = 0{,}9419268$$
$$h_1 = 8{,}748363.$$

Ebenso findet man: $h_2 = 0{,}952755$.

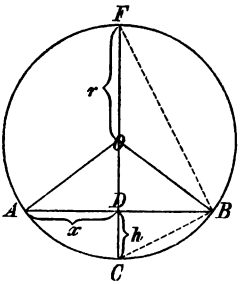


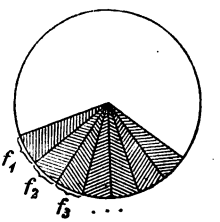
26 α) Die Kugel werde vom Punkte A aus in drei Theile getheilt. Es ist also das Kugelsegment I gleich dem Kugelsegment III, gleich dem Volumen II. Wir müssen nun die beiden Kugelsegmente durch den Kugelradius 1 und den Radius der begränzenden Kreisebenen BC und EC = x, ausdrücken. Ehe wir aber in der Auflösung weiter gehen,

Digitized by Google

müssen wir zuvor das Volumen des Kugelabschnittes berechnen. Derselbe ist die Differenz zwischen einem Kugelausschnitt und einem geraden Kegel. Den Kugelausschnitt können wir uns zusammengesetzt denken aus unendlich vielen und unendlich kleinen Pyramiden, die mit der Spitze im Mittelpunkte der Kugel zusammenstoßen und deren Grundflächen die Elemente der den Kugelausschnitt begrenzenden Kugelzone sind. Das Volumen des Kugelausschnittes ist die Grenze, welcher sich die Summe der Kegel desto mehr nähert, je größer ihre Anzahl ist. Ist also die Anzahl der Kegel unendlich groß, so ist die Höhe eines jeden dem Kugelradius, den wir mit r bezeichnen wollen, gleich zu setzen; sind ferner die Grundflächen der einzelnen Kegel

$= {}^1/_3 r f_1 + {}^1/_3 r f_2 + {}^1/_3 r f_3 + \ldots = {}^1/_3 r(f_1 + f_2 + f_3 + \ldots)$.





Die Summe $f_1 + f_2 + f_3 + \ldots$ macht aber die den Kugelausschnitt begrenzende Kugelzone aus. Diese Kugelzone ist $= 2r\pi h$, wenn h die Höhe der Kugelzone ist. Also ist der Kugelausschnitt $= {}^2/_3 r^2 h\pi$. Die Formel für die Kugelzone findet man, wie man die Oberfläche der ganzen Kugel findet, indem man sich dieselbe entstanden denkt durch Rotation eines Bogens um eine Achse und in diesem Bogen sich einen Theil eines regulären Polygons von unendlicher Seitenanzahl beschrieben denkt, welches Polygon dann eine Summe von abgekürzten Kegelflächen bei der Rotation beschreibt. Der Kegel AOB ist $= {}^1/_3 x^2\pi . DO = {}^1/_3 x^2\pi(r - h)$. Ziehen wir den Kegel vom Kugelausschnitt AOBC ab, so bleibt das Segment:

$$ADBC = {}^2/_3 r^2 h\pi - {}^1/_3 x^2 r\pi + {}^1/_3 x^2 h\pi = {}^1/_3\pi(2r^2 h - x^2 r + x^2 h).$$

Die Größe h braucht in dieser Formel nicht gegeben zu sein, dieselbe wird durch x und r bestimmt. In dem bei B rechtw. Dreieck FCB ist $DF = 2r - h$ und $DC = h$ und weil in jedem rechtw. Dreieck das Quadrat über der aus

Digitized by Google

der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse gefällten Senkrechten gleich dem Rechtecke aus den Projectionen der beiden Katheten ist, so ist:

$x^2 = h(2r-h)$ oder $h^2 - 2rh = -x^2$; mithin $h = r \pm \sqrt{r^2 - x^2}$.

In unsrer Aufgabe ist natürlich der Kugelabschnitt kleiner, als die Halbkugel, also $h < r$, demnach das untere Zeichen zu nehmen. Setzen wir diesen Werth in den obigen Ausdruck des Kugelabschnittes, so nimmt derselbe die Form

$$\tfrac{1}{3}\pi\{2r^3 - (x^2+2r^2)\sqrt{r^2 - x^2}\}$$

an, deren Richtigkeit wir in Vorstehendem nachgewiesen haben.

Da nun für den Kugelradius r und den Radius der begrenzenden Kreisebene x, das Volumen des entsprechenden Kugelabschnittes $= \tfrac{1}{3}\pi\{2r^3 - (x^2+2r^2)\sqrt{r^2-x^2}\}$, so ist für $r = 1$ gesetzt,

$$\text{Volumen I} = \text{Volumen III} = \tfrac{1}{3}\pi\{2 - (x^2+2)\sqrt{1-x^2}\}$$

Es ist nun Volumen I + Volumen III = 2 . Volumen II = 2mal { Volumen der Kugel − (I + III)} oder

$$\tfrac{2}{3}\pi\{2 - (x^2+2)\sqrt{1-x^2}\} = 2\{\tfrac{4}{3}\pi - \tfrac{2}{3}\pi[2 - (x^2+2\sqrt{1-x^2}]\}$$

Dividirt man diese Gl. durch $\tfrac{2}{3}\pi$, entwickelt und ordnet sie, so erhält man:

$$x^6 + 3x^4 - 3^2/_9 = 0.$$

Wir setzen nun statt x^2 die neue Unbekannte y und erhalten:

$$y^3 + 3y^2 - 3^2/_9 = 0.$$

Setzt man hierin $y = z - 1$, um das zweite Glied fortzuschaffen, so wird:

$$z^3 - 3z - 1^4/_9 = 0.$$

Die Form dieser Gleichung ist $z^3 - pz - q$ und da $4.3^3 > 27.(1^4/_9)^2$, so sind die Formeln nach §. 495 VI in Anwendung zu bringen. Da $x = \sqrt{y}$, so muß y positiv sein, und folglich, weil $y = z - 1$, so muß auch z positiv sein. Also ist von den 3 Wurzeln, welche § 495 VI liefert, nur die letzte anwendbar. Demnach ist:

$$\sin 3\varepsilon = \frac{3q}{p} \cdot \frac{1}{\sqrt{\tfrac{4}{3}p}}, \quad z = \sqrt{\tfrac{4}{3}p} \,.\, \sin(60^0 + \varepsilon).$$

Nun ist: $p = 3$, $q = 1^4/_9$; $\tfrac{4}{3}p = 4$; $\sqrt{\tfrac{4}{3}p} = 2$;

$$\frac{1}{\sqrt{\tfrac{4}{3}p}} = \tfrac{1}{2}; \quad \frac{3q}{p} = 1^4/_9; \quad \sin 3\varepsilon = 1^4/_{18};$$

$$\log \sin 3\varepsilon = 9{,}8908555 - 10$$

$$3\varepsilon = 51^0 3' 27{,}2''$$

$$\varepsilon = 17^0 1' 9{,}1''$$

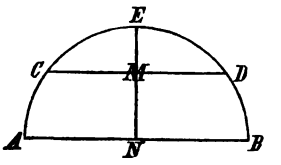
$$60^0 + \varepsilon = 77^0 1' 9{,}1''$$

Digitized by Google

$$\log \sin(60^0+\varepsilon) = 9{,}9887575 - 10$$
$$\log\sqrt[4]{3p} = 0{,}3010300$$
$$\log z = 0{,}2897875;\ \text{daher } z = 1{,}9488904;$$
$$\text{also } x^2 = y = 0{,}9488904$$
$$\log(x^2) = \bar{1}{,}9772161$$
$$\log x = \bar{1}{,}9886080;\ \text{also } x = 0{,}97411$$

Es ist folglich der Radius der die äußeren Kugelsegmente begrenzenden Kreisebene = 0,97411.

26. *β*) In dieser Figur sei AN der Radius der Halbkugel, also r=1, EM=h die Höhe des Kugelabschnittes, MD=x der Radius der Grundfläche des Kugelabschnittes; gesucht wird MN. Da nun EN =1, so wird MN=1—ME= 1—h.



Wir wollen nun zunächst die Höhe h des abgeschnittenen Kugelabschnittes bestimmen. Zu dem Zwecke müssen wir ausdrücken, daß das Volumen des Kugelabschnittes CEDM = der Hälfte der Halbkugel = $^1/_3r^3\pi$ oder da r=1, gleich $^1/_3\pi$ sein muß. Nun ist das Volumen des Kugelabschnittes nach der vorhergehenden Aufgabe

$$= {}^1/_3\pi(2r^2h - x^2r + x^2h).$$

Aus diesem Ausdruck muß x, welches die in der Figur angegebene Bedeutung hat, weil es nicht gegeben ist, weggeschafft werden. Nun ist aber ebenfalls nach der vorigen Aufgabe $x^2 = h(2r-h) = 2rh - h^2$. Setzen wir diesen Werth in die vorige Formel, so ist der Inhalt des Kugelabschnittes $= {}^1/_3\pi h^2(3r-h)$. Setzen wir nun 1 statt r, so wird nach dem Obigen die Gleichung, welche die Aufgabe löst, sein:

$$^1/_3\pi h^2(3-h) = {}^1/_3\pi \text{ oder } h^3 - 3h^2 + 1 = 0.$$

Setzt man zur Wegschaffung des zweiten Gliedes h = y+1, so wird:

$$y^3 - 3y - 1 = 0.$$

Diese Gleichung hat die Form $y^3 - py - q = 0$ und ist, weil $4.3^3 > 27.1^2$ wieder nach § 495 VI zu lösen. Da $h < r < 1$ ist, so muß, wie aus der Gleichung h = y+1 hervorgeht, y negativ sein und zwar seinem absoluten Werthe nach < 1. Hiedurch ist zunächst der dritte Werth für y unzulässig, weil er positiv ist und es bleibt zur Auflösung der Gl.

$$\sin 3\varepsilon = \frac{3q}{p}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{3p}};\quad y_1 = -\sqrt[4]{3p}.\ \sin\varepsilon;\quad y_2 = -\sqrt[4]{3p}.\sin(60^0-\varepsilon)$$

Digitized by Google

Es wird sich hernach ergeben, daß auch der zweite Werth für y unbrauchbar ist, weil er absolut größer als 1 ist. Nun ist:

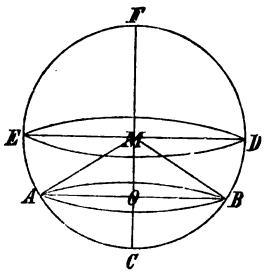
$$p=3,\ q=1,\ {}^4/_{27}p=4,\ \sqrt{{}^4/_{27}p}=2;\ \frac{1}{\sqrt{{}^4/_{27}p}}={}^1/_2;\ \frac{3q}{p}=1;\ \text{also}$$

$$\sin 3\varepsilon={}^1/_2,\ 3\varepsilon=30^0.$$

Hienach ist $y_1=-2\sin 10^0$; $y_2=-2\sin 50^0$. Es ist nun

$$\log\sin 10^0=9{,}2396702-10$$
$$\log 2=0{,}3010300$$
$$\log(-y_1)=\bar{1}{,}5407002;$$
$$\text{also } y_1=-0{,}3472963.$$

Da $\log\sin 50^0=9{,}8842540-10$ ist, so wird natürlich $\log(-y_2)$ positiv, also $-y_2>1$ und ist darum unbrauchbar. Für die Höhe des Kugelabschnittes ist $h=y+1$; die eigentlich gesuchte Entfernung der Schnittebene von der Grundfläche der Halbkugel ist aber $r-h=1-h=-y$; also ist sie 0,3472963.



27. Der Kreis um M als Mittelpunkt sei ein größter Kreis. Man schneide durch die Ebene des Parallelkreises AB den Kugelabschnitt ACBO ab, ziehe die beiden Radien $MD=r$ und $OB=\varrho$, ferner AM und BM, so ist BOM ein rechtwinkliges Dreieck. Bezeichnen wir den Mittelpunktswinkel AMB mit α, so ist Winkel $OMB={}^1/_2\alpha$. Nun ist: $OB:MB=\varrho:r=\sin{}^1/_2\alpha$, also

$$\varrho=r\sin{}^1/_2\alpha;\ \text{daher}$$
$$\varrho^2=(r\sin{}^1/_2\alpha)^2.$$

Nun ist der Kreis des Kugelabschnittes um $O=\varrho^2\pi$; daher ist auch:

$$\varrho^2\pi=(r\sin{}^1/_2\alpha)^2\pi.$$

Nun ist die Oberfläche der Calotte oder Kugelschale gleich dem Produkte aus dem Umfange eines größten Kugelkreises und ihrer Höhe. Nun ist die Höhe $=OC$, folglich ist die Oberfläche derselben $=2r\pi.OC$. Um nun OC zu bestimmen, erwäge man, daß in dem rechtw. Dreieck BOM

$$MO^2=MB^2-BO^2;\ \text{also}$$
$$MO=\sqrt{MB^2-BO^2}=\sqrt{r^2-\varrho^2}.$$

Nun ist $MO=MC-OC=r-OC$; daher

$$r-OC=\sqrt{r^2-\varrho^2};\ \text{folglich}$$

$$OC=r-\sqrt{r^2-\varrho^2}=r\left\{1-\sqrt{1-\frac{\varrho^2}{r^2}}\right\}.\ \text{Daher ist also:}$$

Digitized by Google

$$2r\pi . OC = 2r^2\pi\left\{1 - \sqrt{1 - \frac{\varrho^2}{r^2}}\right\}$$

Demnach ist die gesammte Oberfläche des Kugelabschnittes, die sich zusammensetzt aus der Fläche des Kreises um O und der Calotte:

$$(r \sin {}^1/_2\alpha)^2\pi + 2r^2\pi\left\{1 - \sqrt{1 - \frac{\varrho^2}{r^2}}\right.$$

Da nun diese Oberfläche nach der Aufgabe auch dem Inhalte des größten Kugelkreises also $= r^2\pi$ ist, so haben wir die Gleichung:

$$r^2\pi\left\{(\sin {}^1/_2\alpha)^2 + 2\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\varrho^2}{r^2}}\right)\right\} = r^2\pi \text{ oder}$$

$$\sin {}^1/_2\alpha^2 + 2\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\varrho^2}{r^2}}\right) = 1.$$

Nun ist $\frac{\varrho^2}{r^2} = \sin {}^1/_2\alpha^2$ und $\sqrt{1 - \sin {}^1/_2\alpha^2} = \cos {}^1/_2\alpha$; daher haben wir jetzt:

$$\sin {}^1/_2\alpha^2 + 2(1 - \cos {}^1/_2\alpha) = 1.$$

Weil ferner $\sin {}^1/_2\alpha^2 = 1 - \cos {}^1/_2\alpha^2$, so erhalten wir schließlich:

$$1 - \cos {}^1/_2\alpha^2 + 2 - 2\cos {}^1/_2\alpha = 1 \text{ oder}$$

$$\cos {}^1/_2\alpha^2 + 2\cos {}^1/_2\alpha = 2.$$

Setzt man in dieser Gl. $\cos {}^1/_2\alpha = x$, so ist:

$x^2 + 2x = 2$; folgl. $x = -1 + \sqrt{3} = 0{,}7320508$; daher

$\cos {}^1/_2\alpha = 0{,}7320508$; $\log \cos {}^1/_2\alpha = 9{,}8645412 - 10$;

mithin $^1/_2\alpha = 42^\circ 26' 29{,}1''$; $\alpha = 85^\circ 52' 58{,}2''$.

28. α) Die Aufgabe liefert die Gleichung:

$$\cot x = 2\sin x \text{ oder } \frac{\cos x}{\sin x} = 2\sin x \text{ oder}$$

$$\cos x = 2\sin x^2.$$

Setzen wir nun $\cos x = y$, so wird $y = 2(1 - y^2)$ oder

$y^2 + {}^1/_2 y - 1 = 0$. Hieraus finden wir:

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4} = \cos x.$$

Das untere Zeichen ist aber nicht zu gebrauchen, denn für dasselbe würde $y = \cos x$ negativ und absolut > 1. Es kann überhaupt x nicht zwischen 90° und 180° oder zwischen 180° und 270° liegen. Im ersten Falle wäre aber $\sin x$ positiv, $\cot x$ negativ, also könnte selbstverständlich nicht $\cot x = 2\sin x$ sein. Im zweiten Falle wäre $\cot x$ positiv, $\sin x$ negativ, also auch wieder die Gleichung $\cot x = 2\sin x$

Digitized by Google

eine Ungereimtheit. Es bleibt demnach für $\cos x$ der eine Werth $\frac{1}{4}\{-1+\sqrt{17}\}$ übrig. Nun ist $\sqrt{17}=4{,}1231056$; also

$$\cos x = 0{,}7807764$$
$$\log\cos x = 9{,}8925267-10$$
$$x = 38^0 40'5{,}8''$$

Wir hätten auch $\sin x$ finden können, nämlich

$$\sin x=\sqrt{1-y^2}=\pm\sqrt{1-\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right)^2}=\pm\sqrt{-\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8}\sqrt{17}}$$

Hier ist das doppelte Zeichen gestattet. Durch $\cos x = 0{,}8707764$ werden nämlich für x zwei Werthe bestimmt, der vorhin berechnete und seine Ergänzung zu 360^0, wir wollen sagen x und 360^0-x. Auf den letzteren, der im vierten Quadranten liegt, bezieht sich das negative Vorzeichen in der Formel für den Sinus. Daß letzterer Winkel der Aufgabe genügt, ergibt sich gleich; denn wenn $\cot x = 2\sin x$, so ist auch $-\cot x = -2\sin x$, d. h. $\cot(360^0-x) = 2\sin(360^0-x)$. Von 0 bis 4 Rechten gibt es also zwei Winkel, die der Aufgabe genügen, nämlich $38^0 40'5{,}8''$ und $360^0-38^0 40'5{,}8''$. Wollen wir die allgemeine Lösung der Aufgabe, so müssen wir auch den Winkel resp. Bogen über 360^0 mit in Betracht ziehen, und da nun alle trigonometrische Funktionen des Bogens $n.360^0+\alpha$ gleich sind den entsprechenden von α, wo n jede positive ganze Zahl sein kann, so ist klar, daß einerseits alle in der Formel

$$n.360^0+38^0 40'5{,}8''$$

enthaltenen Bogen, andrerseits die in der Formel

$$n.360^0+(360^0-38^0 40'5{,}8'')$$

enthaltenen der Aufgabe genügen. Die beiden Formeln können wir alsdann natürlich auch in die eine

$$n.360^0 \pm 38^0 40'5{,}8''$$

zusammenfassen.

28. β) Die Gleichung $\operatorname{tang} x = \cos x$ gibt für:

$$\sin x = y:\frac{y}{\sqrt{1-y^2}} = \sqrt{1-y^2}$$

oder: $y^2+y=1$; also $y=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$.

Das untere Zeichen ist zu verwerfen, weil es einen Werth für $y=\sin x$ liefert, der absolut >1. Also ist

$$\sin x = \tfrac{1}{2}(-1+\sqrt{5}) = \tfrac{1}{2}(-1+2{,}236068) = 0{,}618034.$$

Demnach ist $\log\sin x = 9{,}7910124-10$

$$x = 38^0 10'21{,}7''$$

Da $\sin x$ nur einen positiven Werth hat, so können im 3. und 4. Quadranten keine der Aufgabe genügenden Winkel

Digitized by Google

liegen, wie auch aus dem Vorzeichen der trigonometrischen Funktionen in diesen Quadranten von selbst klar ist. Der aus der Gleichung $\sin x = 0{,}618034$ folgende, im 2. Quadranten liegende Werth für x genügt dagegen der Aufgabe, da sowohl $-\operatorname{tang} x = \operatorname{tang}(180^0 - x)$ als auch $-\cos x = \cos(180^0 - x)$ ist. Unter 4 Rechten genügen also nur folgende Winkel: $38^0 10' 21{,}7''$ und $180^0 - 38^0 10' 21{,}7''$, die wir auch auf folgende Weise schreiben können:

$$90^0 - 51^0 49' 38{,}3'' \text{ und } 90^0 + 51^0 49' 38{,}3''.$$

Da nun alle Funktionen des Winkels oder Bogens $n \cdot 360^0 + \alpha$ gleich sind denen des Bogens α, wenn n eine ganze Zahl ist, so ist klar, daß auch alle in folgenden Ausdrücken enthaltenen Winkel der Aufgabe genügen:

$n.360^0 + 90^0 - 51^0 49' 38{,}3''$ und $n.360^0 + 90^0 + 51^0 49' 38{,}3''$ oder: $360^0 = 4 \cdot 90^0$ gesetzt.

$$(4n+1).90^0 \pm 51^0 49' 38{,}3''.$$

28. γ) Die Gleichung ist: $\operatorname{tang} x = \sin x + \cos x$ oder

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \sin x + \cos x.$$

Setzen wir $\cos x = y$, so wird weiter

$$\sqrt{1-y^2} = y\sqrt{1-y^2} + y^2, \text{ woraus folgt:}$$

$(1-y)\sqrt{1-y^2} = y^2$; hieraus erhalten wir endlich:

$$y^4 - y^3 + y - 1/2 = 0.$$

Wir wollen diese Gl. des vierten Grades nach der Newton'schen Methode auflösen.

Man sehe §. 509. Wir setzen

$$N = y^4 - y^3 + y - 1/2.$$

Da $y = \cos x$ ist, so kann die Gleichung keine Wurzeln haben, die > 1 sind, oder wenigstens können wir dieselbe für unsere Aufgabe nicht gebrauchen, wenn sie solche hat. Für $y = 0$ wird $N = -1/2$; für $y = 1$ wird $N = +1/2$. Da diese beiden Werthe von N verschiedene Vorzeichen haben, so liegt zwischen 0 und 1 wirklich eine Wurzel der Gleichung. Setzen wir $y = 1/2$, so wird $N = -1/16$. Wir wissen also jetzt schon genauer, daß diese Wurzel zwischen $1/2$ und 1 liegt und zwar nahe an $1/2$, weil N für $y = 1/2$ ja schon so klein, nämlich $-1/16$ wird. Wir versuchen nun folgende Werthe für y: 0,6; 0,7; 0,8; 0,9. Für 0,6 wird aber $N = 0{,}0136$. Da dieses positiv ist, so brauchen wir die andern Werthe nicht zu versuchen, weil jetzt sich schon herausgestellt hat, daß die Wurzel zwischen 0,5 und 0,6 liege. Wir nehmen nun 0,5 als n an und suchen die Correktion h. Für $y = n = 0{,}5$ ist $N = -1/16$. Nun ist $N_1 = 4n^3 - 3n^2 + 1 = 4.(1/2)^3 - 3.(1/2)^2 + 1 = 3/4$. Demnach wird:

Digitized by Google

$$h = -\frac{N}{N_1} = (+1/16) : 3/4 = 0{,}083.$$

Wir haben also schon einen genaueren Werth der Wurzel, nämlich $0{,}5 + 0{,}083 = 0{,}583$. Um nun zu diesem neuen Werthe die Correktion h zu finden, müssen wir N und N_1 für y oder $n = 0{,}583$ berechnen. Für diesen Werth wird $N = 0{,}1155246 - 0{,}1981553 + 0{,}583 - 0{,}5 = 0{,}0003693$ also sehr klein, so daß der Werth $y = 0{,}583$ schon ziemlich genau ist. Da dieser Werth von N positiv ist, so wissen wir schon, daß die wahre Wurzel etwas kleiner ist als 0,583, so daß h negativ sein muß, was sich nachher ergeben wird. Es ist nämlich:

$$N_1 = 4n^3 - 3n^2 + 1 = 0{,}7926212 - 1{,}019667 + 1 = 0{,}7729542;$$

$$\text{also } h = -\frac{N}{N_1} = -\frac{0{,}0003693}{0{,}7729542} = -0{,}00047778$$

Hienach ist also der dritte Näherungswerth

$$y = 0{,}583 - 0{,}00047778 = 0{,}58252222.$$

Um nun zu sehen, wie genau dieser Werth ist und um nöthigenfalls eine neue Correktion zu finden, müssen wir N für $y = 0{,}58252222$ berechnen; hienach ist:

$$N = 0{,}1151463 - 0{,}1976685 + 0{,}58252222 - 0{,}5$$
$$= 0{,}6976685 - 0{,}6976685 = 0.$$

Der Werth von N ist also in den 7 ersten Decimalstellen nicht mehr von Null verschieden. Also ist der gefundene Werth bis auf seine letzteren Decimalstellen genau. Hiedurch ist eine Wurzel der Gleichung gefunden. Es ist also:

$$y = \cos x = 0{,}58252222$$
$$\log \cos x = 9{,}7653125 - 10; \text{ also}$$
$$x = 54^\circ 22' 18{,}62''.$$

Die Gleichung $y^4 - y^3 + y - 1/2 = 0$ hat aber noch eine andere Wurzel zwischen 0 und -1, die unsrer Aufgabe genügt. Für $y = 0$ wird nämlich $N = -1/2$ wie oben; für $y = -1$ aber ist $N = 1/2$, so daß also auch wieder die beiden Werthe von N entgegengesetzte Zeichen haben, also zwischen 0 und -1 eine Wurzel unsrer Gl. liegt. Für $y = -0{,}5$ wird $N = -18/16$, so daß also die gesuchte Wurzel zwischen $-0{,}5$ und -1 liegt. Wir müssen nun die Werthe $(-0{,}6)$; $(-0{,}7)$; $(-0{,}8)$; $(-0{,}9)$ versuchen. Wir finden dann die entsprechenden $N = -0{,}7544, -0{,}6169, -0{,}3784, -0{,}0149$. Da also die den Werthen $(-0{,}9)$ und (-1) entsprechenden N, nämlich $(-0{,}0149)$ und $+0{,}5$, entgegengesetzte Zeichen haben, so liegt die gesuchte Wurzel zwischen $(-0{,}9)$ und (-1). Wir setzen nun $n = -0{,}9$ und erhalten

Digitized by Google

$N = -0{,}0149$ und $N_1 = 4.(-0{,}9)^3 - 3.(-0{,}9)^2 + 1 = -4{,}346$;

also $h = -\frac{N}{N_1} = -\frac{-0{,}0149}{-4{,}346} = -0{,}00343$;

also ist der genauere Werth:

$$y = -0{,}9 - 0{,}00343 = -0{,}90343.$$

Diesen Werth setzen wir wieder $= n$ und suchen die entsprechende Correktion h. Hienach ist

$N = +0{,}6661592 + 0{,}7373667 - 0{,}90343 - 0{,}5 = 0{,}0000959$
$N_1 = -2{,}9494668 - 2{,}4485574 + 1 = -4{,}3980242$; also

$$h = -\frac{+0{,}0000959}{-4{,}3980242} = +0{,}0000218052.$$ Demnach ist:

$$y = -0{,}90343 + 0{,}0000218052 = -0{,}9034081948.$$

Um zu finden, ob N für diesen Werth gleich Null wird und nöthigenfalls, um die neue Correktion zu erhalten, haben wir

$N = 1{,}4034080 - 1{,}4034081 = -0{,}0000001,$

also bis auf eine Einheit der siebenten Decimalstelle der Null gleich. Eine neue Correktion ist daher an den sieben ersten Decimalstellen nicht mehr anzubringen. Demnach ist die negative Wurzel unsrer Gleichung $= -0{,}90340819$ und es ist: $\cos x = -0{,}90340819$. Nun ist:

$\cos(180^0 - x) = 0{,}90340819$; also

$\log\cos(180^0 - x) = 9{,}9558840 - 10$

$180^0 - x = 25^0 23' 24{,}97''$; also $x = 154^0 36' 35{,}03''$

28. δ) Es handelt sich hier um die Auflösung der Gleichung:

$$\sin x + \cos x + \operatorname{tang} x = 2.$$

Wir setzen nun $\sin x = y$ und haben dann

$$y + \sqrt{1-y^2} + \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} = 2 \text{ oder}$$

$$(y-2)\sqrt{1-y^2} = y^2 - y - 1.$$

Entwickelt man diese Gleichung und ordnet sie, so erhalten wir: $y^4 - 3y^3 + y^2 + 3y - 1\frac{1}{2} = 0.$

Wir berechnen die Wurzeln dieser Gleichung wieder nach der Newton'schen Methode. Es ist hier:

$N = y^4 - 3y^3 + y^2 + 3y - 1{,}5$ und $N_1 = 4y^3 - 9y^2 + 2y + 3$.

Für $y = 0$ wird $N = -1{,}5$; für $y = 1$ wird $N = +0{,}5$; also hat die Gl. eine Wurzel zwischen 0 und 1. Setzen wir $y = \frac{1}{2}$, so wird $N = -\frac{1}{16}$, so daß also diese Wurzel zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 liegt. Setzen wir $y = 0{,}6$ so wird $N = +0{,}1416$ also positiv, so daß also die gesuchte Wurzel zwischen 0,5 und 0,6 liegt. Wir setzen $n = 0{,}5$ und erhalten das entsprechende $N = -\frac{1}{16}$ und das entsprechende

Digitized by Google

$N_1 = 4.(1/2)^3 - 9.(1/2)^2 + 2.(1/2) + 3 = 3{,}9624;$

also ist die erste Correktion

$$h = -\frac{N}{N_1} = -\frac{-1/16}{3{,}9624} = +\frac{0{,}0625}{3{,}9624} = 0{,}015.$$

Als zweiten Näherungswerth haben wir also $n + h = 0{,}515$. Setzen wir $n = 0{,}515$, so wird

$N = 1{,}8805692 - 1{,}9097724 = -0{,}0292032$

$N_1 = 2{,}1893391$; also die neue Correktion:

$$h = -\frac{-0{,}0292032}{2{,}1893391} = 0{,}013338.$$

Sonach ist der neue genäherte Werth der Wurzel

$$= 0{,}515 + 0{,}013338 = 0{,}528338.$$

Für $n = 0{,}528338$ wird

$N = 1{,}9420749 - 1{,}9424427 = -0{,}0003678.$

$N_1 = 2{,}1343297$; also beträgt die dritte Correktion:

$$h = -\frac{-0{,}0003678}{2{,}1343297} = 0{,}0001723.$$

Es ist somit der neue genäherte Werth der Wurzel

$$n = 0{,}528338 + 0{,}0001723 = 0{,}5285103.$$

Wir müssen jetzt wieder für N den neuen Werth der Wurzel berechnen, um die Genauigkeit desselben zu prüfen und um zu sehen, ob er noch eine Correktion erfordert.

Nun wird für $n = 0{,}5285103$:

$$N = 1{,}9428756 - 1{,}9428756 = 0.$$

Es wird also für $y = 0{,}5285103$ die Funktion $y^4 - 3y^3 + y^2 + 3y - 1{,}5$, wenn wir nur bis auf 7 Decimalstellen gehen, gleich Null. Hiernach ist also:

$$\cos x = 0{,}5285103$$

$\log\cos x = 9{,}7230535 - 10$; folglich:

$$x = 31^\circ 54' 17{,}5''.$$

Daß $\cos x = 31^\circ 55' 17{,}5''$ sei, muß wohl auf einem Irrthum beruhen, denn für diesen Winkel könnten in $\log\cos x$ nur die drei ersten Stellen 723 ungeändert bleiben, statt der folgenden 0 müßte schon eine Ziffer 1 oder 2 oder 3 stehen und diese Differenz ist zu groß. Wir können aber auch für den von uns gefundenen Winkel eine direkte Probe machen. Wir suchen nämlich für $31^\circ 54' 17{,}5''$ die Werthe von $\sin x$, $\cos x$, $\tan g x$ und sehen, ob sie zusammen 2 geben.

Nun ist nach dem Obigen $\sin 31^\circ 54' 17{,}5'' = 0{,}5285103$; ferner liefern die Tafeln:

$\log\cos x = 9{,}9288703 - 10$ und $\log\tan g x = 9{,}7941832 - 10$;

Digitized by Google

also:

$$\cos x = 0{,}8489268$$
$$\operatorname{tang} x = 0{,}6225629$$
$$\sin x = 0{,}5285103;$$ folglich:

$$\sin x + \cos x + \operatorname{tang} x = 2{,}0000000,$$

also vollkommen richtig. Machen wir dagegen mit dem Winkel $31^0 55' 17{,}5''$ die Probe, so finden wir:

$$\log \sin 31^0 55' 17{,}5'' = 9{,}7232563 - 10$$
$$\log \cos \text{ „ „ „ } = 9{,}9287916 - 10$$
$$\log \operatorname{tang} \text{ „ „ „ } = 9{,}7944648 - 10;$$ also:

$$\sin x = 0{,}5287572$$
$$\cos x = 0{,}8487732$$
$$\operatorname{tang} x = 0{,}6229667;$$ folglich:

$$\sin x + \cos x + \operatorname{tang} x = 2{,}0004971;$$

also nicht genau passend. Wir haben x durch seinen Sinus bestimmt und erhalten daher eigentlich zwei Werthe für x, nämlich x und $180^0 - x$. Der letztere stumpfe Winkel ist aber nicht brauchbar, denn für denselben ist der cos und die tang negativ, also $\sin + \cos + \operatorname{tang} < \sin$, also sicher nicht $= 2$, da ja sin nicht größer als 1 sein kann.

Unsere Gl. hat aber noch eine zweite und zwar negative Wurzel. Für $y = 0$ fanden wir $N = -3/2$; für $y = -1$ wird $N = +1/2$, so daß also auch zwischen 0 und -1 eine Wurzel liegt. Setzen wir $y = -1/2$, so wird $N = -25/16$, so daß die engeren Grenzen für die gesuchte Wurzel $(-1/2)$ und (-1) sind. Wir versuchen nun die Reihe der Werthe $(-0{,}6)$; $(-0{,}7)$; $(-0{,}8)$; $(-0{,}9)$ und erhalten die entsprechenden Werthe für:

$$N = -2{,}1624, \quad -1{,}8409, \quad -1{,}3144, \quad -0{,}5469.$$

Da die zu $y = -0{,}9$ und $y = -1$ gehörenden Werthe von N, nämlich $-0{,}5469$ und $+0{,}5$, entgegengesetzte Vorzeichen haben, so liegt die gesuchte Wurzel zwischen $(-0{,}9)$ und (-1), sie ist also bis auf die Zehntel genau $= -0{,}9$. Für $y = -0{,}9$ ist:

$N_1 = 4y^3 - 9y^2 + 2y + 3 = -9{,}006$; also die erste Correktion:

$$h = -\frac{N}{N_1} = -\frac{-0{,}5469}{-9{,}006} = -0{,}0607.$$

Demnach wird der erste genauere Werth der Wurzel:

$$n = -0{,}9 - 0{,}0607 = -0{,}9607.$$

Für diesen Werth von n wird:

$N = 4{,}4347894 - 4{,}3821 = 0{,}0526894$ und
$N_1 = -10{,}7745908$. Sonach ist die zweite Correktion:

Digitized by Google

$$h = -\frac{N}{N_1} = -\frac{0{,}0526894}{-10{,}7745908} = 0{,}0048902.$$

Demnach ist der zweite genäherte Werth der Wurzel:

$$n = -0{,}9607 + 0{,}0048902 = -0{,}9558098.$$

Hiernach ist: $N = 0{,}0003624$ und $N_1 = -10{,}6265776$; daher beträgt die dritte Correktion:

$$h = -\frac{N}{N_1} = +\frac{0{,}0003624}{10{,}6265776} = 0{,}0000341.$$

Der dritte genäherte Werth der Wurzel beträgt also:

$$n = -0{,}9558098 + 0{,}0000341 = -0{,}9557757.$$

Hiernach ist: $N = -0{,}0000003$.

Da der Werth von N sich um weniger als 4 Einheiten der letzten Stelle von Null unterscheidet, so können wir $-0{,}9557757$ als wahren Werth der Wurzel annehmen. Der Werth von N zeigt, daß $y = -0{,}9557757$ absolut kleiner als die gesuchte Wurzel ist, man kann also leicht denken, daß etwa $y = -0{,}9557758$ einen Werth für N liefere, welcher der Null näher käme, als der obige. Wir haben dann $N = +0{,}0000024$. Dieser Werth für N liegt also von Null viel weiter ab, als der obige. Da die beiden Werthe aber entgegengesetzte Zeichen haben, so liegt y zwischen $-0{,}9557757$ und $-0{,}9557758$, aber viel näher an ersterem Werthe, als an letzterem. Die erstere Zahl drückt also den Werth der Wurzel so genau aus, als es in 7 Decimalstellen möglich ist. Wir haben also:

$$\sin x = -0{,}9557757 \text{ oder:}$$
$$\sin(x - 180^0) = 0{,}9557757.$$

Der Winkel x liegt natürlich zwischen 180^0 und 270^0. Es ist nun:

$$\log\sin(x - 180^0) = 9{,}9803560 - 10$$
$$x - 180^0 = 72^0 53' 47{,}8'' \text{ und daher:}$$
$$x = 252^0 53' 47{,}8''.$$

Der Gleichung $\sin x = -0{,}9557757$ entspricht allerdings auch noch ein Winkel im vierten Quadranten; dieser kann aber der Aufgabe nicht genügen, weil für ihn sin und tang negativ, cos allein positiv ist, also:

$\sin + \cos + \tan g < \cos < 1$, also durchaus nicht $= 2$ ist.

29. Entwickelt man auf gewöhnliche algebraische Weise die Produkte, so erhält man:

$$\alpha)\ \cos\alpha^2 + \sin\alpha^2 = 1,$$

weil die Linien des Sinus und Cosinus eines Bogens immer

Digitized by Google

Katheten eines rechtw. Dreiecks sind, dessen Hypotenuse der Radius ist.

β) Wenn man die beiden Ausdrücke $\cos x+\sin x\sqrt{-1}$ mit $\cos y+\sin y\sqrt{-1}$ mit einander multiplicirt, so ist ihr Produkt:

$$\cos x.\cos y-\sin x.\sin y+(\sin x.\cos y+\sin y.\cos x)\sqrt{-1}.$$

Nun ist: $\cos x.\cos y-\sin x.\sin y=\cos(x+y)$ und
$\sin x.\cos y+\sin y.\cos x=\sin(x+y)$.

Setzt man diese Werthe in das entwickelte Produkt, so wird:

$$(\cos x+\sin x\sqrt{-1})(\cos y+\sin y\sqrt{-1})=$$
$$\cos(x+y)+\sin(x+y)\sqrt{-1}.$$

Da diese Formel für jeden Werth des Bogens x gilt, so kann man $-x$ für $+x$ setzen, und weil $\cos(-x)=\cos x$ und $\sin(-x)=-\sin x$ ist, so ergibt sich die neue Formel:

$$(\cos x-\sin x\sqrt{-1})(\cos y-\sin y\sqrt{-1})=$$
$\cos(x+y)-\sin(x+y)\sqrt{-1}$; daher ist also:
$$(\cos x\pm\sin x\sqrt{-1})(\cos y\pm\sin y\sqrt{-1})=$$
$$\cos(x+y)\pm\sin(x+y)\sqrt{-1}.$$

γ) Setzen wir $x+y=S$ und wollen $\cos S\pm\sin S\sqrt{-1}$ mit $\cos z\pm\sin z\sqrt{-1}$ multipliciren, so haben wir ebenfalls:

$$(\cos S\pm\sin S\sqrt{-1})(\cos z\pm\sin z\sqrt{-1})=$$
$\cos(S+z)\pm\sin(S+z)\sqrt{-1}$; folglich:
$$\cos(x\pm\sin x\sqrt{-1})(\cos y\pm\sin y\sqrt{-1})(\cos z\pm\sin z\sqrt{-1})=$$
$$\cos(x+y+z)\pm\sin(x+y+z)\sqrt{-1}.$$

δ) Im allgemeinen hat man für n Bogen a, b, c ... z offenbar:

$$(\cos a\pm\sin a)(\cos b\pm\sin b\sqrt{-1})\ldots\ldots(\cos z\pm z\sqrt{-1})=$$
$$\cos(a+b+c+\ldots+z)\pm\sin(a+b+c+\ldots+z)\sqrt{-1}$$

Setzen wir nun $a=b=c\ldots=z$, so ist $a+b+c..+z=na$; folglich ist: $(\cos a\pm\sin a\sqrt{-1})^n=\cos na\pm\sin na\sqrt{-1}$.

30. α) Heißen die 3 Seiten eines Dreiecks a, b, c, so ist nach Aufgabe 6 dieses §. der Inhalt, den wir allgemein mit J bezeichnen wollen:

$$J=\tfrac{1}{4}\sqrt{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2}$$
$$=\sqrt{\tfrac{1}{2}(a+b+c).\tfrac{1}{2}(a+b-c).\tfrac{1}{2}(a-b+c).\tfrac{1}{2}(-a+b+c)}.$$

Setzt man hierin $\frac{1}{2}(a+b+c)=s$, so hat man:

$$J=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Soll dieser Ausdruck rational sein, so muß $s(s-a)(s-b)(s-c)$ ein vollkommenes Quadrat werden. Was nun auch a, b, c

Digitized by Google

sein möge, so können wir jedenfalls $s(s-a)=p(s-b)(s-c)$ setzen, wo p eine bestimmte Zahl ist. Dann wird:

$$s(s-a)(s-b)(s-c)=p(s-b)^2(s-c)^2$$

und also der Inhalt des Dreiecks $=(s-b)(s-c)\sqrt{p}$. Derselbe wird also rational und nur dann rational, wenn $\sqrt{p}$ rational wird, oder wenn p eine Quadratzahl ist. Soll also der Inhalt des Dreiecks rational werden, so muß, wenn wir $p=r^2$ setzen $s(s-a)=r^2(s-b)(s-c)$ sein. Setzen wir für a, b, c solche Werthe, die dieser Gl. genügen, so wird der Inhalt des Dreiecks rational. Suchen wir also die allgemeinste Formel für a, b, c, welche dieser Gl. genügt, so haben wir die allgemeine Auflösung unserer Aufgabe. Setzen wir für s seinen Werth $^1/_2(a+b+c)$, so finden wir:

$(a+b+c)(-a+b+c)=r^2(a+b-c)(a-b+c)$:

Hieraus folgt:

$$a^2=b^2+c^2-2\frac{r^2-1}{r^2+1}bc;\ \text{also}\ a=\sqrt{b^2+c^2-2\frac{r^2-1}{r^2+1}bc}.$$

Da a eine Rationalzahl sein soll, so muß der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen ein vollkommenes Quadrat werden. Drücken wir diese Bedingung aus, so erhalten wir die Werthe von b und c und damit endlich auch von a. Setzt man nun $a=m-c$, so wird:

$$b^2+c^2-2\frac{r^2-1}{r^2+1}bc=m^2-2mc+c^2;\ \text{also:}$$

$$2c\left(m-\frac{r^2-1}{r^2+1}b\right)=m^2-b^2;\ \text{folglich:}\ c=\frac{m^2-b^2}{2\left(m-\frac{r^2-1}{r^2+1}b\right)}.$$

$$\text{Demnach ist:}\ a=m-\frac{m^2-b^2}{2\left(m-\frac{r^2-1}{r^2+1}b\right)}=\frac{m^2+b^2-2m\frac{r^2-1}{r^2+1}b}{2\left(m-\frac{r^2-1}{r^2+1}b\right)}.$$

Setzt man $b=n$, so ist

$$a=\frac{m^2+n^2-2\frac{r^2-1}{r^2+1}mn}{2\left(m-\frac{r^2-1}{r^2+1}n\right)}\quad\text{und}\quad c=\frac{m^2-n^2}{2\left(m-\frac{r^2-1}{r^2+1}n\right)}$$

und weil es gestattet ist, die Werthe für a, b, c mit einerlei Zahl zu multipliciren, so erhalten wir:

$$a=m^2+n^2-2\frac{r^2-1}{r^2+1}mn;\ b=2n\left(m-\frac{r^2-1}{r^2+1}n\right);\ c=m^2-n^2.$$

Digitized by Google

$$\text{Nun ist } s=(m+n)\left(m-\frac{r^2-1}{r^2+1}n\right)$$

$$s-a=(m-n)\frac{2nr^2}{r^2+1}$$

$$s-b=(m-n)\left(m-\frac{r^2-1}{r^2+1}n\right)$$

$$s-c=(m+n)\frac{2n}{r^2+1};\ \text{daher ist:}$$

$$s(s-a)(s-b)(s-c)=(m+n)^2.(m-n)^2.\left(m-\frac{r^2-1}{r^2+1}n\right)^2\cdot\left(\frac{2nr}{r^2+1}\right)^2$$

folglich ist der Inhalt des Dreiecks

$$J=(m+n)(m-n)\left(m-\frac{r^2-1}{r^2+1}n\right)\frac{2nr}{r^2+1}.$$

Für	$r=1$,	$m=2$,	$n=1$	wird	$a=5$,	$b=4$,	$c=3$,	$J=6$
„	$r=1$,	$m=3$,	$n=1$	„	$a=10$,	$b=6$,	$c=8$,	$J=24$
„	$r=2$,	$m=6$,	$n=5$	„	$a=25$,	$b=30$,	$c=11$,	$J=132$
„	$r=2$,	$m=5$,	$n=4$	„	$a=17$,	$b=20^4/_5$,	$c=9$,	$J=74^{22}/_{25}$
„	$r=2$,	$m=2$,	$n=1$	„	$a=2^3/_5$,	$b=2^4/_5$,	$c=3$,	$J=3^9/_{25}$
„	$r=^1/_3$,	$m=2$,	$n=1$	„	$a=8^1/_5$,	$b=5^3/_5$,	$c=3$,	$J=5^1/_{25}$
„	$r=^1/_3$,	$m=3$,	$n=1$	„	$a=14^4/_5$,	$b=7^3/_5$,	$c=8$,	$J=18^6/_{25}$
„	$r=^1/_2$,	$m=2$,	$n=1$	„	$a=7^2/_5$,	$b=5^1/_5$,	$c=3$,	$J=6^6/_{25}$
„	$r=3$,	$m=6$,	$n=5$	„	$a=13$,	$b=20$,	$c=11$,	$J=66$
„	$r=4$,	$m=18$,	$n=17$	„	$a=73$,	$b=102$,	$c=35$,	$J=840$ u. s. w.

Hieraus folgt, daß für alle möglichen Werthe für m, n, r das Dreieck rational wird, wenn man nur immer $m>n$ annimmt.

30. β) Nach §. 403 Nr. 34 sind die Seiten rationaler rechtwinkliger Dreiecke m^2-n^2, $2mn$, m^2+n^2, wovon die beiden ersten die Katheten und die dritte, die Hypotenuse bezeichnet. Der Inhalt eines solchen Dreiecks ist $=^1/_2(m^2-n^2).2mn=(m^2-n^2).mn$ und sein Umfang $=(m^2+n^2)+(m^2-n^2)+2mn=2m(m+n)$.
Da nun der Zahlenausdruck seines Inhaltes dem seines Umfanges gleich sein soll, so ist:

$$2m(m+n)=(m^2-n^2).mn.$$

Dividiren wir diese Gl. durch $m(m+n)$, so erhalten wir:

$$2=(m-n)n;\ \text{also } m=\frac{n^2+2}{n};\ \text{daher ist;}$$

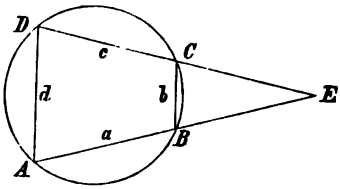
$$\left.\begin{aligned} m^2-n^2&=\left(\frac{n^2+2}{n}\right)^2-n^2=\frac{4(n^2+1)}{n^2}\\ 2mn&=2n.\frac{n^2+2}{n}=2(n^2+2)\end{aligned}\right\}\ \text{Katheten.}$$

Digitized by Google

$$m^2+n^2=\left(\frac{n^2+2}{n}\right)^2+n^2=\frac{2(n^4+2n^2+2)}{n^2}=\frac{2[(n^2+1)^2+1]}{n^2}$$

= Hypotenuse.

Für n=1 sind die beiden Katheten 8 und 6, die Hypotenuse 10
„ n=2 „ „ „ „ 5 „ 12, „ „ 13
u. s. w.



31. Aus den Seiten a, b, c, d eines in den Kreis beschriebenen Vierecks den Inhalt J des Vierecks zu berechnen. Es sei das in den Kreis eingeschriebene Viereck ABCD zu berechnen, worin AB=a, BC=b, DC=c, AD=d sei. Man verlängere AB und DC, bis sie sich in E schneiden; dann sind die Dreiecke ADE und BCE ähnlich, weil Winkel E beiden Dreiecken gemeinschaftlich und Winkel EBC=ADC, weil beide Winkel den Winkel ABC zu zwei Rechten ergänzen. Demnach verhält sich

$$\triangle ADE:\triangle BCE=d^2:b^2;\ \text{daher nach §. 227:}$$
$$(\triangle ADE-\triangle BCE):BCE=(d^2-b^2):b^2;$$

d. h. es verhält sich

$$\text{Viereck } ABCD:\triangle BCE=(d^2-b^2):b^2;\ \text{folglich}$$

$$ABCD \text{ oder } J=\frac{d^2-b^2}{b^2}\cdot\triangle BCE.$$

Nach Nro. 30 α) und 6 dieses § ist aber, wenn wir CE mit y und BE mit x bezeichnen,

$$\triangle BCE=\tfrac{1}{4}\sqrt{(b+x+y)(b+x-y)(b-x+y)(-b+x+y)}.$$

Zur Bestimmung der beiden unbekannten Seiten x und y des Dreiecks BCE hat man in den ähnlichen Dreiecken BCE und DAE die Proportionen:

(1) $x:(c+y)=b:d$, (2) $y:(a+x)=b:d$; hieraus folgt:
(3) $dx-by=bc$; (4) $dy-bx=ab$.
Aus (3) und (4) ergibt sich:

$$(x+y)=\frac{b(a+c)}{d-b}\ \text{und}\ x-y=\frac{b(c-a)}{d+b}.$$

Setzt man diese Werthe für x+y und x−y in den obigen Ausdruck für den Inhalt des △ BCE, so verwandelt sich derselbe in:

$$\triangle BCE=\tfrac{1}{4}\sqrt{\left(b+\frac{b(a+c)}{d-b}\right)\left(b+\frac{b(c-a)}{d+b}\right)\left(b-\frac{b(c-a)}{d+b}\right)\left(-b+\frac{b(a+c)}{d-b}\right.}$$

Digitized by Google

$$= {}^1/_4 \frac{b^2}{d^2-b^2} \cdot \sqrt{(d-b+a+c)(d+b+c-a)(d+b-c+a)(-d+b+a+c)}$$

$$= {}^1/_4 \frac{b^2}{d^2-b^2} \cdot \sqrt{(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d)}$$

Setzen wir diesen Werth für das Dreieck BCE in ABCD oder $J = \frac{d^2-b^2}{b^2} \cdot \triangle BEC$ ein, so wird

$$J = {}^1/_4 \sqrt{(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d)}$$

Setzt man hier $^1/_2(a+b+c+d)=s$, so verwandelt sich vorstehender Ausdruck in folgenden:

$$J = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

Setzt man weiter: $s-a=m$; so ist $a=s-m$
$s-b=n$; „ „ $b=s-n$
$s-c=p$; „ „ $c=s-p$.

Für den Fall nun $(s-a)(s-b)(s-c)=mnp$ rational werden soll, müssen wir

$s-d=mnpq^2$ setzen; in diesem Falle ist
$d=s-mnpq^2$.

Hieraus folgt, daß
$a+b+c+d=4s-(m+n+p+mnpq^2)$; also
$^1/_2(a+b+c+d)=2s-{}^1/_2(m+n+p+mnpq^2)$.

Daher ist auch
$s=2s-{}^1/_2(m+n+p+mnpq^2)$; folglich
$s={}^1/_2(m+n+p+mnpq^2)$. Es ist also:
$a=-m+n+p+mnpq^2$; $b=m-n+p+mnpq^2$
$c=m+n-p+mnpq^2$; $d=m+n+p-mnpq^2$
oder wenn man
$^1/_2(m+n+p+mnpq^2)=r$ setzt, so ist:
$a=r-m$, $b=r-n$, $c=r-p$, $d=r-mnpq^2$.

Hienach hat man:

$$J = \sqrt{(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d)}$$
$$= \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} = \sqrt{mnp.mnpq^2} = mnpq.$$

32. Es soll ein Winkel gefunden werden, dessen Sinus und Cosinus beide Rationalzahlen sind. Setzen wir den Sinus $= \frac{p}{q}$, so wird der Cosinus $= \sqrt{1-\frac{p^2}{q^2}} = \frac{1}{q}\sqrt{q^2-p^2}$. Damit auch dieser Cosinus rational sei, muß q^2-p^2 eine vollkommene Quadratzahl werden. Setzen wir also $q^2-p^2=x^2$, so wird auch $\frac{q^2}{p^2}-1=\frac{x^2}{p^2}$ oder $\left(\frac{q}{p}\right)^2-1=\left(\frac{x}{p}\right)^2$ eine vollkom-

Digitized by Google

mene Quadratzahl. Wir sind daher berechtigt, $\left(\frac{q}{p}\right)^2 - 1 = \left(\frac{q}{p} - \frac{a}{b}\right)^2$ zu setzen, wo a und b Rationalzahlen sind. Aus unsrer Gleichung folgt: $-1 = -2\frac{q}{p}\cdot\frac{a}{b} + \frac{a^2}{b^2}$ oder $\frac{q}{p} = \frac{a^2+b^2}{2ab}$. Diese letztere Gl. wird befriedigt durch die Annahme $q = a^2+b^2$, $p = 2ab$. Also ist der Sinus des verlangten Winkels $= \frac{2ab}{a^2+b^2}$. Der Cosinus wird dann

$$= \sqrt{1-\left(\frac{2ab}{a^2+b^2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}.$$

Wir könnten natürlich ebenso gut den Sinus $= \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ setzen und hätten dann den Cosinus $= \frac{2ab}{a^2+b^2}$

33. α) Zwei Dreiecksseiten a und b sind gegeben. Die dritte Seite, nämlich c so zu bestimmen, daß 1) $\sin {}^1/_2\gamma$ rational werde, wenn γ der Winkel ist, der von a und b eingeschlossen wird. Es ist:

$$\sin {}^1/_2\gamma = \sqrt{\frac{(a-b+c)(-a+b+c)}{4ab}}.$$

Welche rationale Zahlen wir auch für a, b, c setzen, so kann doch immer gesetzt werden:

$$\frac{a-b+c}{ab} = p(-a+b+c),$$

wo p eine rationale Größe ist. Dann wird durch diese Substitution:

$$\sin {}^1/_2\gamma = \sqrt{p\left(\frac{-a+b+c}{2a}\right)^2} = \frac{-a+b+c}{2a}\sqrt{p}.$$

Dieser Ausdruck wird nur dann rational, wenn $\sqrt{p}$ rational wird, wenn also p eine Quadratzahl ist. Wir wollen daher auch $\frac{1}{n^2}$ statt p schreiben, wobei wir p auch schon die gebrochene Form gegeben haben. Wenn wir also c aus der Gleichung

$$\frac{a-b+c}{ab} = \frac{1}{n^2}(-a+b+c).$$

Digitized by Google

bestimmen, so haben wir jeder Zeit eine Lösung der Aufgabe, und die sich ergebende Formel ist die allgemeinste, weil ohne Erfüllung der vorhergehenden Bedingung $\sin {}^1/_2\gamma$ nicht rational werden kann. Diese Bedingung nun liefert

$$n^2(a-b+c)=ab(-a+b+c) \text{ oder:}$$
$$(ab-n^2)c=(a-b)(ab+n^2); \text{ daher}$$
$$c=(a-b)\frac{ab+n^2}{ab-n^2}.$$

Alle Werthe für c, die der Aufgabe genügen sollen, müssen in dieser Formel für c enthalten sein, n ist eine willkürliche Rationalzahl. Es bleibt noch der entsprechende Ausdruck von $\sin {}^1/_2\gamma$ zu finden. Es ist zunächst

$$a-b+c=(a-b)\left\{1+\frac{ab+n^2}{ab-n^2}\right\}=(a-b)\cdot\frac{2ab}{ab-n^2},$$

$$\text{also } \frac{a-b+c}{ab}=\frac{2(a-b)}{ab-n^2}. \text{ Ebenso ist}$$

$$-a+b+c=(a-b)\left\{-1+\frac{ab+n^2}{ab-n^2}\right\}=(a-b)\frac{2n^2}{ab-n^2}.$$

Demnach ist:

$$\frac{(a-b+c)(-a+b+c)}{4ab}=\frac{(a-b)^2n^2}{(ab-n^2)^2} \text{ und somit ist}$$

$$\sin {}^1/_2\gamma=\sqrt{\frac{(a-b+c)(-a+b+c)}{4ab}}=\sqrt{\left(\frac{(a-b)n}{ab-n^2}\right)^2}=\frac{(a-b)n}{ab-n^2}.$$

Also wird $\sin {}^1/_2\gamma$ rational; da dieser Ausdruck naturgemäß kleiner als 1 sein muß, so sind nur solche Werthe von n zulässig, welche dieser Bedingung genügen. Zweitens soll c so bestimmt werden, daß $\cos {}^1/_2\gamma$ rational wird. Es ist nun

$$\cos {}^1/_2\gamma=\sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{4ab}}$$

und wir setzen nämlich wie vorhin

$\frac{a+b+c}{ab}=\frac{1}{n^2}(a+b-c)$; also $c(ab+n^2)=(a+b)(ab-n^2)$; mithin

$$c=(a+b)\frac{ab-n^2}{ab+n^2}. \text{ Hieraus ergibt sich}$$

$$(a+b+c)=(a+b)\left\{1+\frac{ab-n^2}{ab+n^2}\right\}=(a+b)\frac{2ab}{ab+n^2}; \text{ daher}$$

$$\frac{a+b+c}{ab}=\frac{2(a+b)}{ab+n^2}. \text{ Ebenso ist:}$$

Digitized by Google

$a+b-c=(a+b)\left\{1-\frac{ab-n^2}{ab+n^2}\right\}=(a+b)\frac{2n^2}{ab+n^2}$. Daher ist:

$\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{4ab}=\left(\frac{(a+b)n}{ab+n^2}\right)^2$. Schließlich ist demnach

$\cos{}^1/_2\gamma=\sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{4ab}}=\sqrt{\left(\frac{(a+b)n}{ab+n^2}\right)^2}=\frac{(a+b)n}{ab+n^2}$.

Für a=5, b=4, n=3, wird $c=(5-4)\frac{5.4+3^2}{5.4-3^2}=^{29}/_{11}=2^7/_{11}$

und $\sin{}^1/_2\gamma=\frac{(5-4).3}{5.4-3^2}=^3/_{11}$.

Für a=2, b=3, n=$^3/_2$ wird $c=(2+3).\frac{2.3-(^3/_2)^2}{2.3+(^3/_2)^2}$

$=5.^5/_{11}=2^3/_{11}$ und

$\cos{}^1/_2\gamma=\frac{(2+3).^3/_2}{2.3+(^3/_2)^2}=^{30}/_{33}=^{10}/_{11}$.

33. β) Sind die beiden anliegenden Seiten a und b und die gegenüberstehende c, so ist nach dem Cosinussatze, daß in jedem Dreieck das Quadrat einer Seite gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten vermindert um das doppelte Produkt aus diesen Seiten und dem Cosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels ist:

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos 60^0$ oder

weil $2ab\cos 60^0=2ab.{}^1/_2=ab$ ist,

$c^2=a^2+b^2-ab$.

Soll nun die rechte Seite der letzten Gleichung rational werden, so muß sie ein vollkommenes Quadrat sein. Setzt man daher

$a^2+b^2-ab=(a-nb)^2$, so wird

$a^2+b^2-ab=a^2-2abn+n^2b^2$, oder

$2an-a=n^2b-b$; daher

$a(2n-1)=b(n^2-1)$.

Dieser Gleichung wird Genüge geleistet, wenn

$a=n^2-1$ und $b=2n-1$

gesetzt wird. Demnach ist:

$c^2=(n^2-1)^2-(n^2-1)(2n-1)+(2n-1)^2=(n^2-n+1)^2$,

daher $c=n^2-n+1$.

Für n=3, wird a= 8, b=5, c=7.

„ n=4, „ a=15, b=7, c=13. u. s. w.

34. Es werden 3 Zahlen gesucht, deren Summe gleich ihrem Produkt ist. Man nimmt 3 Winkel A, B, C, deren Summe 180° beträgt, dann ist

Digitized by Google

$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A.\tan B.\tan C$,
also sind tang A, tang B und tang C die verlangten Zahlen. Jene trigonometrische Formel wird auf folgende Weise bewiesen. Es ist

$$\tan A+\tan B=\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\sin B}{\cos B}=\frac{\sin A.\cos B+\sin B.\cos A}{\cos A.\cos B}$$

$$=\frac{\sin(A+B)}{\cos A.\cos B}$$

Da nun $A+B+C=180^0$ sind, so ist:
$\sin(A+B)=\sin(180^0-C)=\sin C$; ebenso
$\cos(A+B)=\cos(180^0-C)=-\cos C$;
also $\cos C=-\cos(A+B)$.
Vorhergehende Formel wird also:

$$\tan A+\tan B=\frac{\sin C}{\cos A.\cos B}$$ Aus ihr folgt weiter

$$\tan A+\tan B+\tan C=\frac{\sin C}{\cos A.\cos B}+\frac{\sin C}{\cos C}$$

$$=\frac{\sin C.\cos C+\sin C.\cos A.\cos B}{\cos A.\cos B.\cos C}$$

$$=\frac{\sin C.(\cos C+\cos A.\cos B)}{\cos A.\cos B.\cos C}$$

$$=\frac{\sin C\{-\cos(A+B)+\cos A.\cos B\}}{\cos A.\cos B.\cos C.}$$

Entwickelt man im Zähler den Ausdruck $-\cos(A+B)$, so wird der Ausdruck

$$=\frac{\sin C\{-\cos A.\cos B+\sin A.\sin B+\cos A.\cos B\}}{\cos A.\cos B.\cos C}$$

$$=\frac{\sin C.\sin A.\sin B}{\cos A.\cos B.\cos C}=\frac{\sin A}{\cos A}.\frac{\sin B}{\cos B}.\frac{\sin C}{\cos C}$$

$=\tan A.\tan B.\tan C$. Es ist also
$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A.\tan B.\tan C$.
Oder: Es seien die 3 gesuchten Zahlen x, y, z, dann soll gemäß der Aufgabe sein:

$$(1)\quad x+y+z=xyz.$$

Setzt man nun eine dieser Zahlen, etwa $z=m$, so erhalten wir:

$$(2)\quad x+m=y(mx-1);\ \text{also}$$

$$(3)\quad y=\frac{x+m}{mx-1}.$$

Digitized by Google

Nun setze man $mx-1=p$, so wird $x=\frac{p+1}{m}$. Setze diesen Werth für x in (3), so wird $y=\frac{m^2+p+1}{mp}$. Die 3 Zahlen sind also:

$$x=\frac{p+1}{m},\ y=\frac{m^2+p+1}{mp},\ z=m.$$

35. Die Seiten des Dreiecks seien α, β, γ; ihnen mögen die Winkel A, B, C gegenüberstehen. Wir haben also:
$\cos A+\cos B+\cos C$ zu finden. Nun ist

$\cos A=2\cos{}^1/_2A^2-1$ u. s. w. für $\cos B$ und $\cos C$ ebenso; daher
(1) $\cos A+\cos B+\cos C=2\cos{}^1/_2A^2+2\cos{}^1/_2B^2+2\cos{}^1/_2C^2-3$.
Bezeichnet nun s die halbe Summe der Seiten, also
$s={}^1/_2(\alpha+\beta+\gamma)$, so ist:

$$(2)\ \cos{}^1/_2A=\sqrt{\frac{s(s-\alpha)}{\beta\gamma}},\ \cos{}^1/_2B=\sqrt{\frac{s(s-\beta)}{\alpha\gamma}},$$

$$\cos{}^1/_2C=\sqrt{\frac{s(s-\gamma)}{\alpha\beta}}.$$

Um nur die erste dieser Formeln zu beweisen, so ist:

$$\cos{}^1/_2A=\sqrt{{}^1/_2(1+\cos A)}=\sqrt{{}^1/_2\left(1+\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}\right)}$$

$$=\sqrt{\frac{2\beta\gamma+\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{4\beta\gamma}}=\sqrt{\frac{(\beta+\gamma)^2-\alpha^2}{4\beta\gamma}}$$

$$=\sqrt{\frac{(b+\gamma+\alpha)(\beta+\gamma-\alpha)}{4\beta\gamma}}=\sqrt{\frac{{}^1/_2(\alpha+\beta+\gamma).{}^1/_2(\alpha+\beta+\gamma-2\alpha)}{\beta\gamma}}$$

$$=\sqrt{\frac{s\left(s-\frac{2\alpha}{2}\right)}{\beta\gamma}}=\sqrt{\frac{s(s-\alpha)}{\beta\gamma}}.$$

Substituire (2) in (1), so wird:

$$\cos A+\cos B+\cos C=2\left\{\frac{s(s-\alpha)}{\beta\gamma}+\frac{s(s-\beta)}{\alpha\gamma}+\frac{s(s-\gamma)}{\alpha\beta}\right\}-3$$

$$=2s\frac{\alpha(s-\alpha)+\beta(s-\beta)+\gamma(s-\gamma)}{\alpha\beta\gamma}-3$$

$$=2s\frac{(\alpha+\beta+\gamma)s-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}{\alpha\beta\gamma}-3$$

Setzen wir nun im Zähler 2s statt $\alpha+\beta+\gamma$, so ist ferner:

Digitized by Google

$$\cos A+\cos B+\cos C=2s\frac{2s^2-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}{\alpha\beta\gamma}-3$$
$$=2s\frac{2s^2-(\alpha+\beta+\gamma)^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma}{\alpha\beta\gamma}-3$$
$$=2s\frac{2s^2-(2s)^2+2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)}{\alpha\beta\gamma}-3$$
$$=2s\frac{2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)-2s^2}{\alpha\beta\gamma}-3.$$

Nun sollen die Seiten α, β, γ den Wurzeln der Gleichung $x^3-ax^2+bx-c=0$ proportional sein. Heißen diese Wurzeln x_1, x_2, x_3, so muß, wenn m eine beliebige Zahl bedeutet $\alpha=mx_1$, $\beta=mx_2$, $\gamma=mx_3$ sein. Also ist:

$\alpha+\beta+\gamma=m(x_1+x_2+x_3)$; demnach

$\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)=s=\frac{1}{2}m(x_1+x_2+x_3)$.

Bezeichnen wir demnach die Summe der Wurzeln der genannten cubischen Gl. mit S, so ist:

$s=\frac{1}{2}mS$. Ebenso ist:

$\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=m^2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$;

also wenn wir $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=p$ setzen, so ist

$\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=m^2p$. Endlich ist:

$\alpha\beta\gamma=m^3x_1x_2x_3$.

Setzen wir diese Ausdrücke in die obige Formel, so erhalten wir:

$$\cos A+\cos B+\cos C=\frac{mS(2m^2p-\frac{1}{2}m^2S^2)}{m^3x_1x_2x_3}-3$$
$$=\frac{S(4p-S^2)}{2x_1x_2x_3}-3$$

Wenden wir nun den §. 480 auf diese Gleichung an, so ist S die Summe der Wurzeln derselben $=-(-a)=a$ und $p=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$ oder die Summe der Combinationen der Wurzeln zur zweiten Classe $=b$ und endlich das Produkt der Wurzeln $x_1x_2x_3=$ dem Absolutgliede mit entgegengesetztem Zeichen, also $=c$; folglich haben wir nach Substitution dieser Werthe:

$$\cos A+\cos B+\cos C=\frac{a(4b-a^2)}{2c}-3=\frac{1}{2}(4ab-a^3-6c):c.$$

36. Die Linie a sei nach dem innern und äußern Verhältnisse getheilt; es sei x ihr größeres Segment, also $a-x$ das kleinere. Es muß dann x die mittlere Proportionale zwischen a und $a-x$ sein, also: $a:x=x:(a-x)$; folglich: $x^2=a(a-x)$; mithin $x=-\frac{1}{2}a\pm\sqrt{\frac{5a^2}{4}}$. Das untere

Digitized by Google

Zeichen ist nicht zu gebrauchen; also ist $x = {}^1/_2 a(-1+\sqrt{5})$. Dies ist also der größere Theil der Linie a; mithin ist der kleinere $a-x = a-{}^1/_2 a(-1+\sqrt{5}) = {}^1/_2 a(3-\sqrt{5})$. Demnach ist das Verhältniß der beiden Segmente:

$$\frac{x}{a-x} = \frac{{}^1/_2 a(-1+\sqrt{5})}{{}^1/_2 a(3-\sqrt{5})} = \frac{-1+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} = \frac{(-1+\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Der Ausdruck $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ läßt sich nun einfach in einen Kettenbruch verwandeln. Es ist nämlich:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{2+\sqrt{5}-1}{2} = 1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Der letztere Ausdruck $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ist < 1, also ein Bruch.

Setzen wir daher:

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{a'}, \text{ so wird: } a = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Es ist also: $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1+\frac{{}^1/_2}{\sqrt{5}-1} = 1+\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

Hier haben wir im Nenner wieder denselben Ausdruck, von dem wir ausgingen. Substituiren wir daher für ihn den gefundenen Ausdruck, so wird:

$$1+\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}}$$

Fahren wir so fort, indem wir im Nenner wieder den gefundenen Ausdruck substituiren, so haben wir den Satz, daß der Ausdruck $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ sich durch den unendlichen Kettenbruch

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}$$ darstellen läßt.

37. Die aufzulösende Gleichung ist:

$$\sin 2\varphi + 2m = 2\,\mathrm{tang}\,\varphi.$$

Digitized by Google

Wir setzen $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$ und dividiren durch 2, so wird:

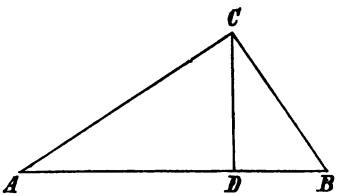
$$\sin\varphi\cos\varphi + m = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \text{ oder:}$$

$$\sin\varphi\cos\varphi^2 + m\cos\varphi = \sin\varphi \text{ oder:}$$

$$m\cos\varphi = \sin\varphi - \sin\varphi\cos\varphi^2 = \sin\varphi(1-\cos\varphi^2) = \sin\varphi^3.$$

Setzen wir $\sqrt{1-\sin\varphi^2}$ statt $\cos\varphi$ und quadriren die Gl., so wird:

$$m^2(1-\sin\varphi^2) = \sin\varphi^6 \text{ oder } \sin\varphi^6 + m^2\sin\varphi^2 - m^2 = 0.$$



38. In dem bei C rechtw. Dreiecke ABC sei $AD+DC=a$, $DB+BC=b$. Ist nun $CD=x$, so ist $AD=a-x$. Ferner sei $DB=y$, so ist $BC=b-y$. Nun ist:

$AD:CD = CD:DB$, d. i.

$(a-x):x = x:y$; also:

(1) $x^2 = y(a-x)$ und

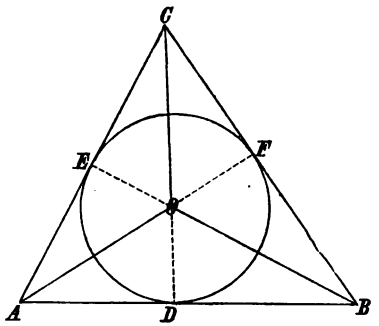
(2) $x^2+y^2 = (b-y)^2$.

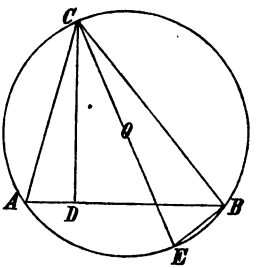
Aus (2) folgt $y = \frac{b^2-x^2}{2b}$. Setze diesen Werth für y in (1), so wird:

$$x^2 = \frac{b^2-x^2}{2b}.(a-x).$$

Entwickelt man diese Gleichung, so erhält man:

$$x^3 - (a+2b)x^2 - b^2x + ab^2 = 0.$$





39. Es sei $BC=x$, $AC=y$, $AB=z$. Nach Nr. 6 und 30 dieses §. ist, wenn wir den Inhalt des Dreiecks ABC allgemein mit J bezeichnen:

Digitized by Google

$J = {}^1/_4\sqrt{(x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z)}$.
Setzt man $x+y+z = 2p$, so ist $x+y-z = 2(p-z)$
$x-y+z = 2(p-y)$, und $-x+y+z = 2(p-x)$; daher ist auch:

$$J = {}^1/_4\sqrt{2p.2(p-x).2(p-y).2(p-z)} \text{ oder:}$$

$$(1)\quad J = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}.$$

Schreibt man jetzt den Kreis um O in das Dreieck ABC ein und zieht die drei Winkel-Halbirungs-Transversalen AO, BO und CO, so wird dadurch das Dreieck ABC in die 3 Dreiecke AOB, AOC und BOC zerlegt. Zieht man überdies in diesen 3 Dreiecken die zugehörigen Höhen DO, FO und EO $= \varrho$, so ist:

$$\triangle AOB + \triangle AOC + \triangle BOC = \triangle ABC \text{ oder:}$$

$${}^1/_2z\varrho + {}^1/_2y\varrho + {}^1/_2x\varrho = {}^1/_2(x+y+z)\varrho = p\varrho; \text{ mithin:}$$

$$(2)\quad \varrho = \frac{J}{p} = \sqrt{\frac{(p-x)(p-y)(p-z)}{p}}.$$

Beschreibt man jetzt um das Dreieck den Kreis um O, dessen Radius $= r$ ist, zieht die Höhe CD und den Durchmesser EC, so sind die Dreiecke ACD und BCE ähnlich und daher verhält sich:

$$AC : CD = CE : BC \text{ oder:}$$
$$y : CD = 2r : x \text{ daher:}$$

$$r = \frac{xy}{2.CD} = \frac{xyz}{2z.CD} = \frac{xyz}{4J}; \text{ mithin:}$$

$$(3)\quad r = \frac{xyz}{4\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}}.$$

Aus (2) folgt: (4) $p\varrho^2 = (p-x)(p-y)(p-z)$
„ (3) : (5) $16pr^2(p-x)(p-y)(p-z) = x^2y^2z^2$.
Setze aus (4) den Werth für $(p-x)(p-y)(p-z)$ in (5), so wird:

$$16p^2r^2\varrho^2 = x^2y^2z^2; \text{ also:}$$
$$(6)\quad 4pr\varrho = xyz.$$

Entwickelt man (4), so hat man:

$$(7)\quad p\varrho^2 = p^3 - (x+y+z)p^2 + (xy+xz+yz)p - xyz.$$

Setze hierin die Werthe für $x+y+z$ und für xyz, so ist, wenn wir die Gl. ordnen und durch p dividiren:

$$(8)\quad xy+xz+yz = p^2+4r\varrho+\varrho^2.$$

Nun ist in $x+y+z = 2p$ die Summe der Wurzeln, in (8) die Summe der Combinationen zur zweiten Classe und in (6) das Produkt der 3 Wurzeln gegeben. Setzen wir

Digitized by Google

hierfür die dort gefundenen Werthe, so geben nach Nr. 20 dieses §. die 3 Wurzeln folgender cubischer Gl. das Maß für die 3 Seiten des Dreiecks, nämlich:

$$x^3 - 2px^2 + (p^2 + 4r\varrho + \varrho^2)x - 4pr\varrho = 0.$$

Ist nun $p = 21$, $r = 8\frac{1}{8}$, $\varrho = 4$, so erhalten wir:

$$x^3 - 42x^2 + 587x - 2730 = 0.$$

Setzt man zur Wegschaffung des zweiten Gliedes $x = y + 14$, so wird:

$$y^3 - y = 0 \text{ oder } y(y^2 - 1) = 0; \text{ folglich:}$$

$$y_1 = 0,\ y_2 = +1,\ y_3 = -1; \text{ daher:}$$

$$x_1 = 14,\ x_2 = 15,\ x_3 = 13.$$

Die 3 Seiten des Dreiecks sind demnach 13, 14, 15.

40. Bezeichnet x die Seite eines in den Kreis beschriebenen regulären n-Ecks, so ist offenbar für den Radius 1:

$\frac{1}{2}x = \sin\frac{180^0}{n}$; also ist für das reguläre Siebeneck:

$\frac{1}{2}x = \sin\frac{180^0}{7}$; daher $x = 2\sin\frac{180^0}{7}$ oder, wenn wir

$\sin\frac{180^0}{7} = \sin z$ setzen, so ist:

$$x = 2\sin z.$$

Um $\sin z$ zu finden, müssen wir uns eine Formel für $\sin 7z$ verschaffen. Nun haben wir für den Sinus der vielfachen Bogen die Gl.:

$$\sin nz = \binom{n}{1}\cos z^{n-1}\sin z - \binom{n}{3}\cos z^{n-3}\sin z^3 +$$

$$\binom{n}{5}\cos z^{n-5}\sin z^5 - \binom{n}{7}\cos z^{n-7}\sin z^7 \ldots.$$

Setzen wir hierin $n = 7$, so wird:

$$\sin 7z = \sin z\{7\cos z^6 - 35\cos z^4\sin z^2 + 21\cos z^2\sin z^4 - \sin z^6\}.$$

Nun ist: $\cos z^2 = 1 - \sin z^2$.

Setzen wir also überall $1 - \sin z^2$ statt $\cos z^2$, so wird:

$$\sin 7z = \sin z\{7(1-\sin z^2)^3 - 35(1-\sin z^2)^2\sin z^2 + 21(1-\sin z^2)\sin z^4 - \sin z^6\}.$$

Entwickeln wir die Gl., so haben wir:

$$\sin 7z = \sin z\{7 - 56\sin z^2 + 112\sin z^4 - 64\sin z^6\}.$$

Weil nun auch $\sin 7z = \sin 7.\frac{180^0}{7} = \sin 180^0 = 0$, so wird:

$$64\sin z^6 - 112\sin z^4 + 56\sin z^2 - 7 = 0.$$

Digitized by Google

Durch Substitution von $\sin z = {}^1/_2 x$, erhalten wir folgende Gleichung: $x^6 - 7x^4 + 14x^2 - 7 = 0$.

Setzt man hierin $x^2 = {}^1/_3(y+7)$, so wird:

$$y^3 - 21y + 7 = 0.$$

Hier ist $p = 21$, $q = 7$ und $4p^3 > 27q^2$; daher nach §. 495. V aufzulösen.

Nun ist: $\sin 3\varepsilon = \frac{3q}{p\sqrt{{}^4/_3 p}} = \frac{3.7}{21\sqrt{{}^4/_3.21}} = \frac{1}{\sqrt{28}}$. Daher:

$$\log\sin 3\varepsilon = 9{,}2764210 - 10$$
$$3\varepsilon = 10^0 53'36''$$
$$\varepsilon = 3^0 37'52''$$
$$60^0 - \varepsilon = 56^0 22'8''$$
$$60^0 + \varepsilon = 63^0 37'52''$$
$$\log\sin\varepsilon = 8{,}8016261 - 10$$
$$\log\sqrt{28} = 0{,}7235790$$

$$\log y_1 = \bar{1}{,}5252051; \text{ also } y_1 = 0{,}3351237$$
$$\log\sin(60^0 - \varepsilon) = 9{,}9204472 - 10$$
$$\log\sqrt{28} = 0{,}7235790$$

$$\log y_2 = 0{,}6440262; \text{ also: } y_2 = 4{,}4058142$$
$$\log\sin(60^0 + \varepsilon) = 9{,}9522852 - 10$$
$$\log\sqrt{28} = 0{,}7235790$$

$$\log(-y_3) = 0{,}6758642: \text{ also } y_3 = -4{,}7409367.$$

Daher: $x^2 = {}^1/_3.7{,}3351237 = 2{,}4450412$; $x_1 = 1{,}5636630$
$x^2 = {}^1/_3.11{,}4058142 = 3{,}8019381$; $x_2 = 1{,}9498533$
$x^2 = {}^1/_3.2{,}2590633 = 0{,}7530211$; $x_3 = 0{,}8677678$.

41. Ist u die Seite eines einem Kreise mit dem Radius 1 eingeschriebenen regulären Neuneks, so ist:

$${}^1/_2 u = \sin\frac{180^0}{9}; \text{ daher } u = 2\sin\frac{180^0}{9} \text{ oder wenn wir}$$

$$\sin\frac{180^0}{9} = \sin z \text{ setzen: } u = 2\sin z.$$

Nun ist nach der vorhergehenden Aufgabe:

$$\sin 9z = \binom{9}{1}\cos z^8\sin z - \binom{9}{3}\cos z^6\sin z^3 +$$
$$\binom{9}{5}\cos z^4\sin z^5 - \binom{9}{7}\cos z^2\sin z^7 + \binom{9}{9}\sin z^9.$$

Setzen wir hierin $\cos z^2 = 1 - \sin z^2$ und entwickeln die Gl., so erhalten wir:

$$\sin 9z = \sin z\{9 - 120\sin z^2 + 432\sin z^4 - 576\sin z^6 + 256\sin z^8\}.$$

Da nun $\sin 9z = \sin 9.\frac{180^0}{9} = 180^0 = 0$, so folgt hieraus, daß auch: $256\sin z^8 - 576\sin z^6 + 432\sin z^4 - 120\sin z^2 + 9 = 0$.

Digitized by Google

Setzt man hierin $\frac{1}{2}u = \sin z$, so erhält man:
$u^6 - 9u^6 + 27u^4 - 30u^2 + 9 = 0$. Setze $u^2 = y$, so wird:
$y^4 - 9y^3 + 27y^2 - 30y + 9 = 0$.
Lösen wir diese Gl. nach der Gräffe'schen Methode §. 512. Nr. 4. (2) auf, so erhalten wir:

1. Potenz $y^4 - 9y^3 + 27y^2 - 30y + 9 = 0$
2. „ $y^4 - 27y^3 + 207y^2 - 414y + 81 = 0$
4. „ $y^4 - 315y^3 + 20655y^2 - 137862y + 6561 = 0$
8. „ $y^4 - 57915y^3 + 339789087y^2 - 18734896134y + 43046721 = 0$
16. „ $y^4 - 2674569051y^3 + 1132865601_{(8)}y^2 - 3509670795_{(11)}y + 1853020188_{(6)} = 0$
32. „ $y^4 - 6926746485_{(9)}y^3 + 1283196730_{(25)}y^2 - 1231778904_{(32)}y + 3433683814_{(21)} = 0$
64. „ $y^4 - 4795415293_{(28)}y^3 + 1646593845_{(59)}y^2 - 1517279263_{(73)}y + 1179018453_{(52)} = 0$.

Drücken wir die Coefficienten der letzten Gl. durch ihre Logarithmen aus, so hat man:
$y^4 - 37{,}6808262y^3 + 68{,}2165862y^2 - 82{,}1810655y + 61{,}0715200 = 0$. Demnach ist:
$\log y_1 = 37{,}6808262 : 64 = 0{,}5887628$; $y_1 = 3{,}8793839$
$\log y_2 = (68{,}2165862 - 37{,}6808262) : 64 = 0{,}4771212$; $y_2 = 3$
$\log y_3 = (82{,}1810655 - 68{,}2165862) : 64 = 0{,}2181949$;
$y_3 = 1{,}6527034$
$\log y_4 = (61{,}0715200 - 82{,}1810655) : 64 = \bar{1}{,}6701634$;
$y_4 = 0{,}4679112$.
Also $u_1 = \sqrt{y_4} = 0{,}6840403$; $u_2 = \sqrt{y_3} = 1{,}2855751$;
$u_3 = \sqrt{y_2} = 1{,}7320508$; $u_4 = \sqrt{y_1} = 1{,}9696151$.
Es ist u_1 die zu $^1/_9$, u_2 die zu $^2/_9$, u_3 die zu $^3/_9$ und u_4 die zu $^4/_9$ der Kreisperipherie gehörige Sehne.

B. Aufgaben aus der Physik und Astronomie.

(Heis §. 108.)

§. 516. 1. Man unterscheidet *absolutes* und *specifisches* Gewicht. Das *absolute* Gewicht eines Körpers ist die Größe seines Druckes auf seine Unterlage und gibt an, in welchem Verhältniß sein Druck zum Drucke gewisser unter dem Namen Gewichte vorkommender Körper steht. Das *specifische* Gewicht gibt das Verhältniß seines absoluten Gewichtes zu dem eines andern Körpers von *gleichem* Volumen an. Es ist allgemein gebräuchlich, das Gewicht

Digitized by Google

des sich zu diesem Zwecke vorzugsweise eignenden reinen Wassers bei 4°C als Einheit anzunehmen und damit das Gewicht der anderen Körper zu vergleichen. Um zu zeigen, wie das absolute, das specifische Gewicht und das Volumen eines Körpers von einander abhangen, nehmen wir an, es sei das absolute Gewicht = P, sein Volumen = V und sein specifisches Gewicht = S, wobei P in Kilogramm oder Gramm und V bezüglich in Kubikdecimeter oder Kubikcentimeter angegeben ist, und so viele Kilogramm oder Gramm P wiegt, so viele Kubikdecimeter oder Kubikcentimeter enthält V. Demnach ist in Bezug auf das Wasser:

$$P = V.$$

Aus der Erklärung des specifischen Gewichtes eines Körpers folgt, daß ein Körper, dessen specifisches Gewicht 2, 3, 4... n mal so groß ist, als das des Wassers, ebenfalls bei gleichem Volumen 2, 3, 4 ... n mal so viel wiegt. Demnach geht die Formel $P = V$ für jeden andern Körper als Wasser über in: $P = VS$,

d. h. das Gewicht eines Körpers ist gleich dem Produkte aus seinem Volumen in sein specifisches Gewicht. Weil nun:

(1) $P = VS$, so folgt hieraus:
(2) $V = P : S$ und:
(3) $S = P : V$.

Wenn also die absoluten Gewichte zweier Körper P und p, ihre Volumina V und v, ihre specifischen Gewichte S und s sind, so ist das absolute Gewicht ihrer Mischung $= P+p$ und ihr Volumen $= V+v$. Setzen wir daher in Formel (3) $P+p$ statt P und $V+v$ statt V, so erhalten wir, wenn wir das specifische Gewicht der Mischung mit S_1 bezeichnen:

$$(4)\quad S_1 = \frac{P+p}{V+v}.$$

Nach Formel (1) ist aber $P+p = VS+vs$; daher ist, wenn wir diesen Werth in (4) einsetzen:

$$S_1 = \frac{VS+vs}{V+v}.$$

2. Das Volumen des Sauerstoffgases $V = 21$, sein specifisches Gewicht $S = 1{,}1026$, das Volumen des Stickgases $v = 79$ ist gegeben, sein specifisches Gewicht s wird gesucht. Diese beiden Gase bilden die atmosphärische Luft; ihr Volumen ist: $(1)\quad V_1 = V+v.$

Bezeichnen wir ihr specifisches Gewicht mit S_1, so ist nach der vorhergehenden Aufgabe:

Digitized by Google

$$(2)\ S_1 = \frac{VS+vs}{V+v}.$$

Setzen wir aus (1) die Werthe für v und für V+v in (2) so wird:

$$(3)\ S_1 = \frac{VS+s(V_1-V)}{V_1} \text{ oder:}$$

$$S_1V_1 = VS+s(V_1-V); \text{ folglich:}$$

$$s = (S_1V_1 - VS) : (V_1 - V).$$

Substituiren wir hierin die angegebenen Werthe für V, V_1 und S_1, so wird, da überdies das specifische Gewicht der atmosphärischen Luft als Einheit angenommen wird, also $S_1 = 1$ ist:

$$s = \frac{1.100-21.1,1026}{100-21} = \frac{76,8454}{79} = 0,97272.$$

3. Hier sind statt der Volumina die absoluten Gewichte der beiden Körper, nämlich P uud p gegeben. Nun ergibt sich aus Aufg. 1, Gl. (2), daß $V = P : S$ und $v = p : s$.

Setzen wir diese Werthe für V und v in den dort für S_1 gefundenen Ausdruck, so wird, wenn auch hier S_1 das specif. Gew. der Mischung bezeichnet:

$$S_1 = \frac{P+p}{(P:S)+(p:s)} = \frac{(P+p)Ss}{Ps+pS}.$$

4. Hier ist $P = 9$, $p = 1$, $S = 10,474$, $s = 8,788$; folglich ist nach Aufgabe 3:

$$S_1 = \frac{(9+1).10,474.8,788}{9.8,788+1.10,474} = \frac{920,45512}{89,566} = 10,277.$$

Zweite Aufl. Wir können uns die Bestandtheile eines Markstückes statt in der Mischung auch als getrennt neben einander liegend vorstellen, wodurch weder am absoluten Gew. noch am specif. Gew. etwas geändert wird, also 9 Gewichtstheile Silber (S) und 1 Gewichtstheil Kupfer (K). Ein Gewichtstheil S hat aber nicht dasselbe Volumen, wie ein Gewichtstheil K, sondern weil S specifisch schwerer ist, ein kleineres Volumen und zwar nach dem Begriff vom specif. Gew. beziehungsweise nach den Angaben verhält sich:

$$S : K = 10,474 : 8,758; \text{ daher:}$$

$$8,758\,S = 10,474\,K; \text{ folglich: } K = \frac{8,758}{10,474}S = 0,836\,S, \text{ d. h.}$$

1 Gewichtstheil S hat nur 0,836 Vol. eines gleichen Gewichtstheiles K, die 9 vorhandenen Gewichstheile S also $9 \times 0,836$

Digitized by Google

$= 7{,}524$ Vol. S haben daſſelbe Gewicht, wie 9 gleich große Vol. K. Es iſt aber ſchon 1 Vol. K in der Miſchung, alſo $7{,}524+1 = 8{,}524$ Vol. K wiegen daſſelbe, wie 10 Vol. K. Nun hat 1 Vol. $K = 8{,}758$, die 10 Vol. $K = 87{,}58$ ſpecif. Gew. Es ſind aber nicht 10 Vol. ſondern nur 8,524 Vol.; dieſe haben alſo auch nur $\frac{87{,}58}{8{,}524} = 10{,}277$ ſpecif. Gew.

5. Das abſolute Gewicht der Miſchung beider Körper iſt $= m$, ihr ſpecif. Gew. $= e$. Iſt das abſolute Gewicht des einen Körpers $= p$ und ſein ſpecif. Gew. $= s$, ſo iſt das abſolute Gew. des andern $= m - p$ und deſſen ſpecif. Gew. ſei $= S_1$ welches geſucht werden ſoll. Da nun das ſpecif. Gew. der Miſchung $= e$ iſt, ſo muß e dem für S_1 in Aufg. 3 gefundenen Ausdruck gleich ſein; es iſt alſo:

$$e = \{(P+p)sS\} : \{Ps+pS\}.$$

Nun iſt $P+p = m$ und $Ps = (m-p)s$; ſetzen wir dieſe Werthe ein, ſo wird:

$$e = \frac{msS}{(m-p)s+pS} \text{ oder:}$$

$$es(m-p) = S(ms-ep); \text{ alſo: } S = \frac{es(m-p)}{ms-ep}.$$

6. Aus dem ſpecif. Gewichte der Miſchung $= e$ und dem ſpecif. Gew. S und s der beiden mit einander verbundenen Körper ſollen die abſoluten Gewichte P und p geſucht werden. Nun iſt nach Aufgabe 5:

$$e = \{(P+p)sS\} : \{Ps+pS\}.$$

Entwickeln wir dieſe Gl., ſo haben wir:

$Ps(e-S) = pS(s-e)$; hieraus folgt nach §. 225:

$$P : p = S(s-e) : s(e-S).$$

Mithin müſſen die beiden Körper in dem Gewichtsverhältniſſe $S(s-e) : s(e-S)$ mit einander verbunden werden.

7. Die Krone habe x Pfd. Silber enthalten, ſo enthielt ſie $20 - x$ Pfd. Gold. Hatte die Krone das ſpecif. Gew. 16, ſo iſt ſie 16 mal ſchwerer, als ein gleiches Volumen Waſſer und verliert mithin, wenn man ſie im Waſſer wiegt, $1/16$ ihres Gewichtes, alſo $1/16 . 20 = 1\,1/4$ Pfd. Dieſer Gewichtsverluſt bei der Abwägung im Waſſer iſt aber zuſammengeſetzt aus den Gewichtsverluſten, die das Gold und das Silber einzeln erleiden. Da das ſpecif. Gew. des Silbers 10,47 iſt, ſo verliert es im Waſſer $\frac{1}{10{,}47}$ ſeines Gewichtes, alſo verlieren x Pfd. $\frac{x}{10{,}47}$

Digitized by Google

Pfd. Das Gold, dessen specif. Gew. 19,25 ist, verliert $\frac{1}{19,25}$ seines Gewichtes, also 20—x Pfd. verlieren $\frac{20-x}{19,25}$ Pfd. Da beide Gewichtsverluste zusammen den Gewichtsverlust der Krone bilden, so ist:

$$\frac{x}{10,47} + \frac{20-x}{19,25} = 1\frac{1}{4};$$ hieraus erhält man:

$8,78x = 42,534375$, also $x = 4^{11863}/_{14048}$ Pfd. Silber,

daher wog das Gold $20 - 4^{11863}/_{14048} = 15^{2185}/_{14048}$ Pfd.

Zweite Aufl. Man kann das Resultat dieser Aufgabe auch aus dem der vorhergehenden ableiten, wenn man e = 16, S=19,25, s=10,47, P=x Pfd. Gold und p=20—x Pfd. Silber setzt. Alsdann ist:

$$x : (20-x) = 19,25(10,47-16) : 10,47(16-19,25)$$
$$= 106,4525 : 34,0275$$
$$= 4,2581 : 1,3611;$$ daher:

$56192x = 851620$; also $x = 15^{2185}/_{14048}$ Pfd. u. s. w.

8. Der Hebel ist ein unbiegsamer, um einen festen Punkt beweglicher Körper, auf welchen Kräfte wirken, die ihn nach entgegengesetzten Richtungen zu drehen streben. Denkt man sich den Körper ohne Gewicht, also als Linie im Raume, so heißt der Hebel ein mathematischer, andernfalls ein physischer. Die beiden auf ihn wirkenden Kräfte nennt man Kraft und Last. Bei jedem Hebel gibt es drei merkwürdige Punkte: der Unterstützungspunkt, der Drehpunkt und die Angriffspunkte der Kraft und Last. Liegt der Drehpunkt außerhalb der Angriffspunkte der Kräfte, so ist es ein einarmiger; liegt derselbe aber zwischen diesen Kräften, so ist es ein zweiarmiger. Bei allen Arten von Hebeln gilt das Gleichgewichtsgesetz: „Der Hebel ist im Gleichgewicht, wenn die statischen Momente, d. h. die Produkte aus den Kräften und ihren Entfernungen vom Unterstützungspunkte einander gleich sind."

Da 4+3+2 = 9 Pfd. aufwärts und 6 + 5 + 1 = 12 Pfd. abwärts wirken, so müssen zur Erzeugung des Gleichgewichtes noch weitere 3 Pfd. selbstverständlich nach aufwärts wirkend irgendwo angebracht werden. Nun wirken:

Nach abwärts:

6 Pfd. auf 0 cm Entfernung, also statisches Moment $6 \times 0 = 0$
5 „ „ 5 cm „ „ „ „ $5 \times 5 = 25$
1 „ „ 22 cm „ „ „ „ $1 \times 22 = 22$

Digitized by Google

Nach aufwärts:

4 Pfd. auf 3 cm Entfernung, also statisches Moment $3\times 4=12$
3 „ „ 9 cm „ „ „ „ $3\times 9=27$
2 „ „ 15 cm „ „ „ „ $2\times 15=30$

Die Summe der abwärts und rechts hin wirkenden Kräfte beträgt hiernach 47 und die Summe der aufwärts wirkenden Kräfte 69; mithin übersteigt diese Summe jene um

$$69-47=22;$$

die erwähnten 3 Pfd. sind also links von a in solcher Entfernung anzubringen, daß das statische Moment $=22$ ist. Es sei nun x diese Entfernung, alsdann haben wir:

$$3x=22;\ \text{also}\ x=7\tfrac{1}{3}.$$

9. A D C B

In C liege der Schwerpunkt des Stabes. Falls nun das Gewicht $p>q$, zerfällt der Hebel AB in zwei ungleiche Arme, etwa in AD und BD. Dadurch kommt der Unterstützungspunkt des Hebels in D zu liegen und der Schwerpunkt in den Arm BD. Nun sei $AD=x$ und $DB=AB-AD=l-x$; dann ist $DC=BD-BC=l-x-\frac{1}{2}l=\frac{1}{2}l-x$. Weil das Gewicht des Hebels mitberücksichtigt, also als wirkende Kraft angenommen wird, so ist unter Voraussetzung, daß die statischen Momente einander gleich sind:

$$px=q(l-x)+s(\tfrac{1}{2}l-x)\ \text{oder:}$$
$$(p+q+s)x=l(q+\tfrac{1}{2}s);\ \text{also:}$$
$$x=l(q+\tfrac{1}{2}s):(p+q+s)\ \text{und}$$
$$l-x=l-\frac{l(q+\frac{1}{2}s)}{p+q+s}=l(p+\tfrac{1}{2}s):(p+q+s).$$

10. Die gesuchte Länge des Hebels sei x; folglich sein Gewicht $=mx$. Dies Gewicht kann man sich im Schwerpunkt, der um $\frac{1}{2}x$ vom Stützpunkt entfernt ist, angebracht denken. Soll nun durch die Last q und das Gewicht des Hebels mx mit der auf den Hebel senkrecht wirkenden Kraft p das Gleichgewicht hergestellt werden, so ist mit Rücksicht auf die Gleichheit der statischen Momente:

$$aq+\tfrac{1}{2}x.mx=px\ \text{oder:}$$
$$x^2-\frac{2p}{m}x=-\frac{2aq}{m};\ \text{daher:}$$
$$\left(x-\frac{p}{m}\right)^2=\frac{p^2-2amq}{m^2};\ \text{mithin}\ x=\frac{p\pm\sqrt{p^2-2amq}}{m}.$$

Ist z. B. $p=12k$, $q=15k$, $m=4k$, $a=0{,}9m$, so ist:

Digitized by Google

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 2.0,9.4.15}}{4} = \frac{12 \pm 6}{4}; \text{ daher:}$$

$$x_1 = 4,5\text{m}; \; x_2 = 1,5\text{m}.$$

11. α) Eine Methode, um das wahre Gewicht eines Körpers zu ermitteln, besteht darin, daß man den abzuwägenden Körper abwechselnd in die eine und in die andere Wagschale legt und aus den jedesmal erhaltenen Resultaten das gesuchte Gewicht durch Rechnung bestimmt. Bezeichnen wir die beiden Arme der Wage mit a und b und die abwechselnd in die eine und andere Wagschale gelegte Last mit x, so ist für den Zustand des Gleichgewichts:

$$ax = bp$$
$$bx = aP. \text{ Hieraus folgt:}$$
$$abx^2 = abpP \text{ oder:}$$
$$x^2 = pP; \text{ daher } x = \sqrt{pP}.$$

11. β) Nach §. 375. b. Nr. 53 (1) ist $\sqrt{pP} < {}^1/_2(p+P)$.

12. Die Räume vom Anfange des Falles an gerechnet, oder die Räume der ganzen Zeiten nehmen nach den Fallgesetzen zu, wie die Quadrate der Zeiten, also wie 1, 4, 9, 16 u. s. w. Heißt nun der Fallraum der ersten Sekunde ${}^1/_2g$, so durchfällt ein freifallender Körper in 1, 2, 3, 4 ... t Sekunden bezüglich die Räume ${}^1/_2g$, $4.{}^1/_2g$, $9.{}^1/_2g$... $t^2.{}^1/_2g$ oder ${}^1/_2gt^2$. Bezeichnet h den Fallraum in t Sekunden, so ist:

$$h = {}^1/_2gt^2; \text{ daher } t = \sqrt{h : {}^1/_2g}.$$

Nun ist:

$g = 9,808\text{m}$, also ${}^1/_2g = 4,904\text{m}$ und $h = 320,72\text{m}$; daher gebraucht der Stein:

$$t = \sqrt{320,72 : 4,904} = 8,087 \text{ Sekunden},$$

um den Boden zu erreichen.

13. α) Die Räume, welche ein freifallender Körper durchfällt, wachsen für jeden folgenden Zeittheil, wie die ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7 u. s. w. Nun findet man nach den Gesetzen über die Wurfbewegung die Räume, die ein senkrecht abwärts geworfener Körper in den bestimmten Zeiten zurücklegt, indem man zu den vermöge der Schwerkraft zurückgelegten Räumen noch diejenigen, welche er durch die Wurfkraft fällt, hinzuaddirt. Gibt also die Wurfkraft dem Körper eine Geschwindigkeit von c Fuß, so fällt er:

Digitized by Google

in der 1. Sekunde $1.\frac{1}{2}g+c$
" " 2. " $3.\frac{1}{2}g+c$
" " 3. " $5.\frac{1}{2}g+c$
. . . . . .
. . . . . .
" " t. " $(2t-1).\frac{1}{2}g+c$; daher:
in 2 Sekunden $4.\frac{1}{2}g+2c$
" 3 " $9.\frac{1}{2}g+3c$
" t " $t^2.\frac{1}{2}g+tc$.

Da nun der Fallraum $= s$ ist, so haben wir:

$$\frac{1}{2}gt^2+ct=s \text{ oder } t^2+\frac{2c}{g}t=\frac{2s}{g}.$$

Hieraus folgt: $t=\{\sqrt{c^2+2gs}-c\}:g$ Sekunden.

13. β) Da die Bewegung des senkrecht aufwärts geworfenen Körpers grade das Entgegengesetzte von der Bewegung des senkrecht abwärts geworfenen Körpers ist, so haben wir jetzt: $ct-\frac{1}{2}gt^2=s$ oder $t^2-\frac{2c}{g}t=-\frac{2s}{g}$; also:

$$t=\{c\mp\sqrt{c^2-2gs}\}:g \text{ Sekunden.}$$

In diesem Ausdruck für t gilt das obere Zeichen für die Zeit des Steigens und das untere für die Zeit des Herabfallens.

14. Bezeichnet g die nach Verlauf einer Sekunde von einem freifallenden Körper erlangte Geschwindigkeit und c seine Geschwindigkeit nach t Sekunden, so ist, weil die Geschwindigkeiten den Zeiten proportional sind:

$c:g=t:1$; also $c=gt$ und daraus:

(1) $t=c:g$.

Nun ist der Fallraum von t Sekunden oder $h=\frac{1}{2}gt^2$. Substituirt man hierin aus (1) den Werth für t, so erhält man:

$$(2)\quad h=\frac{1}{2}g.\frac{c^2}{g^2}=\frac{c^2}{2g}.$$

Es wird aber die Kanonenkugel mit einer Geschwindigkeit von $c=490{,}4$m senkrecht in die Höhe geschossen; daher ist, wenn wir diesen Werth in (1) und (2) einsetzen:

(1) $t=490{,}4:9{,}808=50$ Sekunden,

$$(2)\quad h=\frac{490{,}4^2}{2.9{,}808}=\frac{240492{,}16}{19{,}616}=12260\text{m}.$$

15. α) Wenn man den in einen Brunnen hinabgeworfenen Stein nach t Sekunden anschlagen hört, so setzt sich diese Zeit zusammen aus der Zeit, die der Stein gebraucht, um bis zur

Digitized by Google

Oberfläche des Wassers zu gelangen, und aus der Zeit, die der Schall nöthig hat, um bis zu unserem Ohre zu gelangen. Nennen wir den Fallraum h, so ist, weil bekanntlich $h = {}^1/_2 gt^2$, auch:

$$t = \sqrt{2h : g}.$$

Dies ist also die Zeit, welche der Stein zum Fallen gebraucht. Um die Zeit zu finden, die der Schall gebraucht, erwäge man, daß die Geschwindigkeit des Schalles $= s$, d. h. der Schall legt in 1 Sekunde den Raum s zurück, also den Raum h in $h : s$ Sekunden. Daher haben wir zur Bestimmnng von h folgende Gl.:

$$t = \sqrt{2h : g} + (h : s).$$

Entwickeln wir diese Gl., so wird:

$$h^2 - 2h\frac{s(gt+s)}{g} + t^2 s^2 = 0: \text{ daher:}$$

$$h = s\{(gt+s) - \sqrt{2gst+s^2}\} : g$$

15. β) Mit Bezug auf α) haben wir, wenn in dem dort für h gefundenen Ausdruck $t = 25$, $s = 340{,}18$ gesetzt wird:

$$h = 340{,}18.\{(9{,}808.25 + 340{,}18) - \sqrt{2.9{,}808.340{,}18.25 + 340{,}18^2}\} : 9{,}808$$
$$= 340{,}18.\{585{,}38 - \sqrt{166824{,}272 + 115722{,}4324}\} : 9{,}808$$
$$= 340{,}18.\{585{,}38 - 531{,}551\} : 9{,}808$$
$$= 18311{,}54922 : 9{,}808 = 1867\text{m}.$$

16. Hätte der Stein den umgekehrten Weg, nämlich von der Erde aus bis zu dem Orte seiner Zerplatzung, gemacht, so wäre diese Aufgabe nicht verschieden von der vorigen. Da aber die Zerplatzung beim Beginne seines Herabfallens stattfindet, so besteht die Zeit t nicht aus der Summe, sondern aus der Differenz der Zeitabschnitte $\sqrt{2h : g}$ und $(h : s)$. Daher ist:

$$t = \sqrt{2h : g} - (h : s); \text{ also:}$$

$$h^2 - 2sh\frac{s - gt}{g} + t^2 s^2 = 0; \text{ folglich:}$$

$$h = s\{(s - gt) \pm \sqrt{s(s - 2gt}\} : g.$$

Für $t = 3$, $s = 340{,}18$ wird:

$$h = 340{,}18.\{310{,}756 \pm \sqrt{95703{,}51976}\} : 9{,}808$$
$$= 340{,}18.(310{,}756 \pm 309{,}359) : 9{,}808; \text{ daher:}$$
$$h_1 = 210950{,}72070 : 9{,}808 = 21508\text{m}$$
$$h_2 = 475{,}23146 : 9{,}808 = 48{,}42\text{m}.$$

Der Werth für h_1 ist unbrauchbar, weil der Körper einen solchen Raum in 3 Sekunden nicht durchfallen kann.

Digitized by Google

Zweite Aufl. Der schnellere Schall gelangt früher zur Erde, als der fallende Körper. Angenommen, die senkrechte Entfernung zwischen Erde und Zerplatzungsstelle sei x Meter. Der Schall durcheilt mit gleichmäßiger Geschwindigkeit in 1 Sekunde s Meter, also die x Meter in x : s Sekunden. Während dieser Zeit fällt aber auch schon der Stein und noch t Sekunden länger, bis er zur Erde gelangt, also fällt der Stein zusammen (x : s)+t Sekunden. Nach den bekannten Fallgesetzen (Aufgabe 12) ist der ganze zurückgelegte Raum:

$$\left(\frac{x}{s}+t\right)^2 . {}^1/_2 g \text{; folglich ist:}$$

$$\left(\frac{x}{s}+t\right)^2 . {}^1/_2 g = x \text{; daher: } x^2 - 2sx\frac{s-gt}{g} + t^2 s^2 = 0 \text{; also:}$$

$$x = s\{(s-gt) \pm \sqrt{s(s-2gt)}\} : g \text{ wie oben.}$$

17. Die Gesetze des freien Falles der Körper finden ebenfalls ihre Anwendung auf den Fall derselben auf der schiefen Ebene. Es kommt dabei nur darauf an, für jede schiefe Ebene den Fallraum der ersten Sekunde zu finden. Bezeichnen wir diesen Fallraum mit G, die Höhe der schiefen Ebene mit h, die Länge derselben mit x, so ist:

$$G : {}^1/_2 g = h : x \text{; also: } G = {}^1/_2 g\frac{h}{x}.$$

Setzen wir in die bei Aufgabe 13 für den Fallraum eines freifallenden Körpers in t Sekunden entwickelte Formel c=n, ferner $^1/_2 g\frac{h}{x}$ statt $^1/_2 g$ und s=x, so erhalten wir:

$$x = {}^1/_2 g t^2 \frac{h}{x} + nt.$$

Nun ist bekanntlich für den freifallenden Körper $t = \sqrt{2h : g}$. Setzen wir diesen Werth für t in die erhaltene Gl., so wird:

$$x = \frac{h^2}{x} + n\sqrt{2h : g} \text{ oder } x^2 - nx\sqrt{2h : g} = h^2 \text{; hieraus folgt:}$$

$$\{x - {}^1/_2 n\sqrt{2h : g}\}^2 = \frac{h}{2g} . (n^2 + 2gh) \text{; daher}$$

$$x = {}^1/_2 n\sqrt{2h : g} + \sqrt{h : 2g} . \sqrt{n^2 + 2gh}$$
$$= n\sqrt{h : 2g} + \sqrt{h : 2g} . \sqrt{n^2 + 2gh}$$
$$= (n + \sqrt{n^2 + 2gh}) . \sqrt{h : 2g}.$$

18. Angenommen, die Anfangsgeschwindigkeit des auf der schiefen Ebene N aufwärts sich hinaufbewegenden Körpers sei = x, so ist mit Bezug auf Aufgabe 13. β) und Aufg. 17:

$$(1)\ m = ct - {}^1/_2 g t^2 \frac{h}{m}; \quad (2)\ n = tx - {}^1/_2 g t^2 \frac{h}{n}.$$

Digitized by Google

Entwickelt man die beiden Gleichungen, so erhält man:
(3) $2m^2 = t(2cm - ght)$; (4) $2n^2 = t(2nx - ght)$
Stelle aus (2) und (4) die Werthe für t einander gleich, so hat man:

$$\frac{m^2}{2cm - ght} = \frac{n^2}{2nx - ght}.$$

Entwickele diese Gl. und bestimme t, so wird:

$$t = \frac{2mn(mx - cn)}{gh(m^2 - n^2)}; \text{ also } t^2 = \frac{4m^2n^2(mx - cn)^2}{g^2h^2(m^2 - n^2)^2}.$$

Setze die Werthe für t und t^2 in (3), so erhält man:

$$2m^2 = \frac{4m^2nc(mx - cn)}{gh(m^2 - n^2)} - \frac{4m^2n^2(mx - cn)^2}{gh(m^2 - n^2)^2}; \text{ oder}$$

$$2gh(m^2 - n^2)^2 = 4cn(mx - cn)(m^2 - n^2) - 4n^2(mx - cn)^2;$$
$$2n^2(mx - cn)^2 - 2cn(mx - cn)(m^2 - n^2) = -gh(m^2 - n^2)^2;$$
$$2m^2n^2x^2 - 2mncx(m^2 + n^2) = -2m^2n^2c^2 - gh(m^2 - n^2)^2;$$

$$\left\{x - \frac{c(m^2 + n^2)}{2mn}\right\}^2 = \frac{c^2(m^2 + n^2)^2 - 4m^2n^2c^2 - 2gh(m^2 - n^2)^2}{4m^2n^2}$$

$$= \left(\frac{m^2 - n^2}{2mn}\right)^2 \cdot (c^2 - 2gh); \text{ folglich}$$

$$x = \frac{c(m^2 + n^2) \pm (m^2 - n^2)\sqrt{c^2 - 2gh}}{2mn}.$$

Setzt man $m = 40$, $n = 30$, $h = 24$, $c = 25$, $g = 9{,}808$, so wird:

$$x = 25 \cdot \frac{40^2 + 30^2}{2 \cdot 40 \cdot 30} \pm \frac{40^2 - 30^2}{2 \cdot 40 \cdot 30}\sqrt{25^2 - 2 \cdot 9{,}808 \cdot 24}$$

$$= \frac{62500 \pm 700 \cdot 12{,}418}{2400}; \text{ daher}$$

$$x_1 = \frac{71192{,}6}{2400} = 29{,}66\text{m}; \quad x_2 = \frac{53807{,}4}{2400} = 22{,}42\text{m}.$$

19. Sind M und m die Massen, C und c die Geschwindigkeiten, also MC und mc die Bewegungsquantitäten oder Bewegungsmomente, so erfolgt, wenn sie sich einander begegnen, Ruhe oder Bewegung, je nachdem $MC = mc$ oder $MC > mc$ ist. In letzterem Falle vernichtet zuerst beim Zusammentreffen mc in MC so viel, als es selbst beträgt, und die Masse M behält noch als Größe der Bewegung $MC - mc$, mit welcher sie auf die vor ihr liegende Masse m wirkt und sie fortschiebt, wodurch ihre Geschwindigkeit kleiner wird. Heißt nun die Geschwindigkeit der Gesammtmasse $M+m$ etwa x, so ist ihre Quantität der Bewegung $=(M+m)x$ und es ist daher:

Digitized by Google

$$(M+m)x = MC - mc; \text{ folglich}$$
$$x = \frac{MC-mc}{M+m}.$$

Setzen wir hierin $c = y$ und $x = c'$, so wird:

$$c' = \frac{MC-my}{M+m}; \text{ mithin}$$
$$y = \frac{M(C-c')-mc'}{m}.$$

20. Aus den Gesetzen über den Stoß elastischer Körper ergibt sich, daß bei einem solchen Stoße nicht nur die Summe der Bewegungsmomente, sondern auch die Summe der lebenden Kräfte, d. h. derjenigen Kräfte, die ein in Bewegung befindlicher Körper einem andern mittheilt, — unverändert bleibt, und daß die Veränderung der Geschwindigkeit jedes Körpers hier doppelt so groß ist, als beim Stoße unelastischer Körper. Nun seien die Geschwindigkeiten beider Körper vor dem Stoße x und y. Bei dem Stoße unelastischer Körper erleidet der erste eine Geschwindigkeitsveränderung von

$$x - \frac{mx+My}{m+M} = \frac{M(x-y)}{m+M} \text{ und der zweite}$$
$$y - \frac{mx+My}{m+M} = \frac{m(y-x)}{m+M}.$$

Da nun die Geschwindigkeiten nach dem Stoße bezüglich g und G sind, so ist:

$$(1)\ g = x - \frac{2M(x-y)}{m+M}$$
$$(2)\ G = y - \frac{2m(y-x)}{m+M}.$$

Die Differenz zwischen diesen beiden Gleichungen gibt:

$$(3)\ G - g = x - y.$$

Setzt man diesen Werth für $x - y$ in (1) und (2), so wird:

$$g = x - \frac{2M(G-g)}{m+M}; \text{ also } x = \frac{2GM-g(M-m)}{m+M};$$
$$G = y - \frac{2m(g-G)}{m+M}; \text{ also } y = \frac{2gm+G(M-m)}{m+M}.$$

21. Wenn die Massen der Kugeln M, N, P, Q u. s. w. eine geometrische Reihe bilden, so ist der Exponent $\frac{N}{M}$ und daher heißen die Massen auch

$$M,\ N,\ (P=)\ N\frac{N}{M},\ (Q=)\ N\frac{N^2}{M} \text{ u. s. w.}$$

Digitized by Google

Da jede folgende Kugel erst von der vorhergehenden in Bewegung gesetzt wird, so ist, wenn wir die Geschwindigkeiten nach dem Stoße von der zweiten Kugel an bezüglich mit $c_1, c_2, c_3 \ldots c_{n-1}$ bezeichnen:

$$\begin{aligned} c_1(M+N) &= c \,.\, 2M \text{ oder } c_1 : c = 2M : (M+N) \\ c_2(M+N) &= c_1 \,.\, 2M \quad " \quad c_2 : c_1 = 2M : (M+N) \\ c_3(M+N) &= c_2 \,.\, 2M \quad " \quad c_3 : c_2 = 2M : (M+N) \\ &\cdots \quad " \quad \cdots \\ &\cdots \quad " \quad \cdots \\ &\cdots \quad " \quad \cdots \end{aligned}$$

$$c_{n-1}(M+N) = c_{n-2} \,.\, 2M \text{ oder } c_{n-1} : c_{n-2} = 2M : (M+N).$$

Setzen wir diese Proportionen zusammen (§. 237), so erhalten wir:

$$(c_1 \,.\, c_2 \,.\, \ldots c_{n-2} \,.\, c_{n-1}) : (c \,.\, c_1 \ldots c_{n-2}) = (2M)^{n-1} : (M+N)^{n-1} \text{ oder}$$

$$c_{n-1} : c = (2M)^{n-1} : (M+N)^{n-1}; \text{ daher}$$

$$c_{n-1} = c\left(\frac{2M}{M+N}\right)^{n-1}$$

Dieses ist auch das letzte Glied einer geometrischen Progression, deren erstes Glied $= c$, deren Exponent $= \frac{2M}{M+N}$ und deren Gliederzahl $= n$ ist. (Vgl. §. 414).

Ist nun $N = {}^1/_2M$, $c = 1$, $n = 100$, so ist

$c_{n-1} = c\left(\frac{2M}{M+N}\right)^{n-1} = 1 \,.\, ({}^4/_3)^{99}$. Vermittelst Logarithmen ist daher

$$\log c_{n-1} = 99(\log 4 - \log 3) = 12{,}3689313;$$

$$c_{n-1} = 2338500000000.$$

22. Die Auflösung dieser Aufgabe ist in der Beispielsammlung selbst gegeben.

23. Angenommen, der ins Wasser einsinkende Kugelabschnitt habe zur Höhe h, dann ist für den Radius r der Inhalt desselben $= {}^1/_3\pi h^2(3r-h)$. Nun ist das specifische Gewicht der Kugel $= 0{,}6$, mithin ist die Kugel nur 0,6mal so schwer, als ein gleiches Volumen Wasser, woraus folgt, daß das Volumen des einsinkenden Abschnittes nur 0,6 des Volumens der ganzen Kugel $= {}^4/_3r^3\pi$ ist; mithin haben wir:

$${}^1/_3\pi h^2(3r - h) = 0{,}6 \,.\, {}^4/_3r^3\pi \text{ oder}$$

$$h^3 - 3rh^2 + 2{,}4r^3 = 0 \text{ oder für } r = 10 \text{ gesetzt:}$$

$$h^3 - 30h^2 + 2400 = 0.$$

Setzen wir zur Fortschaffung des zweiten Gliedes (§. 484) $h = h_1 + 10$, so wird:

$$h_1{}^3 - 300h_1 + 400 = 0.$$

Digitized by Google

Lösen wir diese Gleichung nach §. 495 V auf, so wird:

$$\sin 3\varepsilon = {}^1/_5; \text{ also}$$
$$\log \sin 3\varepsilon = 9{,}3010300 - 10$$
$$3\varepsilon = 11^0 32' 13''$$
$$\varepsilon = 3^0 50' 44{,}3''$$
$$\log \sin \varepsilon = 8{,}8265196 - 10$$
$$\log \sqrt{{}^4/_3 p} = 1{,}3010300$$
$$\log h_1 = 0{,}1275496$$
$$h_1 = 1{,}34137; \text{ also } h = 11{,}34137.$$

24. Der Radius der aus Eisen verfertigten hohlen Kugel sei r Centimeter, alsdann ist ihr äußeres Volumen $= {}^4/_3 r^3 \pi$. Der hohle von Eisen umschlossene kugelförmige Raum, also ihr inneres Volumen ist, weil die Wanddicke 1 Centimeter beträgt $= {}^4/_3 \pi (r-1)^3$, mithin ist das Volumen des Eisens $= {}^4/_3 \pi \{r^3 - (r-1)^3\}$.

Wiegt nun das Volumen 1 des Wassers 1, so wiegt das Volumen des Eisens 7,5; mithin wiegt das Volumen Eisen ${}^4/_3 \pi \{r^3 - (r-1)^3\} \times 7{,}5$. Soll also die Kugel schwimmen, so muß sein:

$${}^4/_3 \pi \{r^3 - (r-1)^3\} \times 7{,}5 = {}^4/_3 \pi r^3 \text{ oder}$$
$$\{r^3 - (r-1)^3\} \times 7{,}5 = r^3 \text{ oder}$$
$$r^3 - 22{,}5r^2 + 22{,}5r - 7{,}5 = 0$$

Zur Fortschaffung des zweiten Gliedes setze $r = r_1 + 7{,}5$, so wird:

$$r_1^3 - 146{,}25 r_1 - 682{,}5 = 0.$$

Hier ist $p = 146{,}25$, $q = 682{,}5$; daher ist nach der Cardanischen Formel (§. 487).

$$r_1 = \sqrt[3]{341{,}25 \pm \sqrt{341{,}25^2 - 48{,}75^3}}$$
$$= \sqrt[3]{365{,}583939775} + \sqrt[3]{316{,}916060225}$$
$$= 7{,}1504 + 6{,}8178 = 13{,}9682$$

daher $r = 7{,}5 + 13{,}9682 = 21{,}4682$ Centimeter.

25. Bezeichnen wir das Volumen der Kugel mit V, das in dem Wasser eintauchende Kugelsegment mit v_1 und den im Quecksilber eintauchenden Theil der Kugel mit v_2, so führt das Gesetz des hydrostatischen Auftriebes zu den beiden Gleichungen:

$$(1)\ V = v_1 + v_2; \quad (2)\ 7{,}5V = 1.v_1 + 13{,}6 v_2.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich, daß

$$v_1 = {}^{61}/_{126} V \text{ und } v_2 = {}^{65}/_{126} V.$$

Demnach verhalten sich die beiden eingetauchten Theile der Kugel wie 61:65. Da nun ihre absoluten Gewichte in demselben Verhältnisse stehen müssen, so ist, wenn der im Wasser

Digitized by Google

befindliche Theil der Kugel x Pfd. schwer ist, der andere Theil $^{65}/_{61}$x Pfd.; daher ist:

$$x + {}^{65}/_{61}x = 12; \text{ also } x = 5^{17}/_{21} \text{ Pfd.}$$

26. Die Ausflußgeschwindigkeit des Wassers aus der Oeffnung eines Gefäßes, in welchem das Wasser immer auf gleicher Höhe gehalten wird, ist gleich der Geschwindigkeit, welche ein Körper beim freien Falle von der Druckhöhe erlangt. Ist diese Höhe h, so ist die Ausflußgeschwindigkeit $= \sqrt{2gh}$. Ist nun die Fläche der Oeffnung $=$ w, so geht durch die Oeffnung in einer Sekunde ein Wasserprisma von der Grundfläche w und der Höhe $\sqrt{2gh}$ hindurch, also in jeder Sekunde die Wassermasse $w\sqrt{2gh}$. Weil aber der Querschnitt des ausfließenden Wasserstrahles in Folge einer Contraktion 0,64 von der Größe der Oeffnung beträgt, so ist in Wirklichkeit die Menge des in jeder Sekunde ausfließenden Wassers nur $0{,}64w\sqrt{2gh}$ Cubikcentimeter, oder, weil $g = 9{,}808$ m $=$ 980,8 cm, so ist $0{,}64w\sqrt{2gh} = 0{,}64w.44{,}29\sqrt{h}$ Cubikcentimeter $= 0{,}64.0{,}04429w\sqrt{h}$ Liter. Ist nun die Tiefe der ersten Oeffnung unter dem Wasserspiegel $=$ h, so ist die Tiefe der zweiten Oeffnung $=$ h$+$9 Centimeter und weil w bezüglich 4 und 5 Quadratcentimeter ist, so fließen durch die erste Oeffnung in einer Sekunde

$0{,}64.0{,}04429.4\sqrt{h}$ Liter und durch die zweite Oeffnung $0{,}64.0{,}04429.5\sqrt{h+9}$ Liter Wasser. Es ist daher:

$$0{,}64.0{,}04429\{4\sqrt{h}+5\sqrt{h+9}\} = 1{,}1621696.$$

Dividire diese Gl. durch 0,64.0,04429, so wird:

$$4\sqrt{h}+5\sqrt{h+9} = 41; \text{ hieraus folgt:}$$

$$81h^2 - 133792h + 2119936 = 0$$

$$\left(h - \frac{66896}{81}\right)^2 = \frac{4475074816 - 171714816}{81^2}; \text{ also}$$

$$h = \frac{66896 \pm 65600}{81}; \text{ mithin}$$

$h_1 = 1635^{61}/_{81}$ (unbrauchbar); $h_2 = 16$ Centimeter.

27. Fließt das Wasser durch eine kleine Oeffnung im Boden oder in der Wand eines prismatischen Gefäßes, welches keinen Zufluß erhält, so muß der Wasserspiegel immerfort sinken, die Druckhöhe und folglich auch die Ausflußgeschwindigkeit immer kleiner werden. Nun soll die Zeit gefunden werden, in welcher ein prismatisches Gefäß, dessen Grundfläche $=$ B, Ausflußöffnung $=$ p und anfängliche Druckhöhe $=$ h ist, sich ganz leert. Da die anfängliche Ausflußgeschwindigkeit $= \sqrt{2gh}$ ist und gleichmäßig verzögernd (grade

Digitized by Google

so wie beim vertikalen Aufsteigen eines Körpers) bis zu Null abnimmt, so kann man, was die Dauer des Ausflusses betrifft, annehmen, die Geschwindigkeit sei stets die mittlere, nämlich $\frac{1}{2}\sqrt{2gh}$ gewesen. Denn wird ein Körper mit der Geschwindigkeit $\sqrt{2gh}$ vertikal aufgeworfen, so erreicht er die Höhe h und zwar in $t=\sqrt{2h:g}$ Sekunden. In derselben Zeit würde er aber mit der mittleren Geschwindigkeit $\frac{1}{2}\sqrt{2gh}$ dieselbe Höhe erreichen, weil $\frac{1}{2}\sqrt{2gh}.\sqrt{2h:g}=h$. Da nun bei dieser mittleren Geschwindigkeit $\frac{1}{2}\sqrt{2gh}$ die Ausflußmenge in jeder Sekunde $0{,}64p.\frac{1}{2}\sqrt{2gh}$ und der Cubikinhalt des Gefäßes = hB, so hat man für die Zeit, in welcher sich dasselbe ganz leert, wenn wir dieselbe mit T bezeichnen:

$$T=\frac{hB}{0{,}64p.\frac{1}{2}\sqrt{2gh}} \text{ oder } T=\frac{2B}{0{,}64p}\sqrt{h:2g}.$$

Da nun nach 20 Minuten die Höhe des Wassers um 6 cm abgenommen hat, so steht es noch (h—6) cm hoch. Die Zeit t nun, in welcher das noch im Gefäße befindliche Wasser ganz abfließen wird, ist:

$$t=\frac{2B}{0{,}64p}.\sqrt{(h-6):2g}.$$

Mithin ist die Zeit, die vom Anfange des Ausfließens bis zu dem Punkte verstrich, wo die Wasserhöhe um 6 cm abgenommen hatte, also

$$T-t=\frac{2B}{0{,}64p}\left\{\sqrt{h:2g}-\sqrt{(h-6):2g}\right\} \text{ oder}$$

$$=\frac{2B}{0{,}64p.\sqrt{2g}}\left\{\sqrt{h}-\sqrt{(h-6)}\right\}.$$

Weil diese Zeit 20 Minuten = 1200 Sekunden beträgt, so ist:

$$\frac{2B}{0{,}64p.\sqrt{2g}}\left\{\sqrt{h}-\sqrt{h-6}\right\}=1200.$$

Setzen wir hierin $B=17009{,}16$ □ cm, $p=1$ □ cm, $g=980{,}8$ cm so wird:

$$\frac{2.17009{,}16}{0{,}64\,.\,1.\sqrt{1961{,}6}}\left\{\sqrt{h}-\sqrt{h-6}\right\}=1200 \text{ oder}$$

$$\frac{17009{,}16}{14{,}1743}\left(\sqrt{h}-\sqrt{h-6}\right)=1200; \text{ daher}$$

Digitized by Google

$$\sqrt{h} - \sqrt{h-6} = \frac{1200.14{,}1743}{17009{,}16} = 1.$$

Hieraus ergibt sich:

$\sqrt{h} - 1 = \sqrt{h-6}$ ins Quadrat erhoben, liefert
$2\sqrt{h} = 7$; also $\sqrt{h} = {}^7/_2$; mithin $h = {}^{49}/_4 = 12{}^1/_4$ cm.

28. Ist der Radius des Ballons $= r$ Meter, so ist sein körperlicher Inhalt $= {}^4/_3 r^3\pi$ Cubikmeter und seine Hülle $= 4r^2\pi$ Quadratmeter. Daher beträgt das Gewicht der durch ihn verdrängten Luft $148 . {}^4/_3 r^3\pi$ Loth. Wird nun der Ballen mit erhitzter Luft gefüllt, deren Dichtigkeit ${}^2/_3$ der Dichtigkeit der gewöhnlichen Luft beträgt, so ist das Gewicht der innern Luft $= {}^2/_3 . 148 . {}^4/_3 r^3\pi$ Loth. Nun wiegt ferner die aus Papier bestehende Hülle $10.4r^2\pi$ Loth. Da das Gewicht der verdrängten Luft dem eigenen Gewichte des Ballons das Gleichgewicht halten muß, falls er steigen soll, so ist:

$$148 . {}^4/_3 r^3\pi = {}^2/_3 . 148 . {}^4/_3 r^3\pi + 10.4r^2\pi.$$

Diese Gl., durch $4r^2\pi$ dividirt, gibt:
$444r = 296r + 90$; also $r = 0{,}608108$; mithin
$2r = 1{,}216216$ Meter.

29. Denken wir uns die Röhre beim Füllen mit dem geschlossenen Ende nach unten und das Queckſilber bis zur Höhe von h Millimeter eingeschüttet, so ruht auf der Oberfläche des Queckſilbers die Luft von b Millimeter Druck. Verschließen wir die Oeffnung etwa mit dem Finger, kehren die theilweise jetzt gefüllte Röhre um, setzen sie auf das Niveau des Gefäßes und ziehen den schließenden Finger weg, so muß das Queckſilber, weil viel schwerer als Luft, nach unten sinken, aber die oberhalb der Queckſilbersäule stehende Luft hat noch immer die gleiche Masse, wenn sie sich auch im entstehenden größern Raum verbreitet und weniger Druck ausübt. Würde sie den gleichen Druck ausüben, wie die auf das Gefäß drückende Luft, so würde alles Queckſilber aus der Röhre ausfließen. Was an Höhe der Queckſilbersäule stehen bleibt, bleibt deshalb stehen, weil die Luft auf das Gefäß stärker drückt. Diesem stärkeren Drucke entspricht die Höhe in der Röhre von x Millimeter, also ist der Druck in der Röhre nicht b, sondern b—x Millimeter. Daher ist für die Höhe h das in der Röhre abgesperrte Luftvolumen l—h und für die Höhe x ist dasselbe l—x. Nun ist nach dem Mariotte'schen Gesetze das Volumen der Luft dem Drucke umgekehrt proportional, mithin ist:

$(l-h) : (l-x) = (b-x) : b$; hieraus folgt:

Digitized by Google

$$b(1-h) = (b-x)(1-x) \text{ oder:}$$
$$x^2 - (b+l)x + bh = 0; \text{ daher:}$$
$$x = {}^1/_2(b+l) - \sqrt{{}^1/_4(b+l)^2 - bh}.$$

Setzt man $l = 896$mm, $h = 504$mm, $b = 770$mm, so wird:

$$x = {}^1/_2(770+896) - \sqrt{{}^1/_4(770+896)^2 - 770.504}$$
$$= 833 - 553 = 280\text{mm}.$$

30. Angenommen, die leere Flasche wiege x und die Luft in derselben y Gramm, so ist $y = (p-x)\frac{H}{h}$. Die trockene Gasart wiege z Gramm, so ist $z = (p'-x)\frac{H}{h'}$. Nun ist das Gewicht des Wassers $= p''-x$ und weil die Dichtigkeit des Wassers m mal größer ist, als die der trockenen Luft unter dem mittleren Drucke H, so ist:

$$p''-x = m(p-x)\frac{H}{h}; \text{ hieraus folgt:}$$
$$x = \frac{mpH-hp''}{mH-h}.$$

Da nun nach dem Verhältnisse der Dichtigkeit des Gases zu der der Luft oder nach dem specifischen Gewichte des Gases gefragt wird, so haben wir folgende Proportion aufzulösen:

$$z:y = (p'-x)\frac{H}{h'} : (p-x)\frac{H}{h}$$
$$= (p'-x)h : (p-x)h'.$$

Setzen wir hierin den Werth für x, so wird:

$$z:y = \left\{p' - \frac{mpH-hp''}{mH-h}\right\}h : \left\{p - \frac{mpH-hp''}{mH-h}\right\}h'.$$
$$= \left\{\frac{mH(p'-p)+h(p''-p')}{mH-h}\right\}h : \left\{\frac{h'(p''-p)}{mH-h}\right\}h \text{ oder:}$$
$$= \{mH(p'-p)+h(p''-p')\} : \{h'(p''-p')\}.$$

31. Setzt man $h = 763{,}4$, $p = 76{,}532$, $h' = 754{,}68$, $p' = 76{,}94$, $p'' = 3537{,}55$, $H = 758$, $m = 770$, so haben wir:

$$z:y = \frac{770.758.(76{,}94-76{,}532)+763{,}4.(3537{,}55-76{,}94)}{754{,}68.(3537{,}55-76{,}532)}$$
$$= \frac{238133{,}280+2641829{,}674}{2611961{,}06424} = \frac{287996295400}{261196106424}$$
$$= 1{,}1026.$$

Digitized by Google

32. Bei jedem Kolbenhub der Luftpumpe strömt die Luft aus dem Recipienten in den Stiefel, bis die Dichtigkeit der Luft in beiden gleich ist. Daher verhalten sich die Dichtigkeiten der Luft nach und vor jedem Kolbenhube, wie das Volumen des Recipienten zu der Summe der Volumina des Recipienten und des Stiefels und es nimmt die Dichtigkeit in einem geometrischen Verhältnisse ab. Wenn sich also nach dem ersten Kolbenhube die in dem Raume a enthaltene Luft in dem Raume a+b verbreitet, so muß, wenn ihre jetzige Dichtigkeit mit d_1 bezeichnet wird, $d_1 = \frac{a}{a+b}d$ sein. Ebenso hat man nach dem zweiten Kolbenhube:

$d_2 = \frac{a}{a+b}d_1 = \left(\frac{a}{a+b}\right)^2.d$; folglich nach dem n^{ten} Hub:

$$d_n = \left(\frac{a}{a+b}\right)^n.d.$$

Für $a = 400$, $b = 47$, $n = 30$ wird:

$\log d_n = \log\left\{\left(\frac{400}{447}\right)^{30}.d\right\}$. Es ist aber:

$\log\left(\frac{400}{447}\right)^{30} = 30(\log 400 - \log 447) = \bar{2},5525750$,

zu diesem Log. gehört die Zahl 0,035692; folglich ist:

$$d_n = 0{,}035692d.$$

33. Soll nach n Kolbenhuben die Dichtigkeit der Luft $^1/_{10}$ der ursprünglichen betragen, so ist nach der vorigen Aufgabe:

$$\left(\frac{6912}{6912+1044}\right)^n = {}^1/_{10}.$$

Vermittelst Logarithmen erhält man:

$$0{,}0610911n = 1;\ \text{daher}\ n = 16{,}36.$$

34. Hat der Kolben den Boden des Stiefels erreicht, so bleibt trotzdem ein wenig Luft von der Dichtigkeit der Atmosphäre im Stiefel zurück. Dies kommt besonders daher, daß der Kolben niemals vollständig auf den Boden des Stiefels gelangt. Der Raum nun, der zwischen dem tiefsten Kolbenstande und dem Boden des Stiefels sich befindet, ist der sogenannte schädliche Raum. Denkt man sich die Verbindung des Stiefels mit der Glocke aufgehoben und den Kolben in die Höhe gezogen, so wird die Luft des erwähnten schädlichen Raumes ausgedehnt und ihre Dichtigkeit wird sich zur Dichtigkeit der atmosphärischen Luft grade so verhalten, wie das Volumen des schädlichen Raumes zum Vo-

Digitized by Google

lumen des ganzen Stiefels. Da hier der schädliche Raum von dem Inhalte c mitberücksichtigt werden soll, so ist, wenn $\frac{c}{a+b+c} = p$ und $\frac{a}{a+b+c} = q$ gesetzt wird, die Dichtigkeit der Luft im Recipienten nach n Kolbenstößen:

$$d_n = pd + qd_{n-1};$$ daher ist:

$$d_1 = pd + qd$$

$$d_2 = pd + qd_1 = pd + pqd + q^2d = pd(1+q) + q^2d$$

$$d_3 = pd + qd_2 = pd + pqd + pq^2d + q^3d = pd(1+q+q^2) + q^3d$$

. . . . . .

. . . . . .

$$d_n = pd(1+q+q^2+q^3+q^4+\ldots.+q^{n-1}) + q^nd.$$

Die in Klammern stehende Reihe $1+q+q^2\ldots.$ ist eine geometrische Progression, deren Anfangsglied $= 1$, Exponent $= q$ und Gliederzahl $= n$ ist; daher nach §. 412 ihre Summe $s = \frac{1-q^n}{1-q}$; folglich ist auch:

$$d_n = pd\frac{1-q^n}{1-q} + q^nd = d\left\{p\frac{1-q^n}{1-q} + q^n\right\}$$

$$= d\left\{\frac{p}{1-q} + \frac{(1-p-q)q^n}{1-q}\right\}.$$

Nun ist: $\frac{p}{1-q} = \frac{c}{a+b+c} : \frac{b+c}{a+b+c} = \frac{c}{b+c}$

$$1-p-q = 1 - \frac{c}{a+b+c} - \frac{a}{a+b+c} = \frac{b}{a+b+c}$$

$$\frac{1-p-q}{1-q} = \frac{b}{a+b+c} : \frac{b+c}{a+b+c} = \frac{b}{b+c}.$$

Daher ist endlich, wenn wir die bezüglichen Werthe einsetzen:

$$d_n = d\left\{\frac{c}{b+c} + \frac{b}{b+c}\left(\frac{a}{a+b+c}\right)^n\right\}.$$

35. Indem sich im Thermometer das Queckſilber durch die Wärme ausdehnt, steigt es in der Glasröhre mit der Wärmezunahme; die Höhe, welche es darin erreicht, bezeichnet daher den jeweiligen Wärmegrad. Die im Gebrauche befindlichen Thermometer sind eingetheilt nach Réaumür (Deutschland), Celsius (Frankreich) und Fahrenheit (England) und zwar vom Gefrierpunkte bis zum Siedepunkte des Wassers bei dem ersten in 80, bei dem zweiten in 100, bei dem dritten in 180 Grad, so daß:

Digitized by Google

	Gefrierpunkt	Siedepunkt
nach Réaumür (R) . .	0^0 . . .	80^0
„ Celsius (C) . . .	0^0 . . .	100^0
„ Fahrenheit (F) .	32^0 . . .	212^0.

Demnach ist:

$$1^0R = {}^5/_4{}^0C$$
$$1^0C = {}^4/_5{}^0R$$
$$1^0F = (32+{}^9/_5)^0C = (32+{}^9/_4)^0R.$$

Angenommen, x Grad R entsprechen ebenso vielen Graden F, so ist:

$x-32 = {}^9/_4x$; woraus $x = -25{,}6$ Grad.

36. Die zur Erwärmung von 1 Pfd. Wasser um 1 Grad erforderliche Wärmemenge nimmt man als Wärmeeinheit an und nennt sie eine Calorie. Die Wärmemenge, welche die verschiedenen Körper bei gleichem Gewichte absorbiren, damit ihre Temperatur um eine gleiche Anzahl von Graden erhöht werde, wird die specifische Wärme genannt.

Nun sei $a > c > b$. Man nehme x Theile Wasser von a Grad und y Theile von b Grad, dann enthalten die x Theile ax und die y Theile by, also zusammen $ax+by$ Wärmeeinheiten. Nun enthält die Mischung von $x+y$ Theilen Wasser $c(x+y)$ Wärmeeinheiten, und weil in beiden Fällen die Wärmeeinheiten dieselben sind, so ist:

$ax+by = c(x+y)$ oder $(a-c)x = (c-b)y$. Daher:

$$x : y = (c-b) : (a-c).$$

Zweite Aufl. Mischt man Wasser von a Grad Wärme zu c Grad, so entsteht ein Verlust von (a—c) Grad, und mischt man Wasser von b zu c Grad, so entsteht ein Ueberschuß von (c—b) Grad. Damit der Verlust durch den Ueberschuß gedeckt wird, muß man zu (c—b) Theilen a Grad warmen Wassers (a—c) Theile b Grad warmen Wassers nehmen, also muß die Mischung in dem Verhältniß von (c—b):(a—c) geschehen. (Vgl. II. Theil, fünfte Auflage, Seite 135—142.)

37. In der vorigen Aufgabe waren die zu vermischenden Körper gleichartig, in dieser sind sie ungleichartig. Bezeichnen m und n das Gewicht der beiden ungleichartigen Körper, t und t' ihre Temperaturen, t'' die Mischungstemperatur, s die specifische Wärme des ersten Körpers und x die specifische Wärme des zweiten Körpers, so hat, wenn $t > t'$, der erste Körper eine Temperaturerniedrigung von $t-t''$, der zweite eine Temperaturerhöhung von $t''-t'$ Grad erlitten. Der erste hat also $ms(t-t'')$ Calorien abgegeben, der zweite $nx(t''-t')$ Calorien aufgenommen; folglich ist:

Digitized by Google

$$ms(t-t'') = nx(t''-t'); \text{ mithin:}$$
$$x = \{ms(t-t'')\} : \{n(t''-t')\}.$$

38. Die Wärme wirkt auf die Körper auf zwei von einander verschiedene Arten. Sie verändert nämlich entweder ihr Volumen oder ihren Aggregatzustand. Im ersten Falle wirkt sie auf das Gefühl und das Thermometer und heißt freie Wärme; im zweiten wirkt sie auf keins von beiden und heißt gebundene oder latente Wärme. Angenommen, man müsse x Kilogramm Schnee nehmen. Die von dem aufthauenden Schnee aufgenommene Wärme oder die latente Wärme beträgt 75° C, und soll derselbe in Wasser von 30° C verwandelt werden, so erhält der Schnee eine Temperaturerhöhung von 75°+30°=105° C; folglich erhalten x Kilog. 105x Calorien. Soll das Wasser von 62,5° C zu Wasser von 30° C werden, so gibt es an den Schnee 62,5°—30°=32,5° C ab, mithin haben die 7 Kilog. 7×32,5 Calorien abgegeben; es ist daher:

$$105x = 7.32{,}5; \text{ also } x = 2^1/_6 \text{ Kilog.}$$

39. Man nehme x Pfd. Wasserdampf, so gibt derselbe, da seine latente Wärme 540° C beträgt, 540x Calorien an das Wasser ab, und weil das Wasser von 25° C auf 100° C gebracht werden soll, so muß dasselbe 40(100—25) Calorien absorbiren; mithin ist:

$$540x = 40(100-25); \text{ also } x = 5^5/_9 \text{ Pfd.}$$

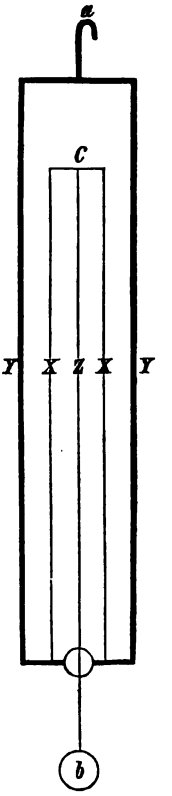
40. Die m Loth Wasserdampf von 100° C enthalten nach der vorigen Aufgabe 540m Calorien. Um also aus m Loth Wasser von 0° C Wasserdampf von 100° C zu erhalten, sind (540+100)m = 640m Calorien nothwendig. Nun enthalten ferner m' Loth Wasser von t Grad Wärme m't Calorien und nach Aufgabe 38 nehmen m'' Loth Schnee von 0° C beim Schmelzen 75m'' Calorien in sich auf, wodurch der Mischung eben so viel Calorien verloren gehen, weil sie als latente Wärme nichts zur Erhöhung der Temperatur beitragen, weshalb die Mischung nur noch 640m+m't—75m'' Calorien enthält. Die durch die Mischung erhaltene Menge Wasser, nämlich m+m'+m'' habe eine Temperatur von x Grad; alsdann ist:

$$(m+m'+m'')x = 640m+m't-75m''; \text{ daher:}$$
$$x = (640m+m't-75m'') : (m+m'+m'').$$

41. Damit der Gang einer Pendeluhr ein gleichförmiger sei, muß die Pendellänge stets dieselbe bleiben. Um dies zu bewerkstelligen, hat man Pendel construirt, bei welchen die Ausdehnung eines Metalls durch die eines zweiten derart

Digitized by Google

aufgehoben oder compensirt wird, daß der Abstand des Schwingungspunktes vom Aufhängepunkte unverändert bleibt. Man nennt solche Pendel Compensationspendel und unter denselben ist das Rostpendel, welches aus einer Combination von Eisen- und Messingstangen besteht, das gewöhnlichste. Bekanntlich dehnen sich alle Körper bei Erhöhung der Temperatur in ihrem ganzen Volumen, also auch in linearer Richtung, aber jeder Körper anders aus. Nach Lavoisier und Laplace ist diese lineare Ausdehnung für geschmiedetes Eisen bei einer Temperaturerhöhung von 0 auf 100°C = $^1/_{819}$ seiner Länge, für Zink nach Sweaton bei derselben Temperaturvermehrung = $^1/_{340}$ seiner Länge. Hierauf beruht die Construktion sowie die Wirkung des Compensationspendels. Dasselbe besteht in einfacherer Ausführung aus zwei an den Enden durch Querstäbe verbundenen Eisenstangen y, auf deren unterem Querstücke 2 Zinkstangen x wieder in die Höhe führen und ihrerseits durch ein drittes Querstück verbunden sind, an welchem eine fünfte Eisenstange z befestigt frei nach unten hängt. Die ganze Pendellänge besteht demnach aus der Länge der ersten Eisenstange, von ihrem Aufhängepunkte a aus gerechnet, bis zum Schwingungspunkte, welcher fast genau in dem Mittelpunkte der Scheibe b liegt. Diese Länge ist zusammengesetzt aus der Länge vom Aufhängepunkte bis zum Ende der Eisenstange y und dem darüber hinausragenden Stücke der fünften Stange bis zum Schwingungspunkte. Die fünfte Stange z ist von ihrem Befestigungspunkte bei c ab offenbar gleich der Zinkstange x nebst dem über die Eisenstangen hinabragenden Theile. Daher kann man die gesammte Pendellänge auch bezeichnen mit y+z—x. Weil aber die Platte mit dem Schwingungspunkte nicht unterhalb der Eisenstangen hervor zu ragen braucht, sondern eben so gut zwischen denselben irgendwo, also auch genau mit ihrem Schwingungspunkte in gleicher Distanz mit den Eisenstangen sich befinden kann, so läßt sich die ganze Pendellänge auch als y—x in letzterem Falle bezeichnen. Bei einer Temperatur-



Digitized by Google

höhung verlängern sich nun zwar die Eisenstangen, aber gleichzeitig auch die Zinkstangen; das von diesen getragene Querstück rückt näher gegen den Aufhängepunkt a hinauf und damit zugleich die nur an diesem Querstücke befestigte Stange z. Weil das Eisen aber bei gleich viel Wärmezunahme sich weniger ausdehnt, als das Zink, so hängt es offenbar nur von dem Verhältnisse der Länge dieser Eisen- und Zinkstangen ab, daß Verlängerung und Hinaufrücken des Punktes c, wodurch Verkürzung der gesammten Pendellänge l erzeugt wird, sich wechselseitig aufheben. Hiernach ist also $l = y - x$; daher $y = l + x$. Da also jede Verlängerung der Eisenstangen eine Vergrößerung der Pendellänge, jede Verlängerung der Messingstangen eine Verkürzung der Pendellänge bewirkt, so ist die Bedingung der Unveränderlichkeit der Pendellänge, die gleiche Verlängerung der Eisen- und Zinkstangen. Ist daher $\frac{1}{a}$ die lineare Ausdehnung des Zinkes und $\frac{1}{b}$ die des Eisens, so muß also sein:

$$(l+x).\frac{1}{b} = x.\frac{1}{a} \text{ oder:}$$

$$(l+x)a = bx;$$

daraus folgt nach §. 225. I. Theil S. 229, vierte Aufl.:

$$(l+x) : x = b : a,$$

und nach §. 227. I. Theil S. 237, vierte Aufl.:

$$l : x = (b-a) : a; \text{ daher:}$$

$$x = al : (b-a).$$

Für das Zahlenbeispiel ist:

$$x = 322.99{,}37 : (816 - 322) = 64{,}77\text{cm}.$$

42. α) 1. Wenn das Volumen des Wassers $v = 1{,}0001$ ist, so erhält man durch Einsetzung dieses Werthes in die gegebene Gl., und wenn man sie alsdann mit (-1000) multiplicirt, folgende nach t aufzulösende Gl.:

$$0 = 1 + 0{,}57577\,t - 0{,}075601\,t^2 + 0{,}00035091\,t^3.$$

Dividire diese Gl. durch 0,00035091, so wird:

$$0 = 2849{,}73 + 1640{,}8\,t - 215{,}442\,t^2 + t^3.$$

Setze zur Fortschaffung des zweiten Gliedes $t = y + 71{,}81$, so wird: $y^3 - 13830{,}95y - 620045{,}47 = 0$.

Weil $4p^3 > 27q^2$, so ist diese Gl. nach §. 495. VI aufzulösen.

Es ist: $\sin 3\varepsilon = \frac{3.620045{,}47}{13830{,}95.\sqrt{18441{,}28}} = \frac{620045{,}47}{4610{,}32.\sqrt{18441{,}28}}$.

Digitized by Google

Daher ist: $\log\sin 3\varepsilon = 9{,}9957910 - 10$
$3\varepsilon = 82^0 2' 9{,}3''$
$\varepsilon = 27^0 20' 43{,}1''$
$\log\sin\varepsilon = 9{,}6621457 - 10$
$\log\sqrt[4/3]{p} = 2{,}1329005$
$\log(-y) = 1{,}7950462$;
daher: $y = -62{,}38$; folglich: $t = 71{,}81 - 62{,}38 = 9{,}43^0$.

42. α) 2. Setzt man $v = 1{,}0002$, so wird:
$0 = 2 + 0{,}57577t - 0{,}075601t^2 + 0{,}00035091t^3$; oder:
$0 = 5699{,}5 + 1680{,}8t - 215{,}4t^2 + t^3$.
Setzt man hier wieder $t = y + 71{,}81$, so wird:
$y^3 - 13830{,}95y - 617193{,}7 = 0$.
Mithin ist: $\log\sin 3\varepsilon = 9{,}9937900 - 10$
$3\varepsilon = 80^0 20' 1{,}67''$
$\varepsilon = 26^0 46' 40{,}56''$
$\log\sin\varepsilon = 9{,}6537273 - 10$
$\log\sqrt[4/3]{p} = 2{,}1329005$
$\log(-y) = 1{,}7866278$
also $y = -61{,}18$; daher $t = 71{,}81 - 61{,}18 = 10{,}63^0$.

42. α) 3. Setze $v = 1{,}0003$, so wird:
$0 = 8549{,}19 + 1640{,}8t - 215{,}4t^2 + t^3$.
Für $t = y + 71{,}81$ gesetzt, erhalten wir:
$y^3 - 13830{,}95y - 614344 = 0$.
Es ist also: $\log\sin 3\varepsilon = 9{,}9917801 - 10$
$3\varepsilon = 78^0 53' 15{,}3''$
$\varepsilon = 26^0 17' 45{,}1''$
$\log\sin\varepsilon = 9{,}6464096 - 10$
$\log\sqrt[4/3]{p} = 2{,}1329005$
$\log(-y) = 1{,}7793101$; daher:
$y = -60{,}16$ und $t = 71{,}81 - 60{,}16 = 11{,}65^0$.

42. α) 4. Ist endlich: $v = 1$, so wird:
$t(t^2 - 215{,}442t + 1640{,}8) = 0$; daher:
$t = 0^0$; ferner ist:
$t^2 - 215{,}442t + 1640{,}8 = 0$; hieraus folgt:
$t = 107{,}721 - 99{,}814 = 7{,}907^0$.

43. Die luftförmigen Körper dehnen sich alle regelmäßig aus und haben alle denselben Ausdehnungscoefficienten $\alpha = 0{,}3665$. Bei einer Temperaturzunahme von 1^0 dehnt sich also jedes Gas um $0{,}01\alpha = 0{,}003665$ seines Volumens aus. Nun ergibt sich unter Anwendung dieses Gesetzes zwischen dem Volumen v eines Gases bei τ Grad und b Milli-

Digitized by Google

meter Druck und dem Volumen v_1 desselben Gases bei t Grad und b_1 Millimeter Druck die Beziehung:

$$v : v_1 = (1+0{,}01\alpha\tau)b_1 : (1+0{,}01\alpha t)b;\ \text{also:}$$

$$v_1 = \frac{(1+0{,}01\alpha t)bv}{(1+0{,}01\alpha\tau)b_1} \text{ oder, weil hier } \tau = 0 \text{ Grad:}$$

$$(1)\quad v_1 = \frac{(1+0{,}01\alpha t)bv}{b_1}.$$

Mit Bezug auf das gegebene Beispiel haben wir, wenn $v = 200$, $v_1 = 215{,}85$, $b = 760$ gesetzt wird, wobei b_1 und t gesucht werden:

$$(2)\quad 215{,}85 = \frac{(1+0{,}003665t).760.200}{b_1}.$$

Soll nun der Druck um 10 mm und die Temperatur um 10° erhöht werden, so sind dieselben bezüglich b_1+10 und $t+10$. Setzen wir diese und die übrigen entsprechenden Werthe in (1) ein, so wird:

$$(3)\quad 220{,}46 = \frac{[(1+0{,}003665(t+10)].760.200}{b_1+10}.$$

Aus (2) und (3) erhalten wir:

$$(4)\quad \frac{215{,}85b_1}{760.200} = 1+0{,}003665t \text{ und}$$

$$(5)\quad \frac{220{,}46(b_1+10)}{760.200} - 0{,}03665 = 1+0{,}003665t.$$

Stelle aus (4) und (5) die Werthe für $1+0{,}003665t$ einander gleich, so wird:

$$\frac{220{,}46(b_1+10)}{760.200} - 0{,}03665 = \frac{215{,}85b_1}{760.200}.$$

Hieraus ergibt sich:

$4{,}61b_1 = 33620$; also $b_1 = 730$ mm Quecksilberdruck.

Setze den Werth für b_1 in (4), so erhalten wir:

$55{,}708t = 557{,}05$; also $t = 10°C$.

44. α) Ist das erste Glied der geometrischen Progression $= 1$, so ist, weil die glühende Kugel in jeder Sekunde 0,0077 ihrer jedesmaligen Hitze verliert, das zweite Glied:

$$= 1 - 0{,}0077 = 0{,}9923$$

und weil die Progression eine abnehmende ist, ist dasselbe zu gleicher Zeit der Exponent der Progression; folglich ist das dritte Glied $= 0{,}9923^2$, das vierte $= 0{,}9923^3$ .... und wenn die Kugel nach n Sekunden noch die Hälfte ihrer anfänglichen Hitze haben soll, so ist also:

$0{,}9923^n = 0{,}5$. Vermittelst Logarithmen hat man:

$0{,}003357n = 0{,}301030$; also $n = 89{,}67$ Sekunden.

Digitized by Google

44. β) Haben 100 Gramm Platin von x Grad durch Eintauchen 1000 Gramm Wasser von 5°C auf 10°C erwärmt, so ist nach Aufgabe 37 die specifische Wärme des Platins, also:

$$s = \frac{1000.1.(10-5)}{100.(x-10)} = \frac{5000}{100(x-10)}.$$

Nun beträgt die specifische Wärme der Platinkugel mit Bezug auf die des Wassers auch nach der Angabe:

$0{,}03308+0{,}0000042x$; daher ist:

$$0{,}03308+0{,}0000042x = \frac{5000}{100(x-10)} \text{ oder:}$$

$0{,}00042x^2+3{,}3038x = 5033{,}08$; daher:

$(x+3933)^2 = 27451913$; folglich:

$x = -3933+5239{,}4 = 1306{,}4°$.

45. Da $100°C = 80°R$, so sind $150°C = 120°R$; daher ist:

$$120+160 = \frac{1085{,}7}{4{,}5237-\log E}; \text{ also:}$$

$$4{,}5237-\log E = \frac{1085{,}7}{280} = 3{,}8775; \text{ folglich:}$$

$\log E = 4{,}5237-3{,}8775 = 0{,}6462$; daher:

$E = 4{,}4279$.

46. Soll $t'' = 150$ sein, so ist folgende Gleichung aufzulösen:

$$0 = -50+64{,}29512\log e+13{,}89479(\log e)^2+2{,}909769(\log e)^3 +0{,}1742634(\log e)^4.$$

Bestimmen wir zunächst die Logarithmen der Coefficienten und bezeichnen dieselben zur Abkürzung bezüglich mit a, b, c, d, so ist:

$\log 64{,}29512 = 1{,}808178 = a$; $\log 13{,}89479 = 1{,}1428519 = b$;

$\log 2{,}909769 = 0{,}4638585 = c$; $\log 0{,}1742634 = \bar{1}{,}2412082 = d$.

Nun setze man $\log e = 0{,}5 = \alpha'$ und $\log e = 0{,}7 = \alpha''$, so wird:

$\log 0{,}5 = \bar{1}{,}6989700$;	$a+\log e = 1{,}5071480$;	num = 32,147	
$2\log 0{,}5 = \bar{1}{,}3979400$;	$b+(\log e)^2 = 0{,}5407919$;	„ = 3,4737	
$3\log 0{,}5 = \bar{1}{,}0969100$;	$c+(\log e)^3 = \bar{1}{,}5607685$;	„ = 0,36372	
$4\log 0{,}5 = \bar{2}{,}7958800$;	$d+(\log e)^4 = \bar{2}{,}0370882$;	„ = 0,010891	
		zusammen num = 35,995311	
$\log 0{,}7 = \bar{1}{,}8450980$;	$a+\log e = 1{,}6532760$;	num = 45,006	
$2\log 0{,}7 = \bar{1}{,}6901960$;	$b+(\log e)^2 = 0{,}8330479$;	„ = 6,8084	
$3\log 0{,}7 = \bar{1}{,}5352940$;	$c+(\log e)^3 = \bar{1}{,}9991525$;	„ = 0,99805	
$4\log 0{,}7 = \bar{1}{,}3803920$;	$d+(\log e)^4 = \bar{2}{,}6216002$;	„ = 0,04184	
		zusammen num = 52,85429	

Digitized by Google

Unter Anwendung der regula falsi erhalten wir:

$$\varphi' = -50+35{,}995 = -14{,}005;$$
$$\varphi'' = -50+52{,}85429 = +2{,}854; \text{ daher:}$$
$$\varphi'\alpha'' = -14{,}005.0{,}7 = -9{,}8035;$$
$$\varphi''\alpha' = +2{,}854.0{,}5 = +1{,}4270.$$
$$\varphi'\alpha''-\varphi''\alpha' = -11{,}2305;\ \varphi'-\varphi'' = -16{,}859; \text{ daher:}$$
$$\log e = \frac{11230{,}5}{16859} = 0{,}66.$$

Nun setze man ferner $\log e = 0{,}66 = \alpha'$, $\log e = 0{,}67 = \alpha''$

$\log 0{,}66 = \bar{1}{,}8195439$; $a+\log e = 1{,}6277219$; num $= 42{,}43477$
$2\log 0{,}66 = \bar{1}{,}6390878$; $b+(\log e)^2 = 0{,}7819397$; „ $= 6{,}05256$
$3\log 0{,}66 = \bar{1}{,}4586317$; $c+(\log e)^3 = \bar{1}{,}9224902$; „ $= 0{,}83655$
$4\log 0{,}66 = \bar{1}{,}2781756$; $d+(\log e)^4 = \bar{2}{,}5193838$; „ $= 0{,}03307$
zusammen num $= 49{,}35695$

$\log 0{,}67 = \bar{1}{,}8260748$; $a+\log e = 1{,}6342528$; num $= 43{,}07773$
$2\log 0{,}67 = \bar{1}{,}6521496$; $b+(\log e)^2 = 0{,}7950015$; „ $= 6{,}23737$
$3\log 0{,}67 = \bar{1}{,}4782244$; $c+(\log e)^3 = \bar{1}{,}9420829$; „ $= 0{,}87515$
$4\log 0{,}67 = \bar{1}{,}3042992$; $d+(\log e)^4 = \bar{2}{,}5455074$; „ $= 0{,}03512$
zusammen num $= 50{,}22537$

Daher $\varphi' = -50+49{,}35695 = -0{,}64305;$
$\varphi'' = -50+50{,}22537 = +0{,}22537;$
$\varphi'\alpha'' = -0{,}64305.0{,}67 = -0{,}4308435;$
$\varphi''\alpha' = +0{,}22537.0{,}66 = +0{,}1487442;$
$\varphi'\alpha''-\varphi''\alpha' = -0{,}5795877;\ \varphi'-\varphi'' = -0{,}86842;$ mithin:

$$\log e = \frac{57958{,}77}{86842} = 0{,}6674048; \text{ also } e = 4{,}64948.$$

Endlich setze man:

$\log e = 0{,}6674 = \alpha'$ und $\log e = 0{,}6675 = \alpha''$

$\log 0{,}6674 = \bar{1}{,}8243862$; $a+\log e = 1{,}6325642$; num $= 42{,}91056$
$2\log 0{,}6674 = \bar{1}{,}6487724$; $b+(\log e)^2 = 0{,}7916243$; „ $= 6{,}189054$
$3\log 0{,}6674 = \bar{1}{,}4731586$; $c+(\log e)^3 = \bar{1}{,}9370171$; „ $= 0{,}8650022$
$4\log 0{,}6674 = \bar{1}{,}2975448$; $d+(\log e)^4 = \bar{2}{,}5387530$; „ $= 0{,}0345743$
zusammen num $= 49{,}999190$

$\log 0{,}6675 = \bar{1}{,}8244513$; $a+\log e = 1{,}6326293$; num $= 42{,}917$
$2\log 0{,}6675 = \bar{1}{,}6489026$; $b+(\log e)^2 = 0{,}7917545$; „ $= 6{,}190910$
$3\log 0{,}6675 = \bar{1}{,}4733539$; $c+(\log e)^3 = \bar{1}{,}9372124$; „ $= 0{,}865391$
$4\log 0{,}6675 = \bar{1}{,}2978052$; $d+(\log e)^4 = \bar{2}{,}5390134$; „ $= 0{,}034595$
zusammen num $= 50{,}007896$

Digitized by Google

Also ist: $\varphi' = -50+49{,}999190 = -0{,}000810$;
$\varphi'' = -50+50{,}007896 = +0{,}007896$;
$\varphi'\alpha'' = -0{,}005406750$; $\varphi''\alpha' = +0{,}0052697904$;
$\varphi'\alpha'' - \varphi''\alpha' = -0{,}0058104654$; $\varphi' - \varphi'' = -0{,}08706$; daher:

$$\log e = \frac{5810{,}4654}{8706} = 0{,}6674093; \text{ also } e = 4{,}64953.$$

Setzen wir zur Verificirung $\log e = 0{,}6674093$, so erhalten wir:

$\log e = \bar{1}{,}8243923$;	$a+\log e = 1{,}6325703$;	num = 42,91116
$2\log e = \bar{1}{,}6487846$;	$b+(\log e)^2 = 0{,}7916365$;	„ = 6,189228
$3\log e = \bar{1}{,}4731769$;	$c+(\log e)^3 = \bar{1}{,}9370354$;	„ = 0,8650382
$4\log e = \bar{1}{,}2975692$;	$d+(\log e)^4 = \bar{2}{,}5387774$;	„ = 0,03457621
	zusammen	num = 50,00000

Hieraus folgt $\varphi' = -50+50{,}00000 = 0$; mithin ist der dem Logarithmus 0,6674093 entsprechende numerus 4,64953 in den 5 ersten Decimalstellen ganz genau, wonach die Antwort in der Beispielsammlung zu berichtigen ist.

47. Nach den physikalischen Gesetzen verhalten sich die Intensitäten desselben Lichtes in zwei verschiedenen Entfernungen umgekehrt, wie die Quadrate dieser Entfernungen. Sind die leuchtenden Körper a Meter von einander entfernt, so ist, wenn wir die gesuchte Entfernung des Punktes vom ersten leuchtenden Körper als x annehmen, die Entfernung dieses Punktes von dem zweiten leuchtenden Körper $a-x$ Meter. Da sich nun die Lichtintensitäten wie $v:v'$ verhalten, so ist:

$$v : v' = (a-x)^2 : x^2.$$

Zieht man aus jedem Gliede dieser Proportion die Quadratwurzel, so wird:

$$\sqrt{v} : \sqrt{v'} = (a-x) : x; \text{ also nach §. 226:}$$
$$(\sqrt{v}+\sqrt{v'}) : \sqrt{v'} = a : x; \text{ daher auch:}$$
$$(\sqrt{v}+\sqrt{v'})(\sqrt{v}-\sqrt{v'}) : \sqrt{v'}(\sqrt{v}-\sqrt{v'}) = a : x \text{ oder:}$$
$$(v-v') : \sqrt{v'}(\sqrt{v}-\sqrt{v'}) = a : x; \text{ mithin:}$$

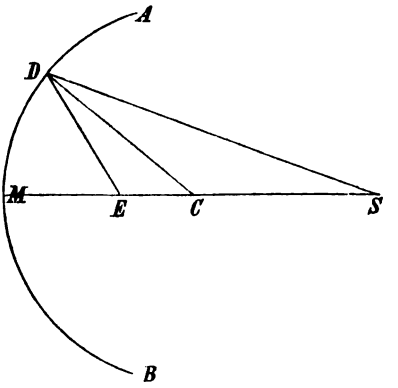
$$x = a\frac{\sqrt{v'}(\sqrt{v}-\sqrt{v'})}{v-v'} \text{ und}$$

$$a-x = a\frac{\sqrt{v}(\sqrt{v}-\sqrt{v'})}{v-v'}.$$

48. Ein Hohlspiegel ist ein an der innern concaven Fläche spiegelnder Abschnitt AB einer Hohlkugel. Der Mittelpunkt M der spiegelnden Fläche heißt der optische Mittelpunkt, der Kugelmittelpunkt C der geometrische Mittelpunkt, MC die optische Axe, der Kugelradius (MC) = r der Krümmungsradius und der nur wenige Grade enthaltende

Digitized by Google

Bogen AB die Oeffnung oder Apertur des Spiegels. Nun sei S ein leuchtender Punkt auf der Verlängerung der Axe, SD ein beliebiger den Spiegel in D treffender Lichtstrahl. Zieht man den Radius DC, so steht DC senkrecht auf dem Spiegel, weshalb die Einfallsebene durch DC und DS bestimmt wird.



Da in dieser der reflektirte Strahl liegen muß, so schneidet derselbe die ebenfalls in ihr liegende Axe MC etwa in E. Dieser Punkt E heißt das Bild des Punktes S; ferner EM die Bildweite und MS die Gegenstands- oder Objektweite. Da im Punkte E sich alle aus S ausgehenden Strahlen treffen und dadurch eine große Hitze erzeugen, so heißt dieser Punkt auch Brennpunkt und ME die Brennweite.

Weil nun DC den Winkel SDE halbirt, so verhält sich nach einem Satze der Planimetrie:

$$(1)\quad DS : DE = CS : CE.$$

Wenn aber D sehr nahe bei M liegt, so kann $DS = MS$ und $DE = ME$ gesetzt werden; alsdann haben wir auch:

$$(2)\quad MS : ME = CS : CE.$$

Um nun hieraus die katoptrische Hauptformel abzuleiten, setze man die Objektweite $MS = a$, die Bildweite $ME = \alpha$, alsdann wird $CS = MS - MC = a - r$ und

$$CE = MC - ME = r - \alpha.$$

Setzen wir diese Werthe in (2), so wird:

$$(3)\quad a : \alpha = (a - r) : (r - \alpha).$$

Weil nun r gleich der doppelten Brennweite ME ist, welche gewöhnlich mit f bezeichnet wird, so erhalten wir aus (3):

$$(4)\quad a : \alpha = (a - 2f) : (2f - \alpha).$$

Hieraus folgt:

$$(5)\quad 2a\alpha = 2\alpha f + 2af$$

oder wenn wir diese Gl. durch $2a\alpha f$ dividiren:

$$(6)\quad \frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha},$$

d. h. der reciproke Werth der Brennweite ist gleich der

Digitized by Google

Summe der reciproken Werthe aus der Objekt- und Bildweite.

Nun verlangt unsere vorliegende Aufgabe die Berechnung der Entfernung des leuchtenden Punktes S vom Spiegel, also SM oder a. Da nun ES = m, so ist:

$$\alpha = ME = MS - ES = a - m.$$

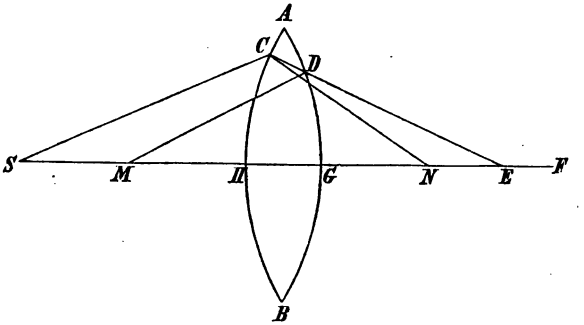
Setzen wir diesen Werth für α in die Gl. (3) und lösen dieselbe nach a auf, so erhalten wir:

$$a : (a - m) = (a - r) : (r - (a - m)).$$

Hieraus folgt:

$$a^2 - a(m + r) + {}^1/_2 mr = 0; \text{ daher:}$$

$$a = {}^1/_2 \{m + r \pm \sqrt{m^2 + r^2}\}.$$



49. In vorstehender Figur sei AB eine biconvexe Linse oder eine Linse, deren Oberflächen beide convex sind. S sei der leuchtende Punkt und SC der auffallende Strahl, so wird derselbe bei seinem Eintritt in die Linse zum Einfallslothe CN hin nach CD und bei seinem Austritte vom Einfallslothe DM weg nach DE gebrochen, so daß er die Axe SF in E schneidet. In diesem Punkte schneiden sich alle von S ausgehenden und gegen die Axe mit ihm gleich geneigten Strahlen. Folglich entsteht in E ein wirkliches Bild des leuchtenden Punktes S und deshalb ist auch hier GE die Bildweite und HS die Objektweite. Setzt man nun NH = r, MG = R, SH = a und EG = α, ist ferner der Brechungsexponent für Glas = n, so erhält man die dioptrische Hauptformel:

$$(1)\quad \frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha} = (n - 1)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R}\right).$$

Setzt man in dieser Formel die Objektweite $a = \infty$, so wird die Bildweite gleich der Brennweite f, daher ist alsdann:

Digitized by Google

$$(2)\ \frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{R}\right).$$

Entwickeln wir diese Gleichung und lösen sie nach R auf, so erhalten wir:

$$R(r-(n-1)f) = (n-1)rf;\ \text{folglich:}$$

$$R = \frac{(n-1)rf}{r-(n-1)f}.$$

50. In der Figur zur vorigen Aufgabe sei die Objektweite $HS = x$, dann ist nach der Aufgabe die Bildweite:

$$EG = d-x.$$

Setzen wir diese Werthe für a und α in die Formel (1) der vorigen Aufgabe, so wird:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{d-x} = (n-1)\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{R}\right).$$

Diese Gleichung gibt entwickelt:

$$x^2(n-1)(R+r)-(n-1)(R+r)dx+drR = 0;\ \text{folglich:}$$

$$x = {}^1/_2 d\left\{1 \pm \sqrt{\frac{(n-1)(R+r)d-4rR}{(n-1)(R+r)d}}\right\}.$$

51. Unter Meniskus versteht man eine concavconvexe sphärische Linse, wovon eine Fläche convex, die andere concav ist, und wobei der Krümmungsradius der ersten Fläche kleiner ist, als der zweite. Nimmt man in der Formel (2) der 49. Aufgabe R negativ und zugleich $R > r$, so erhält man die Formel für die concavconvexe Linse; also:

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right).$$

Hieraus erhalten wir, wenn für Glas der Brechungsexponent $n = {}^3/_2$ ist:

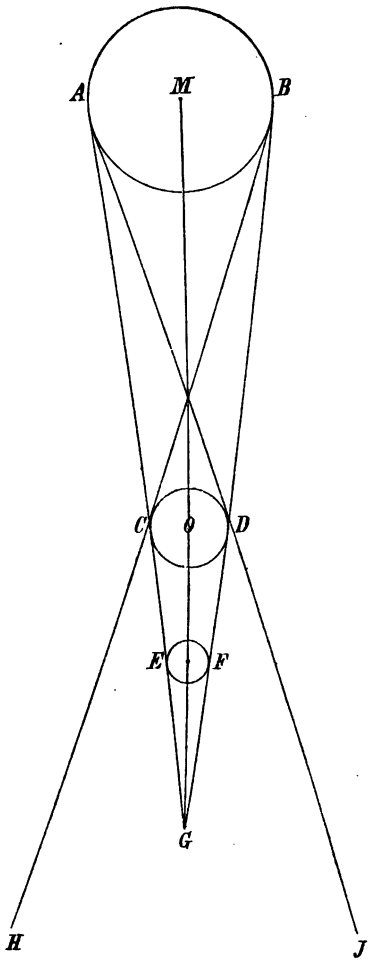
$$f = \frac{2rR}{R-r}.$$

Ist nun $f = 16$, so wird:

$$8 = \frac{rR}{R-r};\ \text{also}\ R = \frac{8r}{8-r}.$$

Aus dem Divisor $8-r$ folgt, daß r nicht größer als 7 angenommen werden darf. Weil ferner $8-r$ für $r = 1, 2, 3$ kein Theiler von 8r sein kann, so liegen die Werthe für r zwischen 3 und 8. Für $r = 4$ wird $R = 8$, für $r = 6$ wird $R = 24$ und für $r = 7$ wird $R = 56$.

Digitized by Google



52. α) AB sei der leuchtende Körper, CD der beleuchtete, so ist CDG der Kernschatten, HCG + JDG der Halbschatten. Ist nun R der Radius des leuchtenden, r der Radius des beleuchteten Körpers, die Centralentfernung beider Kugeln MO=d und bezeichnen wir den Abstand der Spitze des Kernschattens vom Mittelpunkte der beleuchteten Kugel, nämlich OG mit x, so ist $MG = MO + OG = d + x$; daher haben wir: $R : r = (d+x) : x$ oder: $(R-r) : r = d : x$; daher:

$$x = \frac{dr}{R-r}.$$

52. β) Der Halbschatten bildet die Mantelfläche eines abgestumpften Kegels. Denkt man sich denselben zu einem Kegel ergänzt, so liegt seine Spitze S zwischen der leuchtenden und beleuchteten Kugel. Bezeichnen wir die Entfernung dieser Spitze von der beleuchteten Kugel, also OS mit x, so ist der Abstand der Spitze vom Mittelpunkte der leuchtenden Kugel, also $MS = MO - OS = d - x$. Es ist also: $R : r = (d-x) : x$ oder:

$$(R+r) : r = d : x; \text{ daher } x = \frac{dr}{R+r}.$$

52. γ) Man denke sich in dem Kernschatten den Kreis EF gezogen, dessen Radius $oF = \varrho$ sei. Nun ist $Oo = m$, und nach 52. α) $OG = Oo + oG = \frac{dr}{R-r}$; also:

$$oG = OG - Oo = \frac{dr}{R-r} - m = \frac{dr - m(R-r)}{R-r};$$

Digitized by Google

daher haben wir:

$$\varrho : r = \frac{dr - m(R-r)}{R-r} : \frac{dr}{R-r} \text{ oder:}$$

$$\varrho : 1 = \{dr - m(R-r)\} : d; \text{ daher:}$$

$$\varrho = \frac{dr - m(R-r)}{d}.$$

Dieser Werth für ϱ ist ein approximativer; ein genauerer Werth ist:

$$\varrho = \frac{dr - m(R-r)}{\sqrt{d^2 - (R-r)^2}}.$$

52. δ) Der Halbmesser des Halbschattens in demselben Abstande $= m$ vom Mittelpunkte des beleuchteten Körpers sei ϱ_1, alsdann ist mit Bezug auf 52. β):

$$\varrho_1 : r = \frac{dr + m(R+r)}{R+r} : \frac{dr}{R+r}; \text{ daher:}$$

$$\varrho_1 = \frac{dr + m(R+r)}{d} \text{ oder genauer:}$$

$$= \frac{dr + m(R+r)}{\sqrt{d^2 - (R+r)^2}}.$$

53. Hier haben wir folgende quadratische Gleichung aufzulösen:

$$0{,}000437t^2 - 0{,}31368t + 50 = 0;$$

$$t^2 - \frac{31368}{437}t + \frac{50000000}{437} = 0;$$

$$t^2 - 717{,}8t + 114416{,}47 = 0;$$

$$(t - 358{,}9)^2 = 14392{,}74; \text{ daher:}$$

$$t = 358{,}9 - 119{,}969 = 238{,}931°.$$

54. Nach der Ohm'schen Formel ist:

$$(1)\ s = \frac{ne}{nr+l};\quad (2)\ s' = \frac{n'e}{n'r+l}$$

wenn n und n' die Anzahl der Elemente, e die elektromotorische Kraft, r den Widerstand der einzelnen Elemente und l den Widerstand des Leitungsdrathes bezeichnet. Nach der Aufgabe soll nun das Verhältniß $e : r : l$ gesucht werden. Setzen wir aus (1) und (2) die Werthe für e und l einander gleich, so wird:

$$(3)\ \frac{s(nr+l)}{n} = \frac{s'(n'r+l)}{n'}$$

$$(4)\ \frac{n(e-rs)}{s} = \frac{n'(e-rs')}{s'}.$$

Digitized by Google

Aus (3) erhält man:

$$r.nn'(s-s') = l.(ns'-n's);\ \text{folglich:}$$

$$(5)\quad r : l = (ns'-n's) : nn'(s-s').$$

Aus (4) ergibt sich:

$$e.(ns'-n's) = r.ss'(n-n');\ \text{mithin:}$$

$$(6)\quad e : r = ss'(n-n') : (ns'-n's).$$

Aus (5) und (6) resultirt endlich:

$$e : r : l = ss'(n-n') : (ns'-n's) : nn'(s-s').$$

55: Angenommen, der gesuchte Punkt sei x; da die gegenseitige Entfernung der beiden Körper = d ist, so ziehen sie sich bezüglich in den Entfernungen x und d—x an. Nun steht nach dem Newton'schen Gesetze der Gravitation die Schwere im graden Verhältnisse der Masse des anziehenden und des angezogenen Körpers und im umgekehrten Verhältnisse der Quadrate der Entfernungen. Hiernach sind die Kräfte K und k, womit sich die Massen A und B in den Abständen x und d—x anziehen, also $K = A : x^2$ und $k = B : (d-x)^2$. Weil nach der Aufgabe K = k sein soll, so ist:

$$A : x^2 = B : (d-x)^2;$$

$$A : B = x^2 : (d-x)^2;\ \text{nach §. 224;}$$

$$\sqrt{A} : \sqrt{B} = x : (d-x);\ \text{nach §. 278;}$$

$$(\sqrt{A}+\sqrt{B}) : \sqrt{A} = x : d;\ \text{nach §. 226;}$$

$$(\sqrt{A}+\sqrt{B})(\sqrt{A}-\sqrt{B}) : \sqrt{A}(\sqrt{A}-\sqrt{B}) = d : x;\ \text{nach §. 222, oder:}$$

$$(A-B) : (A-\sqrt{AB}) = d : x;\ \text{daher:}$$

$$x = d\frac{A-\sqrt{AB}}{A-B}.$$

Für A = 80, B = 1, d = 60,2 Erdhalbmesser ist:

$$x = \frac{60{,}2.(80-\sqrt{80.1})}{80-1} = \frac{60{,}2.(80-8{,}944272)}{79}$$

$$= \frac{4277{,}5548256}{79} = 54{,}1462636\ \text{Erdhalbmesser.}$$

56. α) Ist in der Figur zur Aufgabe 52 AB die Sonne, CD die Erde, so ist die Entfernung der Erde von der Sonne, also MO = d = 11614 Erddurchmesser = 11614.2r Erdhalbmesser; ferner 2R = 108,3.2r, also R = 108,3r Erdhalbmesser, wenn r dieser letztere ist. Gesucht wird die Länge des Kernschattens OG, welche wir mit x bezeichnen. Nun ist:

$$x = \frac{dr}{R-r} = \frac{11614.2r.r}{108{,}3r-r} = \frac{11614.2r}{107{,}3} = 2r.108{,}24\ \text{Erdhalbmesser;}$$

daher x = 108,24 Erddurchmesser.

Digitized by Google

56. β) Mit Bezug auf Aufgabe 52. γ) ist hier $m = 30,1.2r$ Erdhalbmesser und wenn ϱ den Halbmesser des Kernschattens in der mittleren Entfernung des Mondes in Erdhalbmessern bezeichnet, so ist:

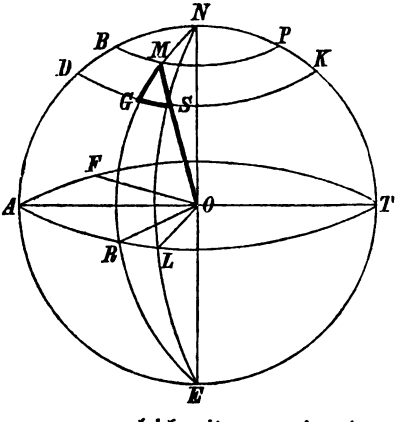
$$\varrho = \frac{11614.2r.r - 30,1.2r(108,3r - r)}{11614.2r} = \frac{(11614 - 30,1.107,3)r}{11614}$$

$$= \frac{8384,27r}{11614} = 0,7219r\ ^*);\ \text{mithin:}$$

$$2\varrho = 2r.0,7219 \text{ Erdhalbmesser.}$$

Nun ist der Monddurchmesser $= 0,27$ Erddurchmesser $= 2r.0,27$ Erdhalbmesser; folglich ist der Durchmesser des Kernschattens, also:

$2\varrho = (2r.0,7219) : (2r.0,27) = 2,673$ Monddurchmessern.



57. Die Zwecke, welche für die Erde und Ortsangaben auf derselben mittelst der Meridiane und Breitenkreise erreicht werden, werden für das scheinbare Himmelsgewölbe durch Rectascensions- und Deklinationskreise erreicht. Die Rectascensionskreise, den Meridianen entsprechend, sind alle größte Kugelkreise, welche durch die beiden Pole der Weltaxe gehen und auf dem Himmelsäquator senkrecht stehen und auf letzterem gleichweit von einander entfernt, sich gegen die Pole zu immer mehr nähern. Wie die terrestrischen Meridiane oder Längenkreise von Ferro, bezüglich Paris oder Greenwich ab nach Osten gezählt werden, so werden die Rectascensionskreise von jenem Punkte des Himmelsäquators ab gezählt, in welchem die Ekliptik gegen den 21. März den Himmelsäquator schneidet, dem sogenannten Frühlingsäquinoktialpunkte. Die Deklinationskreise entsprechen ganz den terrestrischen Breitenkreisen, sind also mit dem Himmelsäquator parallel, unter sich stets gleich weit von einander

---

*) Denselben Werth für ϱ erhält man, wenn es nach der zweiten Formel $\varrho = \frac{dr - m(R - r)}{\sqrt{d^2 - (R - r)^2}}$ berechnet wird.

Digitized by Google

entfernt, aber in ihrer Größe und Ausdehnung unter sich ungleich. Die vom Aequator nördlich gelegenen werden mit +, die von demselben südlich gelegenen mit — bezeichnet.

In vorstehender Figur bezeichnen nun NE die Himmelsaxe, N deren Nordpol, ARLTFA den Himmelsäquator, in demselben F den Frühlingsäquinoktialpunkt, M den Mondmittelpunkt, S den Sonnenmittelpunkt in ihrer Stellung um 3 Uhr 51,2 Min. Zieht man durch diese beiden Punkte die größten Kreise NMGRE und NSLE, so ist ersterer die Rectascension des Mondes, letzterer die der Sonne zu dieser Zeit. Der Bogen FAR des Aequators, oder was dasselbe sagt, Winkel FOR ist dann 126°22′52″, Bogen FARL oder Winkel FOL = 126°50′16″.

Zieht man ferner parallel mit dem Aequator durch M und S die Kreise BMP und DGSK, so sind diese die Deklinationskreise für M und S und es ist der

Bogen MR oder entsprechend Winkel MOR = 19°48′19″ und
" SL " " " SOL = 19°24′9″.

Da MR senkrecht auf dem Aequator steht, so steht es auch senkrecht auf dem mit dem Aequator parallelen Bogen DGS und verbindet man S mit M, so ist MGS ein bei G rechtwinkeliges Dreieck. Wegen der nach den numerischen Angaben sehr unbedeutenden Dimensionen dieses Dreiecks kann dasselbe, obgleich es thatsächlich ein sphärisches ist, doch ohne erhebliche Unrichtigkeit als ebenes angesehen und berechnet werden. Zunächst muß aus dem bekannten Bogenstück RL der Bogen GS eruirt werden. Aus trigonometrischen Gründen ist:

$$RL = \frac{GS}{\cos \sphericalangle SOL}; \text{ daher: } GS = RL \times \cos \sphericalangle SOL.$$

Nun ist: Bogen RL = Bogen FAR — Bogen FAL; oder:
= Winkel FOR — Winkel FOL; oder:
= 126°22′52″ — 126°50′16″
= — 1644″; daher ist:
GS = 1644.cos 19°24′9″. Nun ist:
log GS = log 1644 + log cos 19°24′9″
= 3,2159018 + 9,9746076 — 10
= 3,1906094; daher:
GS = — 1550,9.

Weiter ist MG = Deklination des Mondes weniger der der Sonne, also:
= 19°48′19″ — 19°24′9″
= 0°24′10″ = 1450″.

Beim Anfang und Ende der Finsterniß müssen Sonne und Mondrand einander berühren; es muß also die Entfernung

Digitized by Google

zwischen Mond und Sonne sich derart verringert haben, daß die Summe der Radien von Mond und Sonne nur diese dritte Seite des Dreiecks ausmacht. Zwischen 3 Uhr 51,2 Minuten und dem Anfange der Finsterniß nimmt aber der Mond wie die Sonne an Rectascension zu, an Deklination ab und außerdem verringert sich auch noch der Mondhalbmesser, nicht aber jener der Sonne. Wird die relative Bewegung des Mondes im Parallelkreise, also in der Rectascension gegeben, desgleichen seine relative Abnahme in der Deklination, d. h. weil die thatsächlich an beiden Körpern erscheinende Bewegung blos auf einen, den Mond, reduzirt ist, indem die Sonne als stillstehend und dabei der Mond mit der jeweiligen Differenz fortrückend gedacht werden kann, was ja auf dasselbe hinauskommt, so bleiben diese Umstände noch für die Berechnung des sich aus Dreieck MGS bis zum Beginne der Finsterniß ergebenden Dreiecks zu berücksichtigen.

Nehmen wir nun an, x Stunden nach 3 Uhr 51,2 Minuten beginne die Finsterniß, so hat, weil die Rectascension des Mondes sich in einer Stunde um 1438″ vermehrt, diese in x Stunden um 1438x″ zugenommen, desgleichen die Deklination in x Stunden um 832x″ abgenommen. Also ist aus GS jetzt GS+1438x und aus GM jetzt GM—832x geworden; d. h. die beiden Katheten des Dreiecks sind jetzt GS+1438x und GM—832x. Der Mondradius nimmt in 1 Stunde 2,2″ ab, in x Stunden um 2,2x″, also ist sein Radius jetzt 15′40,1″—2,2x; demnach ist Sonnenradius und Mondradius zusammen = 15′51,6″ + 15′40,1″ — 2,2x″ = 31′31,7″ — 2,2x″ = 1891,7″ — 2,2x″. Weil das Dreieck immerhin ein rechtwinkliges bleiben muß, so ergibt sich also die Gl.:

$$(GS+1438x)^2+(GM-832x)^2=(1891{,}7-2{,}2x)^2$$

oder, die oben gefundenen Werthe für GS = — 1550,9 und GM = 1450 eingesetzt:

$$(-1550{,}9+1438x)^2+(1450-832x)^2=(1891{,}7-2{,}2x)^2.$$

Entwickeln wir diese Gl., so wird:

$$2067844x^2-4480388x+2405291+692224x^2-2412800x+2102500=3578529-8323{,}5x+4{,}84x^2 \text{ oder:}$$

$$2760063x^2-6884864{,}5x+929262=0 \text{ oder:}$$

$$x^2-\frac{6884864{,}5}{2760063}x+\frac{929262}{2760063}=0.$$

Wir lösen diese Gl. nach §. 395. II. Theil V. Aufl. S. 317 Aufgabe 167 auf. Es ist also:

$$p=\frac{6884864{,}5}{2760063} \text{ und } q=\frac{929262}{2760063}.$$

Digitized by Google

Wenn $\sin\lambda = \frac{2\sqrt{q}}{p}$, so ist:

$$x_1 = \sqrt{q}\,\text{tang}\,{}^1/_2\lambda \text{ und } x_2 = \sqrt{q}.\cot{}^1/_2\lambda.$$

Nun ist:
$\log\sqrt{q} = 0{,}7636096 - 1$
$\log p = 0{,}3969764$
$\log(\sqrt{q} : p) = 0{,}3666332 - 1$
$\log 2 = 0{,}3010300$
$\log\sin\lambda = 9{,}6676632 - 10$
$\lambda = 27^0 43' 29{,}22''$
${}^1/_2\lambda = 13^0 51' 44{,}61''$
$\log\text{tang}\,{}^1/_2\lambda = 9{,}3923073 - 10$
$\log\sqrt{q} = 9{,}7636096 - 10$
$\log x_1 = 0{,}1559168 - 1$
$x_1 = 0{,}1432$ Std. $= 8$ Min. 36 Sek.
$\log\cot{}^1/_2\lambda = 10{,}6076927 - 10$
$\log\sqrt{q} = 9{,}7636096 - 10$
$\log x_2 = 0{,}3713023$
$x_2 = 2{,}3513$ Std. $= 2$ Std. 21 Min. 4 Sek.

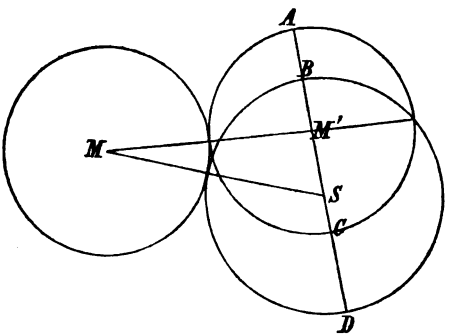
Hieraus folgt, daß der Anfang der Finsterniß um 3 Uhr 59 Min. 48 Sek. und das Ende um 6 Uhr 12 Min. 16 Sek. war. Mithin war die Dauer der Finsterniß 2 Std. 12 Min. 28 Sek. und die Mitte der Finsterniß oder der Moment der größten Verfinsterung war um 5 Uhr 6 Min. 2 Sek. Jetzt bleibt noch die Größe der größten Verfinsterung zu bestimmen übrig. Im Momente der größten Verfinsterung muß die Verbindungslinie zwischen Sonnen- und Mondmittelpunkt senkrecht auf der Mondbahn stehen. Da der Mond gleichsam durch 2 Kräfte, ausgedrückt als Rectascensions- und Deklinationsänderung auf seiner Bahn geführt wird, die in verschiedener Richtung wirken, so ist sein wahrer Weg nach dem Satze von dem Parallelogramm der Kräfte:

$$= \sqrt{1438^2 + 832^2}$$

für eine gegebene Zeit.

Es bezeichne nun in umstehender Figur S die Sonne, M den Mond und deren beiderseitige Stellung zu Anfang der Finsterniß, also um 3 Uhr 59 Min. 48 Sek., was wir für die Berechnung $= 4$ Uhr setzen dürfen; ferner M' der Mond und S die Sonne zur Zeit der Mitte der Finsterniß, wo beide freilich inzwischen zwar ihre Stellung im Raume, aber doch so geändert haben, daß immerhin die Verbindungslinie des Sonnen- und Mondmittelpunktes senkrecht auf der Mondbahn steht, dann sind von der ersten bis zur letzten Stellung 1 Stunde 6 Min. verflossen. In dieser Zeit hat

Digitized by Google



der Mond (an Rectascension nach Obigem in 1 Stunde 1438″, also in $^{11}/_{10}$ Stunden $^{11}/_{10}.1438''$, an Declination in 1 Stunde 832″ also in $^{11}/_{10}$ Std. $^{11}/_{10}.832''$) einen wirklichen Weg von $^{11}/_{10}.\sqrt{1438^2+832^2}$ gemacht. Jetzt ist noch zu ermitteln, wie groß der scheinbare Radius des Mondes bis zu dieser Zeit geworden. Sein Radius nimmt in 1 Stunde um 2,2″ ab. Von 3 Uhr 51,2 Min. bis 4 Uhr=8,8″=$^{88}/_{600}$ Stunden nimmt er um $^{88}/_{600}\times 2{,}2''=^{1936}/_{6000}=0{,}32''$, von da bis zur Zeit der Mitte oder in $^{11}/_{10}$ Stunde $^{11}/_{10}\times 2{,}2''=2{,}42''$, hat im Ganzen also abgenommen $2{,}42''+0{,}32''=2{,}74''$. Also ist jetzt sein Radius $15'40{,}1''-2{,}74''=15'37{,}36''$.

Nun ist MSM′ ein rechtwinkeliges Dreieck, worin $MM'=^{11}/_{10}.\sqrt{1438^2+832^2}=1827{,}47''$; MS, das aus dem Mondradius zu Anfang der Finsterniß nebst dem Sonnenradius besteht, ist also $=15'40{,}1''-0{,}32''+15'51{,}6''=31'31{,}38''=1891{,}38''$; folglich: $M'S=\sqrt{1891{,}38^2-1827{,}47^2}=487{,}5$. Daher ist:

$$BM'=BS-M'S=951{,}6''-487{,}5''=464{,}1''$$

$$AB=AM'-BM'=937{,}9-464{,}1=473{,}8''$$

BC, der die Sonne deckende Mondtheil, $=AC-AB=1880{,}2-473{,}8''=1406{,}4''$. Nun theilt man die ganze Sonnenscheibe in 12 gleiche Theile, die man Zolle nennt. Bezeichnen wir die Größe der Verfinsterung mit x, so haben wir;

$$2\times 951{,}6:1406{,}4=12:x;\ \text{also: } x=\text{nahezu } 9 \text{ Zoll.}$$

58. Eine Sonnenfinsterniß entsteht, wenn der Mond zwischen Erde und Sonne tritt (bei der Conjunktion); tritt aber die Erde zwischen Sonne und Mond (bei der Opposition), so entsteht eine Mondfinsterniß. Sonnenfinsternisse können daher nur zur Zeit der Neumonde, Mondfinsternisse nur zur Zeit der Vollmonde stattfinden. Die Sonnenfinsternisse können nur an solchen Punkten der Erde, welche sich in der Tagseite befinden, aber deshalb noch nicht auf der ganzen Tagseite, gesehen werden; die Mondfinsternisse sind nur auf der Nachtseite der Erde und zwar an allen Punkten der-

Digitized by Google

selben, wo nur der Mond über dem Horizonte steht, sichtbar. Bei Sonnenfinsternissen wird die Sonne ihres Lichtes nicht beraubt, sondern nur für verschiedene Punkte der Erde bedeckt, bei Mondfinsternissen wird der Mond seines Lichtes wirklich beraubt. Die Sonnenfinsterniß erscheint daher zu derselben Zeit von verschiedener Größe, eine Mondfinsterniß muß aus leicht ersichtlichen Gründen überall auf der Erde, wo sie überhaupt sichtbar ist, im ganzen Verlaufe gleich erscheinen. Nur ist die bürgerliche Zeit auf der Erde in jedem Meridiane verschieden und bekanntlich um 4 Min. für jeden Meridian. Die um 1 Grad von uns mehr nach Osten Wohnenden haben 4 Minuten mehr, die um 1 Grad mehr nach Westen Wohnenden haben 4 Minuten weniger Zeit als wir. Nach der Angabe liegt aber Syrakus $12^{0}52'$ mehr östlich, also ist die für Anfang, Dauer und Ende der Finsterniß für den Meridian von Paris berechnete Zeit um die entsprechende Ortsdifferenz 51 Min. 28 Sek. zu vermehren.

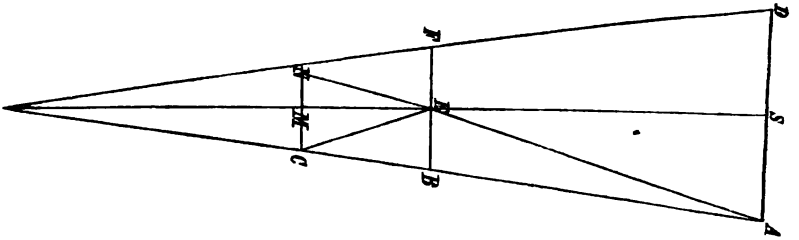
Nach den angegebenen Elementen zur Ermittelung des Verlaufes der fraglichen Mondfinsterniß beträgt die stündliche Bewegung des Mondes in der Länge 33'41", der Sonne in derselben Zeit nur 2'28", woraus folgt, daß der Mond um $33'41'' - 2'28'' = 31'13'' = 1873''$ schneller als die Sonne fortrückt. Angenommen, der Mond berühre nach x Stunden den Schattenrand, was sowohl beim Anfang als beim Ende der Finsterniß der Fall sein muß, so hat er in dieser Zeit 1873x Bogensekunden abgemacht. Seine Breite beträgt $21'58'' = 1318$ Sek.; überdies rückt er stündlich $3'6{,}2'' = 186{,}2''$ vor, also beträgt nach x Stunden seine Breite $1318 + 186{,}2x$ Bogensekunden; daraus folgt, daß die Bewegung des Mondes in horizontaler Richtung 1873x und in vertikaler $1318 + 186{,}2x$ Bogensekunden ausmacht. Aus diesen beiden nach verschiedenen Richtungen erfolgenden Mondbewegungen können wir seine resultirende Bewegung leicht finden. Sie ist nach dem Parallelogramm der Kräfte

$= \sqrt{(1873x)^2 + (1318 + 186{,}2x)^2}$ und da wir hierin das Resultat des schnelleren Vorrückens des Mondes gegen die Sonne, also auch gegen den Erdschatten haben, so können wir den Erdschatten als ruhend betrachten, während der Mond ihn passirt. Weil nun um 8 Uhr 41,7 Min. pariser Zeit $= 8$ Uhr $41'42'' + 51'28'' = 9$ Uhr 33 Min. 10 Sek. syrakuser Zeit Vollmond ist, also der Mittelpunkt des Mondes mit dem der Erde und Sonne in einer geraden Linie liegt, so muß zu der Zeit des Anfanges wie des Endes der Finsterniß, wo also der Mondrand den Schattenrand nach außen

Digitized by Google

hin berührte, der Mondmittelpunkt einen Weg zurückgelegt haben, der dem Radius des Schattenkreises nebst seinem eigenen Radius gleich ist. Es kommt jetzt darauf an, den Radius des Schattenkreises zu bestimmen.

Die Sonne sendet ihre Strahlen zu der dunkeln Erde. Diese verursacht, da sie rund und kleiner ist, als die Sonne, einen Schattenkegel. Die Figur zu 52. α) in welcher AB die Sonne, CD die Erde und EF den Schattenkreis darstellen soll, den der Mond zu passiren hat, gewährt die Anschauung und Entstehung des Schattens. Der Radius des Schattenkreises berechnet sich aus der Sonnenparallaxe P, der Mondparallaxe p und dem Sonnenradius ϱ. In beistehender Figur ist ∢ BAE = P, BCE = p, AES = ϱ



und bezeichnen wir den Radius des Schattenkreises mit y, so ist CEM = y. Weiter ist:

$$y = CEM = CEN - MEN$$
$$= BAE + BCE - MEN$$
$$= P + p - \varrho.$$

Setzen wir in diesen Ausdruck die entsprechenden Werthe, so wird:

$y = 8{,}6'' + 57'41{,}5'' - 15'58'' = 41'52{,}1'' = 2512{,}1''$.

Beim Anfange wie beim Ende der Finsterniß hat also der Mondmittelpunkt einen Weg von 2512,1″ + 15′45″ = 3457,1″ abgemacht. Daher ist:

$$\sqrt{(1873x)^2 + (1318 + 186{,}2x)^2} = 3457{,}1;\ \text{oder:}$$
$$(1873x)^2 + (1318 + 186{,}2x)^2 = (3457{,}1)^2;$$
$$3508129x^2 + 1737124 + 490823{,}2x + 34670{,}44x^2 = 11951540;$$
$$3542799x^2 + 490823x = 10214416.$$

Lösen wir diese quadratische Gl. nach §. 395. II. Theil V. Aufl. S. 322 auf, so ist, weil die dortige Gl.:

$$(a + mx)^2 + (d + nx)^2 = c^2$$

$a = 0$, $m = 1873$, $d = 1318$, $n = 186{,}2$, $p^2 = 10214416$,

also $p = 3196$. Nun ist:

Digitized by Google

$$\sin\alpha = \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}} = \frac{186{,}2}{\sqrt{1873^2+186{,}2^2}} = \frac{186{,}2}{1882{,}232}.$$

$$q = \frac{am+dn}{\sqrt{m^2+n^2}} = \frac{1318.186{,}2}{1882{,}232} = 130{,}383$$

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{p}{q} = \frac{3196}{130{,}383}$$

$$\begin{aligned}\log\operatorname{tang}\beta &= \log 3196 - \log 130{,}383\\ &= 3{,}5046068 - 2{,}1152210\\ &= 1{,}3893958\end{aligned}$$

$$\beta = 87^\circ 39'50''; \quad {}^1/_2\beta = 43^\circ 49'55''.$$

Nun ist: $x = -\frac{p}{n}\sin\alpha\cot{}^1/_2\beta$; daher:

$$\begin{aligned}(-x) &= \frac{3196}{186{,}2} \times \frac{186{,}2}{1882{,}232} \times \cot{}^1/_2\beta\\ &= \frac{3196}{1882{,}232} \times \cot{}^1/_2\beta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log(-x) &= 3{,}5046068 - 3{,}2746731 + 0{,}0177544\\ &= 0{,}2476881;\ \text{daher:}\end{aligned}$$

$x_1 = -1{,}7688$ Std. $= -1$ Std. 46 Min. 8 Sek.

Ferner ist:

$$\begin{aligned}x_2 &= \frac{p}{n}\sin\alpha.\operatorname{tang}{}^1/_2\beta\\ &= \frac{3196}{1882{,}232} \times \operatorname{tang}{}^1/_2\beta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log x_2 &= 3{,}5046068 - 3{,}2746731 + 9{,}9822876 - 10\\ &= 0{,}2122213;\ \text{daher:}\end{aligned}$$

$x_2 = 1{,}6301$ Std. $= 1$ Std. 37 Min. 48 Sek.

Hieraus folgt, daß die Finsterniß nach syrakuser Zeit um
$9^h33'10'' - 1^h46'8'' = 7$ Uhr 47 Min. 2 Sek.
anfing und um
$9^h33'10'' + 1^h37'48'' = 11$ Uhr 10 Min. 58 Sek.
endigte.

Um 9 Uhr 33 Min. 10 Sek. syrakusischer Zeit fand Vollmond statt. Rückt der Mondmittelpunkt nun so weit vor, daß eine innere Berührung des Mondes und des Schattenkreises stattfindet, was gleichbedeutend ist mit Anfang und Ende der totalen Finsterniß, so muß er einen Weg zurückgelegt haben, der gleich ist der Differenz zwischen dem Radius des Schattenkreises und seinem eigenen Radius, was $2512{,}1'' - 15'45'' = 1567{,}1''$ ausmacht. Die Zeit, die er

Digitized by Google

hierzu gebraucht, ergibt sich also, wenn wir in obiger Gl. 1567,1″ statt 3457,1″ setzen, und wir erhalten:

$$3542799x^2+490823{,}2x=(1567{,}1)^2-1737124=718678{,}41.$$

Hier ist $p^2=718678{,}41$; also $p=847{,}749$, alles Uebrige, wie in der vorigen Gleichung. Daher ist:

$$\sin\alpha=\frac{186{,}2}{1882{,}232}$$

$$\operatorname{tang}\beta=\frac{847{,}749}{130{,}383}$$

$$\log\operatorname{tang}\beta=2{,}9282673-2{,}1152210$$
$$=0{,}8130463$$
$$\beta=81^\circ15'23{,}3''\,;\ {}^1/_2\beta=40^\circ37'41{,}65''$$

$$(-x)=\frac{p}{n}\sin\alpha\cot{}^1/_2\beta$$

$$\log(-x)=2{,}9282673-3{,}2746731+0{,}0665336$$
$$=9{,}7201278-10;\ \text{daher:}$$
$$x_1=-0{,}5249\ \text{St.}=-31\ \text{Min.}\ 30\ \text{Sek.}$$

$$x_2=\frac{p}{n}\sin\alpha.\operatorname{tang}{}^1/_2\beta$$

$$\log x_2=9{,}5870566-10;\ \text{mithin:}$$
$$x_2=0{,}3864\ \text{St.}=23\ \text{Min.}\ 11\ \text{Sek.}$$

Daher Anfang der totalen Verfinsterung um 9 Uhr 1 Min. 40 Sek. und Ende derselben um 9 Uhr 56 Min. 21 Sek. Die totale Finsterniß dauerte demnach 54 Min. 41 Sek., mithin fand die Mitte derselben um

9 Uhr 1 Min. 40 Sek. + 27 Min. 20 Sek. = 9 Uhr 29 Min. statt.

Es erübrigt noch, die Größe der Verfinsterung des Mondes zu bestimmen. Wie bei der Sonne, wird auch der Monddurchmesser in 12 gleiche Theile getheilt, die man Zolle nennt. Kennen wir bereits den Halbmesser des Schattenkegels an der durchschrittenen Stelle und wissen wir weiter, daß zur Zeit des wahren Vollmondes der Mondmittelpunkt 21′58″ nördlich vom Schattenmittelpunkt steht, die Mondscheibe also ganz in den Schatten eingetaucht ist, so muß zwischen Mondrand und Schattenrand noch ein Ueberschuß an Schatten sein. Die Größe dieses Ueberschusses wird sich leicht bestimmen lassen in einer Zahl, für welche der Monddurchmesser = 12 angenommen wird.

Außer dem in der vorigen Aufgabe angewandten Verfahren kann man nach Littrow zur Bestimmung der Größe der Verfinsterung auch auf folgende Weise verfahren.

Es bezeichne d die stündliche Veränderung des Mondes in der Breite, d_1 die stündliche Veränderung des Mondes

Digitized by Google

und δ die der Sonne in der Länge, d_2 die Breite des Mondes, φ die Neigung der relativen Mondbahn gegen die Ekliptik, s den kürzesten Abstand des Mittelpunktes des Schattenkreises von der Bahn des Mondes, R den Radius des Schattenkreises, r den des Mondes und V die größte Verfinsterung in Zollen ausgedrückt, so ist:

$$\tan\varphi = \frac{d}{(d_1 - \delta)\cos {}^1/_2 d_2}$$

$$s = d_2 . \cos\varphi$$

$$V = \frac{6}{r}(R + r - s).$$

Setzen wir in diesen Formeln die Werthe für d, d_1, d_2, δ, s, R und r, so wird:

$$\tan\varphi = \frac{3'6{,}2''}{(33'41'' - 2'28'')\cos {}^1/_2 . 21'58''}$$

$$= \frac{1862}{18730 . \cos 10'59''}$$

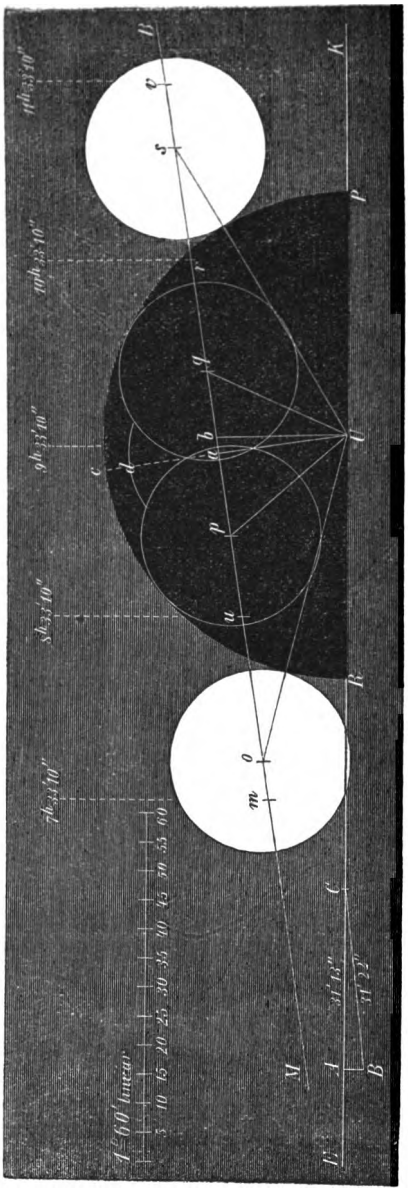
$$\log\tan\varphi = 3{,}2699797 - (4{,}2725378 + 9{,}9999978 - 10)$$
$$= 0{,}9974441 - 2 \text{ oder:}$$
$$= 3{,}9974441 - 5 \text{ mit 2 multiplicirt:}$$
$$= 7{,}9948882 - 10; \text{ also:}$$
$$\varphi = 33'58{,}4''; \text{ daher:}$$
$$s = 21'58'' \cos 33'58{,}4''$$
$$\log s = 3{,}1195154 + 9{,}9999788 - 10$$
$$= 3{,}1194942; \text{ folglich:}$$
$$s = 1316''; \text{ deshalb ist:}$$

$$V = \frac{6}{945}(2512{,}1 + 945 - 1316) = \frac{6 . 2141{,}6}{945} = 13{,}6 \text{ Zoll}$$

Größe der Finsterniß.

Graphische Darstellung der Mondfinsterniß. Nach einem beliebigen Maßstabe als Einheit konstruire man den Schattenkreis um U mit dem bereits in der vorigen Auflösung gefundenen Radius von 41'52,1" auf einer geraden Linie EK, welche die Ekliptik vorstellen soll. Es wurde hier nur die nördliche Hälfte dieses Kreises dargestellt, weil die südliche für unsern Zweck nicht erforderlich ist. Man ziehe Ub senkrecht auf RP und mache Ub gleich der Breite des Mondes zur Zeit der Opposition, also = 21'58". Es kommt jetzt darauf an, die relative Mondbahn zu finden, welche durch den Punkt b geht. Die Neigung der relativen Bahn des Mondes MB erhält man aus der relativen Stundenbewegung des Mondes in Länge und in Breite.

Digitized by Google



Man subtrahire die stündliche Bewegung der Sonne in Länge = 2′28″ von der Stundenbewegung des Mondes in Länge = 33′41″ und nehme den Rest gleich 31′13″ nach dem Bogenminutenmaßstab als die eine Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks (ABC), nämlich AC, dessen andere Kathete AB die stündliche Bewegung des Mondes in Breite ist, also = 3′6,2″. Der kleinere der beiden spitzen Winkel gibt den Neigungswinkel der relativen Mondbahn zur Ekliptik an. Dieses Dreieck befindet sich auf der Linie EK. In demselben ist:

$$AC = 31'13'' = 1873'',$$
$$AB = 3'6{,}2'' = 186{,}2''$$

und daher:

$$BC = \sqrt{1873^2 + 186{,}2^2} = 31'22''.$$

Weil die Bewegung des Mondes in Breite nach Norden hin ist, was durch das Vorzeichen + angedeutet wird, so muß die Mondbahn in der Richtung von links nach rechts aufwärts, also nördlich geneigt sein. Vermittelst des Dreiecks ABC bestimme man den Punkt r und ziehe durch r und b die relative Mondbahn MB. Nun trage man auf derselben die Länge der Stundenbewegung des Mondes ab, dieses seien die Strecken mu, ub, br, rv. Zur Zeit des wahren Voll-

Digitized by Google

mondes stand der Mondmittelpunkt in b um 9 Uhr 33 Min. 10 Sek. syrakuser Zeit; daher um 8 Uhr 33 Min. 10 Sek. in u, um 7 Uhr 33 Min. 10 Sek. in m, um 10 Uhr 33 Min. 10 Sek. in r und um 11 Uhr 33 Min. 10 Sek. in v. Man bestimme 1 Bogenminute in Zeitminuten. Es kommen nämlich $31^{22}/_{60}$ Bogenminuten auf 60 Zeitminuten; also 1 Bogenminute auf 1,91 Zeitminuten.

Jetzt ziehe man aus U die Linie aU senkrecht auf die relative Mondbahn MB, so erhält man in a den Punkt der Mondbahn, wo der daselbst befindliche Mond die größte Verfinsterung hat. Um nun die verschiedenen Phasen der Verfinsterung zu erhalten, ziehe man nach dem Bogenminutenmaßstab mit dem Mondradius je zwei Kreise, die den Schattenkreis bezüglich von außen und von innen berühren. Es seien dies die Kreise um o, p, q, s. Um 7 Uhr 33 Min. 10 Sek. stand der Mondmittelpunkt in m; rückt er von m nach o, so findet die erste Berührung mit dem Schattenkreise statt, also Anfang der Finsterniß. Nun sind mo = $7^1/_4$ Bogenminuten = 13′51″ Zeitminuten; folglich fing die Finsterniß um 7 Uhr 33 Min. 10 Sek. + 13 Min. 51 Sek. = 7 Uhr 47 Min. 1 Sek. an. Rückt der Mondmittelpunkt weiter auf seiner Bahn bis p vor, so findet die erste innere Berührung statt. Um 8 Uhr 33 Min. 10 Sek. stand er in u, legt er also die Strecke up = 14,6 Bogenminuten = 27 Min. 53 Sek. in Zeit zurück, so fing die totale Finsterniß um 8 Uhr 33 Min. 10 Sek. + 27 Min. 53 Sek. = 9 Uhr 1 Min. 3 Sek. an. Wenn der Mondmittelpunkt in a steht, ist er am tiefsten in den Schatten eingedrungen, alsdann ist er nach 9 Uhr 1 Min. 3 Sek. um die Strecke pa = 14,6 Bogenminuten weiter gerückt, wozu er 27 Min. 53 Sek. Zeit gebrauchte, also war die Mitte der Finsterniß um 9 Uhr 28 Min. 56 Sek., was als 9 Uhr 29 Min. angenommen werden darf. Rückt der Mondmittelpunkt von a nach q, so hat er, weil aq = pa zu dieser Strecke 27 Min. 53 Sek. Zeit gebraucht. Steht derselbe in q, so findet die zweite innere Berührung, also das Ende der totalen Finsterniß statt, was daher um 9 Uhr 46 Min. 53 Sek. der Fall war. Als der Mondmittelpunkt in s anlangte, fand die letzte äußere Berührung statt, war also die Finsterniß zu Ende. Um 11 Uhr 33 Min. 10 Sek. stand er in v und weil sv = $11^1/_2$ Bogenminuten = 21′58″ in Zeit sind, so war das Ende der ganzen Finsterniß um 11 Uhr 33 Min. 10 Sek. — 21 Min. 58 Sek. = 11 Uhr 11 Min. 12 Sek.

Es bleibt jetzt noch die Größe der Verfinsterung zu be-

Digitized by Google

stimmen übrig. Hätte der Mondrand, als sein Mittelpunkt in a stand, den Schattenkreis in c berührt, so wäre die Finsterniß eine zwölfzöllige gewesen. Nun bleibt er aber um die Strecke cd vom Rande des Schattenkreises entfernt; daher drückt sich die Größe der Finsterniß durch ca nebst dem Radius des Mondes aus. Weil ca = 20 Bogenminuten, so beträgt dieselbe $20' + 15^3/_4' = 35^3/_4'$, welche, da $15^3/_4' = 6$ Zoll ausmachen, 13,6 Zoll betragen; folglich war die Größe der Verfinsterung = 13,6 Zoll.

59. Mit Bezug auf die Figur zu 57 ist:

$$\sphericalangle \text{FOR} = 82^0 59' 16''$$
$$\sphericalangle \text{FOL} = 83^0 10' 28''$$
$$\sphericalangle \text{MOR} = 23^0 36' 4''$$
$$\sphericalangle \text{SOL} = 23^0 35' 53''.$$

Nun ist $GS = RL \times \cos SOL$ und weil

$RL = 82^0 59' 16'' - 83^0 10' 28'' = -672''$, so ist:

$$GS = 672 \cos 23^0 35' 53''$$
$$\log GS = 2{,}8273693 + 9{,}9620738 - 10; \text{ daher}$$
$$GS = -615{,}8''.$$

Ferner ist $MG = 23^0 36' 4'' - 23^0 35' 53'' = 11''$.

Es beginne nun die Finsterniß x Stunden vor oder nach 7 Uhr 7 Min., so hat die Rectascension des Mondes in dieser Zeit um 2355x Sek., desgleichen die Deklination um 44x Sek. zugenommen, mithin sind die beiden Katheten des rechtwinkeligen Dreiecks GMS jetzt $GS + 2355x$ und $GM + 44x$.

Der Mondradius vermindert sich in 1 Stunde um

$$16'29{,}6'' - 16'26{,}6'' = 3'',$$

also in x Stunden um 3x Sek., mithin ist jetzt sein Radius $16'29{,}6'' - 3x''$; demnach

ist die Summe von Sonnenradius und Mondradius = $15'45{,}5'' + 16'29{,}6'' - 3x'' = 1935{,}1'' - 3x''$; daher ist:

$(GS + 2355x)^2 + (GM + 44x)^2 = (1935{,}1 - 3x)^2$ oder:

für GS und GM die Werthe eingesetzt:

$$(-615{,}8 + 2355x)^2 + (11 + 44x)^2 = (1935{,}1 - 3x)^2;$$
$$379209{,}64 - 2900418x + 5546025x^2 + 121 + 968x + 1936x^2 = 3744612{,}01 - 11610{,}6x + 9x^2 \text{ oder}$$
$$5547952x^2 - 2887839{,}4x = 3365281{,}37.$$

Lösen wir diese Gleichung ebenso auf, wie diejenige in 58, so haben wir:

$a = -615{,}8$, $m = 2355$, $d = 11$, $n = 44$, $p^2 = 3365281{,}37$;

$$\text{also } p = 1834{,}47.$$

Nun ist: $$\sin\alpha = \frac{44}{2355{,}4}.$$

Digitized by Google

$$-q = \frac{1449725}{2355{,}4} = 615{,}49$$

$$\text{tang}\beta = \frac{p}{q} = \frac{1834{,}47}{615{,}49}$$

$$\log\text{tang}\beta = 3{,}2635096 - 2{,}7892210$$
$$= 0{,}4742886$$
$$\beta = 71^{\circ}27'9{,}5''; \quad {}^1/_2\beta = 35^{\circ}43'34{,}75''$$

$$(-x) = \frac{p}{n}\sin\alpha \,.\, \text{tang}\, {}^1/_2\beta$$

$$= \frac{1834{,}47}{2355{,}4} \,.\, \text{tang}\, {}^1/_2\beta$$

$$\log(-x) = 3{,}2635106 - 3{,}3720647 + 9{,}8568918 - 10$$
$$= 0{,}7483377 - 1; \text{ daher}$$
$$x_1 = -0{,}56019 \text{ Std.} = -33'37''.$$

Ferner:

$$x_2 = +\frac{p}{n}\sin\alpha \,.\, \cot {}^1/_2\beta$$

$$\log x_2 = 3{,}2635106 - 3{,}3720647 + 0{,}1431083$$
$$= 0{,}0345542.$$
$$x_2 = 1{,}0828 \text{ Std.} = 1 \text{ Std. } 4 \text{ Min. } 56 \text{ Sek.}$$

Demnach war der Anfang der Finsterniß um
7 Uhr 7 Min. — 33 Min. 37 Sek. = 6 Uhr 33 Min. 23 Sek., das Ende derselben um
8 Uhr 7 Min. + 1 Std. 4 Min. 56 Sek. = 9 Uhr 11 Min. 56 Sek.
Daher war die Dauer der Finsterniß
1 Std. 4 Min. 56 Sek. + 33 Min. 37 Sek. = 1 Std. 38 Min. 33 Sek.
Weil die Finsterniß um 6 Uhr 33 Min. 23 Sek. anfing, so war der Moment der größten Verfinsterung um
6 Uhr 33 Min. 23 Sek. + 49 Min. 16 Sek. = 7 Uhr 22 Min. 39 Sek.
Um nun zu ermitteln, ob die Finsterniß eine totale war, müssen wir die Größe derselben zu bestimmen suchen. Vor dem Momente der äußern Berührung des Mond- und Sonnenrandes bis zur Mitte der Finsterniß hatte der Mond einen Weg von ${}^{789}/_{900}\sqrt{2355^2 + 44^2}$ Sek. gemacht. Da der Radius um 7 Uhr 7 Min. = 16'29,6" und um 8 Uhr 7 Min. = 16'26,6" beträgt, so nimmt derselbe stündlich 3" ab. Vom Anfang der Finsterniß bis 7 Uhr 7 Min., welches $33'37'' = {}^{2017}/_{3600}$ Std., war er also um ${}^{2017}/_{3600} \times 3'' = {}^{2017}/_{1200}'' = 1{,}68''$ größer, von da bis zur Mitte der Finsterniß nahm er ${}^{789}/_{900} \times 3'' = {}^{789}/_{300} = 2{,}47''$ ab, daher im Ganzen um $2{,}47'' - 1{,}68'' = 0{,}79''$; folgl. ist sein Radius jetzt $16'29{,}6'' - 0{,}79'' = 16'28{,}81'' = 988{,}8''$. Nun ist MSM'

Digitized by Google

ein rechtwinkeliges Dreieck, worin $MM' = {}^{739}/_{900}\sqrt{2355^2+44^2}$ $= 1934{,}05''$; $MS' = 16'28{,}81'' + 15'45{,}5'' = 1934{,}31''$; folglich: $SM' = \sqrt{1934{,}31^2 - 1934{,}05^2} = 31{,}71''$

$BM' = BS - SM' = 945{,}5'' - 31{,}71'' = 913{,}79''$

$AB = AM' - BM' = 988{,}8'' - 913{,}79'' = 75''$; daher

$BC = AC - AB = 2.988{,}8'' - 75'' = 1902{,}6''$;

ist, wenn wir die Größe der Verfinsterung mit V bezeichnen:

$$V = \frac{6.1902{,}6}{945{,}5} = 12{,}08 \text{ Zoll.}$$

Hieraus folgt, daß die Finsterniß eine totale war, deren Anfang, Ende und Dauer noch zu bestimmen ist. Sowohl bei ihrem Anfang als auch bei ihrem Ende bestand die dritte Seite des rechtwinkeligen Dreiecks, nämlich MS aus der Differenz der Radien von Sonne und Mond, weshalb $MS = 988{,}8'' - 945{,}5'' = 43{,}3''$ ist. Daher haben wir:

$$(-615{,}8 + 2355x)^2 + (11 + 44x)^2 = 43{,}3^2 \text{ oder}$$

$$5547961x^2 - 2899450x + 377455{,}75 = 0.$$

Dividire diese Gl. durch den Coefficienten von x^2, so wird:

$$x^2 - 0{,}5226154x + 0{,}0680348 = 0; \text{ also}$$

$$(x - 0{,}2613077)^2 = 0{,}0682817 - 0{,}0680348$$

$$= 0{,}0002469; \text{ mithin}$$

$$x = 0{,}2613077 \pm 0{,}0157135;$$

$$x_1 = 0{,}2455942 \text{ Std.} = 14'44''$$

$$x_2 = 0{,}2770212 \quad " \quad = 16'37''.$$

Daher war der Anfang der totalen Verfinsterung um 7 Uhr 7 Min. + 14 Min. 44 Sek. = 7 Uhr 21 Min. 44 Sek. und das Ende derselben um 7 Uhr 7 Min. + 16 Min. 37 Sek. = 7 Uhr 23 Min. 37 Sek. Mithin dauerte sie nahezu 2 Minuten.

60. Die Summe sämmtlicher Sterne aller 14 Classen ist gleich der Summe einer geometrischen Progression, wovon das erste Glied $a = 18$, der Exponent $e = 3$ und die Anzahl der Glieder $n = 14$ ist. Nach §. 412.(3) ist:

$$s = \frac{a(e^n - 1)}{e - 1} = \frac{18(3^{14} - 1)}{3 - 1} = 9(3^{14} - 1)$$

$$= 9.4782968 = 43046712.$$

61. Bezeichnen wir den Mondhalbmesser mit r in Minuten ausgedrückt, alsdann ist sein Durchmesser 2r und daher eine Vollmondfläche $= r^2\pi$.

Der Mondhalbmesser erscheint unserm Auge $= 15'33{,}5''$ oder sein Durchmesser $31'7''$ d. h. von den Enden des Durchmessers in unser Auge hingezogene gerade Linien bilden in diesem einen Sehwinkel von $31'7''$. Vom astronomischen

Digitized by Google

Horizonte bis zu unserm Zenith sind 90°. Wir müssen uns also so viele Monde an einander gelegt denken, als 31′7″ in 90° enthalten sind, um einen Himmelsquadranten zu bedecken; daher werden $\frac{360^0}{31'7''}$ Mondflächen den Himmel rund herum in einem größten Kreise bedecken. Nun ist:

$$\frac{360.60}{2r}=\frac{6.60^2}{2r}d=\frac{3.60^2}{r}d.$$

wenn d Durchmesser bedeutet. Der zu dieser Peripherie gehörige Durchmesser ist

$$\frac{3.60^2}{r\pi}d=\frac{2.3.60^2}{\pi}.$$

Denn multipliciren wir erstern Ausdruck im Dividend und Divisor mit 2, so hebt sich 2r gegen d auf, wodurch wir den zweiten erhalten.

Daher ist die Kugelfläche

$$\frac{3.60^2}{r}d\times\frac{3.60^2}{r\pi}d=\frac{3^2.60^4}{r^2\pi}d^2=\frac{2^2.3^2.60^4}{\pi}$$

folglich ist, wenn wir die erforderlichen Vollmondflächen mit x bezeichnen:

$$x=\frac{2^2.3^2.60^4}{\pi}:r^2\pi=\frac{2^2.3^2.60^4}{r^2\pi^2}.$$

Berechnen wir diesen Ausdruck vermittelst Logarithmen, so erhalten wir, weil

$r=15'33{,}5''=15{,}55833$ und $\pi=3{,}1415927$

$\log x=2\log 2+2\log 3+4\log 60-(2\log 15{,}55833$
$+2\log 3{,}1415927)$
$=8{,}6689075-3{,}3782258$
$=5{,}2906817$; daher
$x=195291.$

Da in runder Zahl 200000 Sterne erster bis neunter Größe sind, welche sich auf 195291 Vollmondflächen vertheilen, so kommt nahezu 1 Stern auf eine Vollmondfläche.

C. Aufgaben aus der Chemie.

(Heis §. 109.)

§. 517. Die Atome und Molekulargewichte sind auf das Gewicht des Wasserstoffs $H=1$ bezogen. Daraus folgt unmittelbar, daß sich verhalten:

Digitized by Google

1) Die Atome unter einander, wie ihre Atomgewichte;
2) Die Moleküle unter einander, wie die Molekulargewichte;
3) Die Atome und Moleküle unter einander wie bezüglich ihre Atome und Molekulargewichte.

Die Atomgewichte findet man den chemischen Aufgaben unter dem Namen „Aequivalentzahlen" vorangestellt. Die Molekulargewichte erhält man, indem man die Gewichte der durch die Molekularformeln angegebenen Atome addirt. Irgend eine nach absolutem Gewichte bestimmte Menge eines Elements oder einer chemischen Verbindung kann Bruchtheile von Molekülen, um so weniger also von Atomen, nicht enthalten. Daher verhalten sich in irgend einer Gewichtsmenge einer chemischen Verbindung die Gewichtsmengen der Elemente und ihrer Verbindung zu einander genau so, wie die Gewichtsmengen derselben im Moleküle.

1. Aus der Formel CO_2 ersieht man, daß in der Kohlensäure auf je 1 Atom Kohlenstoff zwei Atome Sauerstoff kommen. Da nun die Gewichte von 1 Atom Kohlenstoff und 1 Atom Sauerstoff sich verhalten wie 12:16, so ist:

$$CO_2 : 2O = (12+2.16) : 2.16 = 44 : 32.$$

Bezeichnet man das Gewicht des in 100 Theilen Kohlensäure enthaltenen Sauerstoffes mit x, so verhält sich:

$$44 : 32 = 100 : x; \text{ daher } x = 72{,}73.$$

2. Die Neutralisation der Schwefelsäure durch kohlensaures Kali erfolgt nach der chemischen Formel:

$$H_2SO_4 + K_2CO_3 = K_2SO_4 + CO_2 + H_2O.$$

Um also 2.1+32+4.16 = 98 Gewichtstheile Schwefelsäure zu neutralisiren, sind 2.39,1+12+3.16=138,2 Theile kohlensaures Kali nöthig; daher

$$98 : 138{,}2 = 100 : x; \text{ mithin } x = 141{,}02.$$

3. Bezeichnet man mit
x die in 37,5 Gramm enthaltene Schwefelsäure
y den „ „ „ „ schwefelsauren Baryt,
z den in x Gramm enthaltenen Sauerstoff
z' den in y Gramm schwefelsauren Baryt enthaltenen Sauerstoff, so erhalten wir folgende Gleichungen:

(1) $100 : 60 = x : z$; (2) $100 : 10{,}457 = y : z'$;
(3) $z : z' = 3 : 1$; (4) $x + y = 37{,}5$.

Setze aus (3) den Werth für z' in (2), so erhalten wir:

$$(5)\quad z = \frac{3.10{,}457}{100} y$$

Diesen Werth für z setze in (1), so ist:

$$(6)\quad x = \frac{10{,}457}{20} y.$$

Digitized by Google

Durch Substitution dieses Werthes für x in (4) wird endlich

$30{,}457y = 750$; $y = 24{,}624$; mithin $x = 37{,}5 - 24{,}624 = 12{,}876$.

4. Die Zersetzung geschieht nach der Formel:

$$NaCl + AgNO_3 = AgCl + NaNO_3.$$

Hieraus folgt, daß 1 Molekül NaCl ein Molekül $AgNO_3$ zersetzt; die in Reaktion tretenden Gewichtsmengen sich also verhalten wie die Molekulargewichte. Es ist also:

$AgNO_3 : NaCl = (108 + 14 + 3.16) : (23 + 35{,}5) = 170 : 58{,}5.$

Daher ist:

$170 : 58{,}5 = 100 : x$; also $x = 34{,}411$ Gewichtstheile.

5. Die Zersetzung geschieht nach folgender Formel:

$$KNO_3 + H_2SO_4 = HKSO_4 + HNO_3.$$

Daraus erhellt, daß 1 Molekül H_2SO_4 ein Molekül KNO_3 zersetzt zu $HKSO_4$, die in Reaktion tretenden Gewichtsmengen sich also verhalten wie die Molekulargewichte, also:

$KNO_3 : H_2SO_4 = (39{,}1 + 14 + 3.16) : (2.1 + 32 + 4.16) = 101{,}1 : 98$

Daher: $101{,}1 : 98 = 100 : x$; also $x = 96{,}933$ Gewichtstheile.

6. Das Eigengewicht eines Gases ist das Gewicht eines Volumens dieses Gases, wenn man das Gewicht eines gleichen Volumens atmosphärischer Luft gleich 1 setzt. Bezeichnet man daher mit V das Volumen von x Gewichtstheilen Wasserstoff und mit V' das Volumen von 100 Gewichtstheilen Sauerstoff, so ist:

(1) $1 : 0{,}06927 = V : x$; (2) $1 : 1{,}10832 = V' : 100$;

(3) $V : V' = 2 : 1$.

Aus (3) folgt $V' = \frac{1}{2}V$; daher aus (2) $V = \frac{100}{0{,}55416}$ in (1) gesetzt, gibt: $x = 6{,}927 : 0{,}55416 = 12{,}5$.

7. Das Gewicht von 1 Volumen Stickstoff und 3 Volumina Wasserstoff ist gleich dem Gewichte der daraus entstandenen 2 Volumina Ammoniak. Da nun die specifischen Gewichte der Gase die Gewichte gleicher Volumina dieser Gase sind, wenn man das Gewicht eines Volumen atmosphärischer Luft = 1 setzt, so ist, wenn x das specifische Gewicht des Ammoniak ist:

$$x = \frac{1}{2}(0{,}96978 + 3.0{,}06927) = 0{,}588795.$$

8. Da sich 2 Volumina $O = 2.1{,}10832$ mit 1 Vol. $C = x$ zu 2 Vol. $CO_2 = 2.1{,}52394$ verbindet, so ist:

$2.1{,}52394 = 2.1{,}10832 + x$; folglich: $x = 0{,}83124$.

9. Bezeichnet man mit

Vt^{15} das gesuchte Volumen des aus 500 Gramm chlor-

Digitized by Google

sauren Kali gewonnenen Sauerstoffs in cc ausgedrückt bei 15° C,

Vt^0 das Volumen der nämlichen Menge Sauerstoff bei 0° C,

P das Gewicht obiger Sauerstoffmenge in Gramm ausgedrückt,

P^0 das Gewicht eines Liters Sauerstoff bei 0° und 760 mm Barometerhöhe in Gramm ausgedrückt, so ist:

(1) $(39{,}1+35{,}5+3.16) : (3.16) = 500 : P.$

Es folgt dies aus der Formel:

$$KClO_3 = KCl + 3O,$$

nach welcher die Zersetzung des Kaliumchlorat ($KClO_3$) in Kaliumchlorid (KCl) und Sauerstoff (O) vor sich geht.

(2) $P^0 : 0{,}0896 = 16 : 1,$

denn die Atomgewichte gasförmiger Körper sind nach Lorscheid pag. 5 gleich den Volumgewichten.

(3) $Vt^0 : 1000 = P : P^0$

da zwei verschiedene Volumina eines Gases sich verhalten, wie die Gewichte dieser Volumina.

(4) $1 : (1+15.0{,}003665) = Vt^0 : Vt^{15},$

d. h. 1 cc hat nach einer Temperaturerhöhung von 15° C das Volumen von $1+15.0{,}003665$; Vt^0 cc haben nach 15° Temperaturerhöhung das Volumen Vt^{15} cc.

Aus (1) folgt: $P = \frac{48.500}{122{,}6} = \frac{24.500}{61{,}3}$

„ (2) „ $P^0 = 16.0{,}0896$

} In (3) gesetzt und entwickelt gibt:

$$Vt^0 = \frac{1000.24.500}{61{,}3.16.0{,}0896}.$$ Setze diesen Werth in (4), so wird:

$$Vt^{15} = \frac{(1+15.0{,}003665).1000.24.500}{61{,}3.16.0{,}0896}$$

$$= \frac{12659700}{87{,}87968} = 144056 \text{ cc.}$$

10. Die Zersetzung geht vor sich nach der Formel:

$$CuO + 2HCl = CuCl_2 + H_2O;$$

1 Molekül CuO geht demnach über in 1 Molekül $CuCl_2$. Das angewandte CuO und das daraus erhaltene $CuCl_2$ verhalten sich daher wie die Molekulargewichte:

$CuO : CuCl_2 = (63{,}4+16) : (63{,}4+2.35{,}5) = 79{,}4 : 134{,}4;$

daher: $79{,}4 : 134{,}4 = 13{,}59 : x$; also: $x = 23$ Gramm.

11. Ein Molekül S_2O_2 gibt durch vollständige Oxydation 2 Moleküle SO_3, also auch bei der Fällung der gebildeten SO_3 mit Bariumnitrat $2BaSO_4$. Der durch Fällung erhaltene

Digitized by Google

schwefelsaure Baryt verhält sich demnach zu der Menge unterschwefeliger Säure, woraus er entstand, wie:

$$2BaSO_4 : S_2O_2.$$ Nun ist:

$2BaSO_4 : S_2O_2 = 2(137+32+4.16) : (2.32+2.16)$.

Daher: $466 : 96 = 10{,}654 : {}^1/_2x$; also: $x = 4{,}389$,

wenn man mit x die ganze Menge S_2O_2 bezeichnet, die im unterschwefeligsauren Natron enthalten war und von dem ja nur die Hälfte zu SO_3 oxidirt wurde.

1 Molekül S_2O_2 gibt ferner 2 Moleküle Ag_2S. Nun ist:

$2Ag_2S : S_2O_2 = 2(2.108+32) : (2.32+2.16) = 496 : 96$;

daher: $496 : 96 = 11{,}325 : {}^1/_2x$; also: $x = 4{,}384$.

Mithin erhält man im Mittel ${}^1/_2(4{,}389+4{,}384) = 4{,}386$ unterschwefelige Säure.

12. Die ganze Menge des im unterschwefeligsauren Natron enthaltenen Schwefels tritt nach Zusatz von rauchender Salpetersäure und Fällung durch Chlorbarium mit Baryum und Sauerstoff verbunden als Baryumsulfat ($BaSO_4$) auf. Da nun 1 Molekül unterschwefeligsaures Natron 2 Atome Schwefel, 1 Molekül Baryumsulfat dagegen 1 Atom Schwefel enthält, so entstehen aus einem Molekül unterschwefeligsaurem Natron 2 Moleküle Baryumsulfat; daher:

$Na_2S_2O_3 : 2BaSO_4 = (2.23+2.32+3.16) : 2(137+32+4.16)$.

Es sei nun x unterschwefeligsaures Natron vorhanden; alsdann ist:

$158 : 466 = x : 41{,}66$; mithin: $x = 14{,}125$.

13. Aus der Zersetzungsformel:

$$2K_3AsO_4 + Fe_2Cl_6 = Fe_2As_2O_8 + 6KCl$$

lassen sich für die Gewichtsmengen des arsensauren Kali (x), des arsensauren Eisenoxyds (y) und des Chlorkaliums (z) folgende Gleichungen aufstellen.

Die in Reaktion tretenden Mengen von arsensaurem Kali und Eisenchlorid verhalten sich demnach wie $2K_3AsO_4 : Fe_2Cl_6$. Nun ist:

$Fe_2Cl_6 : 2K_3AsO_4 = (2.56+6.35{,}5) : 2(3.39{,}1+75+4.16)$.

Daher ist: (1) $325 : 512{,}6 = 19{,}68 : x$; also: $x = 31{,}04$.

Aus 1 Molekül Fe_2Cl_6 entsteht 1 Molekül $Fe_2As_2O_8$. Nun ist:

$Fe_2Cl_6 : Fe_2As_2O_8 = (2.56+6.35{,}5) : (2.56+2.75+8.16)$.

Daher ist: (2) $325 : 390 = 19{,}68 : y$; mithin: $y = 23{,}616$.

Aus 1 Molekül Fe_2Cl_6 entstehen 6 Moleküle KCl. Nun ist:

$Fe_2Cl_6 : 6KCl = (2.56+6.35{,}5) : 6(39{,}1+35{,}5)$.

Daher ist: (3) $325 : 447{,}6 = 19{,}68 : z$; mithin: $z = 27{,}103$.

14. Angenommen, es seien x Gramm schwefelsaures Natron und y Gramm schwefelsaures Kali vorhanden, dann ist:

$$(1)\ x+y = 1{,}9761.$$

Digitized by Google

Nun sind 1 $Na_2SO_4 = 2.23 + 32 + 4.16 = 142$. Diese 142 Gewichtstheile enthalten $1SO_3 = 32 + 3.16 = 80$ Gewichtstheile, demnach enthalten;

x Gramm Na_2SO_4 auch $^{80}/_{142}$ x Gramm SO_3.

Ferner ist: $K_2SO_4 : SO_3 = (2.39{,}1 + 32 + 4.16) : (32 + 3.16)$
$= 174{,}2 : 80.$

Daher enthalten y Gramm K_2SO_4 also $\frac{80}{174{,}2}$ y Gramm SO_3.

Da nun im Gemenge von $Na_2SO_4 + K_2SO_4$ 1,000 Gramm SO_3 gefunden wurde, so ist:

$$(2)\ \frac{80}{142}x + \frac{80}{174{,}2}y = 1{,}000.$$

Aus (1) und (2) folgt $161x = 143$; also: $x = 0{,}8882$ Gramm, daher $y = 1{,}0879$.

14. β) Angenommen, es seien x Gramm NaCl und y Gramm KCl vorhanden, so ist:

$$(1)\ x + y = 3$$

Nun ist ferner: $NaCl : Cl = 58{,}5 : 35{,}5.$
$KCl : Cl = 74{,}6 : 35{,}5.$

Daher ist: $(2)\ \frac{35{,}5}{58{,}5}x + \frac{35{,}5}{74{,}6}y = 1{,}69018.$

Hieraus folgt: $161x = 322{,}75$; also: $x = 2{,}00$ Gramm; daher $y = 1$ Gr.

15. α) Angenommen, es seien x Gramm $CaCO_3$ und y Gramm $SrCO_3$ vorhanden, dann ist:

$$(1)\ x + y = 2.$$

Nun ist ferner: $CaCO_3 : CO_3 = 100 : 44$
$SrCO_3 : CO_3 = 148 : 44$

Daher ist: $(2)\ ^{44}/_{100}x + ^{44}/_{148}y = 0{,}7383.$

Hieraus erhält man: $12x = 12{,}0675$; also: $x = 1{,}00$ Gramm; daher auch $y = 1$ Gramm.

15. β) Nehmen wir an, es seien x Gramm Chlorsilber (AgCl) und y Gramm Bromsilber (AgBr) in dem Gemenge; alsdann ist:

$$(1)\ x + y = 2.$$

Die x Gramm AgCl bleiben beim Ueberleiten von Chlor unverändert, die y Gramm AgBr gehen in AgCl über. Nun verhält sich:

$$AgBr : AgCl = 188 : 143{,}5,$$

daher gehen die y Gramm AgBr in $\frac{143{,}5}{188}y$ Gramm AgCl über.

Digitized by Google

Es ist daher: (2) $y - \frac{143{,}5}{188} y = 0{,}1.$

Aus (2) folgt: $y = 0{,}422472$ und daher: $x = 1{,}577528.$

16. Da 1 Molekül der Base C 1 Molekül der Säure sättigt und das Molekulargewicht der Base $b = a$, das der Säure $= s$ ist, so verbinden sich a Gewichtstheile der Basis mit s Gewichtstheilen der Säure. Ist nun die Gewichtsmenge der Basis $b = x$ Gramm, so verbindet sich diese mit $\frac{s}{a}x$ Gramm der Säure zu $\left(x + \frac{s}{a}x\right)$ Gramm des neutralen Salzes bs. Ferner sättigt 1 Molekül der Base B ein Molekül der Säure. Da nun das Molekulargewicht der Base $B = \alpha$, das der Säure $= s$ ist, so verbinden sich α Gewichtstheile der Base B mit s Gewichtstheilen der Säure. Ist nun das Gewicht der Base $B = y$ Gramm, so verbindet sich diese mit $\frac{s}{\alpha}y$ Gramm der Säure zu $\left(y + \frac{s}{\alpha}y\right)$ Gramm des neutralen Salzes Bs. Da das Gewicht der Säure in den zwei neutralen Salzen $= n$ und das Gewicht der entstandenen Salze bs und $Bs = p$ ist, so wird:

$$(1)\ \frac{s}{a}x + \frac{s}{\alpha}y = n$$

$$(2)\ \left(x + \frac{s}{a}x\right) + \left(y + \frac{s}{\alpha}y\right) = p.$$

Die Differenz zwischen (2) und (1) liefert:

$$(3)\ x + y = p - n.$$

Aus (1) folgt:

$$(4)\ \frac{\alpha}{a}x + y = \frac{a\alpha n}{as}.$$

Subtrahire (3) von (4), so wird:

$$x\left(\frac{\alpha}{a} - 1\right) = \frac{a\alpha n}{as} - (p - n) \text{ oder:}$$

$$(\alpha - a)x = a\frac{\alpha n - s(p-n)}{s}; \text{ also:}$$

$$x = a\frac{\alpha n - s(p-n)}{s(\alpha - a)} \text{ und } y = \alpha\frac{s(p-n) - an}{s(\alpha - a)}.$$

17. Angenommen, in den 5 Gramm der entwässerten schwefelsauren Magnesia seien x Gramm reine schwefelsaure Magnesia ($MgSO_4$), und y Gramm schwefelsaures Natron (Na_2SO_4), alsdann ist:

Digitized by Google

$$(1)\ x+y=5.$$

Nun enthält 1 Molekül schwefelsaure Magnesia 1 Molekül Schwefelsäureanhidrid. Da nun:

$$MgSO_4 : SO_3 = 120 : 80,$$

so enthalten x Gramm

$$MgSO_4\ {}^{80}/_{120}x \text{ Gr. } SO_3.$$

Ein Molekül schwefelsaures Natron enthält 1 Molekül Schwefelsäureanhidrid. Da nun:

$$Na_2SO_4 : SO_3 = 142 : 80,$$

so enthalten

142 Gr. Na_2SO_4 80 Gr. SO_3, y Gr. Na_2SO_4

also ${}^{80}/_{142}y$ Gr. SO_3.

Das in den beiden schwefelsauren Salzen enthaltene Schwefelsäureanhidrid bestimmt sich aber leicht aus den 9,431 Gr. $BaSO_4$ zu $9{,}431.{}^{80}/_{233}$; folglich ist:

$$(2)\ {}^{80}/_{120}x+{}^{80}/_{142}y = 9{,}431.{}^{80}/_{233}.$$

Aus (1) und (2) erhält man: $11x=44{,}86$; also $x=4{,}078$; daher $y=5-4{,}078=0{,}922$; mithin sind in 100 Theilen $20\times 0{,}922=18{,}44$ Theile wasserfreies schwefelsaures Natron enthalten.

18. Die Gewichtsmengen der Basen b und b′ seien x und y. Da das Molekulargewicht der Base $b=p$, das der Säure $s=q$ ist und sich jedesmal 1 Mol. einer Säure mit 1 Mol. einer Base verbindet, so verbinden sich p Gewichtstheile der Base b mit q Gewichtstheilen der Säure s, x Gewichtstheile der Base b also mit $\frac{q}{p}x$ der Säure s. Das Gewicht des aus x Gr. der Base b und der Säure s entstandenen Salzes ist also $=x+\frac{q}{p}x$. Auf gleiche Weise findet man für das aus y Gr. der Base b′ und der Säure s entstandene Salz das Gewicht $y+\frac{q}{p'}y$; für das aus x Gr. von b und der Säure s′ entstandene Salz $x+\frac{q'}{p}x$, für das aus y von b′ und der Säure s′ entstandene Salz $y+\frac{q'}{p'}y$. Daher ist:

$$(1)\ \left(x+\frac{q}{p}x\right)+\left(y+\frac{q}{p'}y\right)=m$$

$$(2)\ \left(x+\frac{q'}{p}x\right)+\left(y+\frac{q'}{p'}y\right)=n.$$

Digitized by Google

Aus (1) folgt: (3) $\frac{p'x(p+q)}{p(p'+q)}+y=\frac{mpp'}{p(p'+q)}$

„ (2) „ (4) $\frac{p'x(p+q')}{p(p'+q')}+y=\frac{npp'}{p(p'+q')}$.

Die Differenz zwischen (3) und (4) gibt:

$\frac{x(p+q')}{p'+q'}-\frac{x(p+q)}{p'+q}=\frac{np}{p'+q'}-\frac{mp}{p'+q'}$ oder:

$x(p-p')(q-q')=p\{n(p'+q)-m(p'+q')\}$; daher:

$x=p\frac{n(p'+q)-m(p'+q')}{(p-p')(q-q')}$, $y=p'\frac{m(p+q')-n(p+q)}{(p-p')(q-q')}$.

19. Durch Fällen mit K_3AsO_4 bilden sich $Fe_2As_2O_8$ und $Al_2As_2O_8$ und zwar ebenso viele Moleküle $Fe_2As_2O_8$ als Fe_2O_3 und ebenso viele Moleküle $Al_2As_2O_8$ als Al_2O_3 in Auflösung sind. Angenommen nun, 2x Gr. Fe_2O_3 und 2y Gr. Al_2O_3 seien gelöst und die Hälfte der Lösung, x Gr. Fe_2O_3 und y Gr. Al_2O_3 enthaltend, mit K_3AsO_4 gefällt worden.

Da $Fe_2O_3 : Fe_2As_2O_8 = 160 : 390$

$Al_2O_3 : Al_2As_2O_8 = 102{,}6 : 332{,}6$

so geben x Gr. Fe_2O_3 also $\frac{390}{160}x$ Gr. $Fe_2As_2O_8$

und y Gr. Al_2O_3 $\frac{332{,}6}{102{,}6}y$ Gr. $Al_2As_2O_8$.

Daher ist: (1) $\frac{390}{160}x+\frac{332{,}6}{102{,}6}y=7{,}580.$

Die zweite Hälfte der Lösung, ebenfalls x Gr. Fe_2O_3 und y Gr. Al_2O_3 enthaltend, wird mit K_3PO_4 gefällt und der Niederschlag geglüht. Ein Molekül Fe_2O_3 gibt dann 1 Mol. $Fe_2P_2O_8$ und 1 Mol. Al_2O_3 gibt 1 Mol. $Al_2P_2O_8$. Da:

$Fe_2O_3 : Fe_2P_2O_8 = 160 : 302$

$Al_2O_3 : Al_2P_2O_8 = 102{,}6 : 244{,}6,$

so geben x Gr. Fe_2O_3 $\frac{302}{160}x$ Gr. $Fe_2P_2O_8$ und y Gr. Al_2O_3 geben $\frac{244{,}6}{102{,}6}y$ Gr. $Al_2P_2O_8$. Daher ist:

(2) $\frac{302}{160}x+\frac{244{,}6}{102{,}6}y=5{,}806.$

Aus (1) und (2) folgt:

$\left(\frac{302}{244{,}6}-\frac{390}{332{,}6}\right)x=\left(\frac{5{,}806}{244{,}6}-\frac{7{,}580}{332{,}6}\right).160;$

also $5051{,}2x=12321{,}12$; daher $x=2{,}43$ und $y=0{,}51$.

Digitized by Google

20. Das Erz enthalte x Gr. Eisenoxydul (FeO) und y Gr. Eisenoxyd (Fe_2O_3); alsdann ist:

$$(1)\ x+y=m.$$

Durch Lösen, Fällen und Glühen erhält man das Fe_2O_3 als solches wieder, das FeO geht aber über in Fe_2O_3. Die y Gramm Fe_2O_3 geben also wieder y Gr. Fe_2O_3. Das Gewicht der x Gr. FeO dagegen ändert sich, indem 2 Moleküle FeO noch ein Atom O aufnehmen und übergehen in ein Molekül Fe_2O_3.

Da nun $2FeO : Fe_2O_3 = 144 : 160$, so geben x Gr. FeO also $^{160}/_{144}x$ Gr. Fe_2O_3. Daher ist:

$$(2)\ y+{}^{160}/_{144}x=n.$$

Subtrahirt man die beiden Gl., so erhält man:

$x=9(n-m)$; daher $y=10m-9n$.

Für $m=3{,}449$, $n=3{,}614$ wird $x=9(3{,}614-3{,}449)=1{,}485$ und $y=34{,}490-32{,}526=1{,}964$.

21. Die Verbindung enthalte x Gr. FeO und y Gr. Fe_2O_3; alsdann ist:

$$(1)\ x+y=m.$$

Da 1 Mol. FeO 1 Atom Fe und 1 Mol. Fe_2O_3 2 Atome oder 1 Mol. Fe enthält und

$$FeO : Fe = 72 : 56 = 9 : 7$$
$$Fe_2O_3 : 2Fe = 160 : 112 = 10 : 7,$$

so geben x Gr. $FeO\,{}^{7}/_{9}x\,Fe$ und y Gr. $Fe_2O_3\,{}^{7}/_{10}y$ Gr. Fe. Daher wird:

$$(2)\ {}^{7}/_{9}x+{}^{7}/_{10}y=n.$$

Durch Subtraktion der beiden Gl. erhält man:

$({}^{10}/_{9}-1)x={}^{10}/_{7}n-m$; woraus $x=12{,}8571n-9m$; daher nach (1) $y=10m-12{,}8571n$.

Für $m=3{,}449$, $n=2{,}506$ wird $x=32{,}2199-31{,}041=1{,}1789$ und $y=2{,}271$.

22. Die Reduktion geht vor sich nach folgenden Formeln:

$$FeO+2H=Fe+H_2O$$
$$Fe_2O_3+6H=2Fe+3H_2O.$$

Da:

$FeO : Fe = 72 : 56 = 9 : 7$, so erhält man aus

$x\,FeO\,{}^{7}/_{9}x\,Fe$. Da ferner:

$Fe_2O_3 : 2F = 160 : 112 = 10 : 7$, so erhält man aus

$y\,Fe_2O_3\,{}^{7}/_{10}y\,Fe$; daher:

$$(1)\ {}^{7}/_{9}x+{}^{7}/_{10}y=p.$$

Da:

$FeO : H_2O = 72 : 18 = 4 : 1$

$Fe_2O_3 : 3H_2O = 160 : 54 = 80 : 27$, so erhält man aus

$x\,FeO\,{}^{1}/_{4}x\,H_2O$ und aus $y\,Fe_2O_3\,{}^{27}/_{80}y\,H_2O$; demnach ergibt sich:

$$(2)\ {}^{1}/_{4}x+{}^{27}/_{80}y=q.$$

Eliminirt man y, so erhält man:

Digitized by Google

$$10x = {}^{270}/_{7}p - 80q; \text{ also:}$$
$$x = {}^{27}/_{7}p - 8q = 3{,}8571p - 8q; \text{ daher:}$$
$$y = {}^{80}/_{9}q - {}^{20}/_{7}p = 8{,}8888q - 2{,}8571p.$$

23. Die Menge des Eisenoxyduls sei x und die des Eisenoxyds sei y; dann ist: (1) $x+y=m$.
Bei dem Auflösen des Eisenoxyduls und Eisenoxyds in Salzsäure geht ersteres über in Eisenchlorür, letzteres in Eisenchlorid nach folgenden Formeln:
$$FeO + 2HCl = FeCl_2 + H_2O \text{ und}$$
$$Fe_2O_3 + 6HCl = Fe_2Cl_6 + 3H_2O.$$
Durch Schwefelwasserstoff (H_2S) wird das Eisenchlorid in Eisenchlorür nach folgender Formel umgewandelt:
$$FeCl_3 + H_2S = 2FeCl_2 + 2HCl + S.$$
Auf jedes Molekül Eisenchlorid kommt also 1 Atom ausgeschiedenen Schwefels. Da nun 1 Mol. Eisenchlorid aus 1 Mol. Eisenoxyd entstanden ist, so verhält sich die Gewichtsmenge y des Eisenoxyds zur Gewichtsmenge des ausgeschiedenen Schwefels, wie das Molekulargewicht des Eisenoxyds zum Atomgewicht des Schwefels; also:
$$y : n = Fe_2O_3 : S = 160 : 32 = 5 : 1; \text{ daher:}$$
$$y = 5n; \text{ mithin } x = m - 5n.$$
Für $m = 3{,}449$, $n = 0{,}411$ wird $x = 3{,}449 - 2{,}055 = 1{,}394$; $y = 2{,}055$.

24. Das Eisenoxydul geht beim Auflösen in Eisenchlorür ($FeCl_2$), das Eisenoxyd in Eisenchlorid (Fe_2Cl_6) über. Nur das Eisenchlorid wird durch Silberpulver reducirt nach der Formel: $Fe_2Cl_6 + 2Ag = 2AgCl + 2FeCl_2$.
Einem Molekül Fe_2Cl_6 oder, da je ein Mol. Fe_2Cl_6 aus je einem Mol. Fe_2O_3 entstanden ist, einem Mol. Fe_2O_3 entsprechen daher zwei an das Silber abgegebene Chloratome. Da nun:
$$Fe_2O_3 : 2Cl = 160 : 71,$$
so entsprechen einem Gewichtstheile FeO_3 ${}^{71}/_{160}$ Gewichtstheile des an das Silber abgegebenen Chlors, x Fe_2O_3 also ${}^{71}/_{160}$ x Cl. Die Gewichtszunahme p des Silbers ist aber hervorgerufen durch das an das Silber abgegebene Chlor; daher: ${}^{71}/_{160}x = p$; also $x = {}^{160}/_{71}p = 2{,}2535p$.

25. Das Gewichtsverhältniß der Bestandtheile einer chemischen Verbindung ist gleich dem Produkte aus der Anzahl Atome resp. Moleküle und dem Atomgewicht resp. Molekulargewicht dieser Bestandtheile. Aus der procentischen Zusammensetzung erhält man folglich das Verhältniß, in welchem die Anzahl Atome resp. Moleküle der einzelnen Bestandtheile zu einander stehen, indem man die Gewichtsmengen der Bestandtheile durch die Atomgewichte (resp. Molekulargewichte) divi-

Digitized by Google

dirt. Diese Quotienten geben jedoch, da die Bestimmung der procentischen Zusammensetzung ebenso wenig wie die Atomgewichtsbestimmung absolut genau ist, meist nur annähernd die relative Anzahl der Atome resp. Moleküle in der chemischen Verbindung an. Man wird daher die Näherungswerthe suchen müssen und sich für den entscheiden, der einerseits dem zuerst gefundenen Verhältniß möglichst nahe steht, andrerseits aber auch einfach ist, da sich die Atome in einfachen Verhältnissen mit einander verbinden. Da $S = 51{,}61$ und $As = 100 - 51{,}61 = 48{,}39$, so ist das Verhältniß der Anzahl Atome von Arsen und Schwefel =

$$\frac{48{,}39}{75} : \frac{51{,}61}{32} = 0{,}6452 : 1{,}6128.$$

Verwandelt man diesen Quotienten in einen Kettenbruch, den wir mit x bezeichnen, so ist $x = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{806}}}$.

Der zweite Näherungswerth ist $= {}^2/_5$; daher ist die Verbindung As_2S_5. Oder: Bezeichnet man mit $x : y$ das gesuchte Verhältniß, in welchem die Anzahl Schwefelatome zur Anzahl Arsenatome steht, so ist:

$51{,}61 : (100 - 51{,}61) = 32x : 75y$; hieraus folgt:

$x : y = {}^{5161}/_{32} : {}^{4839}/_{75}$ oder:

$x : y = 387075 : 154848$

$= 129025 : 51616$; daher:

$x : y = 5 : 2$ nahezu; mithin As_2S_5.

26. Das Verhältniß der Anzahl Atome Kohlenstoff C, Wasserstoff H und Sauerstoff O zu einander möge $x : y : z$ sein; alsdann ist:

$$x : y : z = \frac{39{,}56}{12} : \frac{7{,}690}{1} : \frac{52{,}75}{16}$$

$$= 3{,}2965 : 7{,}690 : 3{,}2965.$$

Das Verhältniß von C und H, so wie von O und H ist also gegeben durch $\cfrac{3{,}2965}{7{,}690} = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{199}}}$. Mithin ist der erste Näherungswerth $1/2$, der zweite $3/7$ und der dritte ${}^{598}/_{1395}$. Hiervon kommt der erste Näherungswerth $= 1/2$ dem Werthe von $\frac{3{,}2965}{7{,}690}$ zu wenig nahe und der dritte ist zu wenig einfach, man wählt deshalb $3/7$. Mithin ist:

Digitized by Google

$$x : y : z = 3 : 7 : 3$$

und daher ist die Formel für Mannit $C_3H_7O_3$.

27. Es seien x, y, z die Anzahl Moleküle phosphoriger Säure, dreifach Phosphor-Wasserstoff und Phosphorsäure-Hydrat, die auf einander reagiren, dann ist der chemische Vorgang durch folgende Gl. ausgedrückt:

$$xH_3PO_3 = yH_3P + zH_3PO_4.$$

Da nun die Anzahl Wasserstoffatome, Sauerstoffatome und Phosphoratome auf beiden Seiten der Gl. dieselbe sein muß, so ist: (1) $3x = 3y + 3z$ (in Bezug auf x)

(2) $x = y + z$ (in Bezug auf P)

(3) $3x = 4z$ (in Bezug auf O).

Aus diesen diophantischen Gl. erhält man $z = {}^3/_4x$, $y = {}^1/_4x$; daher: $x : y : z = 4 : 1 : 3$.

Es entstehen also aus 4 Molekülen H_3PO_3 ein Molekül H_3P und 3 Moleküle H_3PO_4 oder:

$$4H_3PO_3 = PH_3 + 3H_3PO_4.$$

28. Nach dem bei Aufgabe 25 Gesagten ist die Anzahl der Moleküle:

K_2O, Na_2O, B_2O_3, $C_4H_6O_6$, H_2O bezüglich:

$\frac{74{,}13}{94{,}2}$ Näherungswerthe ${}^3/_4$, ${}^4/_5$, ${}^4/_9$, ${}^{11}/_{14}$

$\frac{16{,}37}{62{,}0}$ " ${}^1/_4$, ${}^4/_{15}$

$\frac{36{,}53}{70{,}0}$ " ${}^1/_2$, ${}^5/_9$

$\frac{208{,}73}{150{,}0}$ " ${}^3/_2$

$\frac{14{,}14}{18{,}0}$ " ${}^3/_4$, ${}^4/_5$.

Indem man die ersten Näherungswerthe nimmt und dieselben, da es keine Bruchtheile von Molekülen gibt, mit 4 multiplicirt, so hat man:

$3K_2O$; $1Na_2O$; $2B_2O_3$; $6C_4H_6O_6$ und $3H_2O$.

29. Angenommen, man habe x Atomgewichte Schwefel-Antimon, y kohlensaures Natron, z Schwefel, s Kalkerde, t antimonsaures Natron, u Natrium-Antimonsulphid, v basisch kohlensaure Kalkerde zu nehmen, so erhält man für die 7 Unbekannten folgende 6 Gleichungen:

(1) $x = t + u$; (2) $3x + z = 8u$; (3) $y = t + 3u$

(4) $y = v$; (5) $s = 2v$; (6) $3y + s = 6t + 4v$.

Setze aus (5) den Werth für s in (6), so wird:

(7) $3y = 6t + 2v$. Setze hierin den Werth für v aus (4), so ist:

(8) $y = 6t$. Aus (8) und (3) folgt:

Digitized by Google

(9) $5t=3u$. Setze aus (1) den Werth für x in (2), so hat man:
(10) $3t+z=5u$. Aus (9) und (10) folgt:
(11) $5z=16u$. Nach §. 402. 19 ist daher:
$z=16$, $u=5$; daher nach (9) $t=3$; nach (8) $y=18$; nach (4) $v=18$; nach (5) $s=36$; nach (1) $x=8$; also nach der Ordnung:
$x=8$, $y=18$, $z=16$, $s=36$, $t=3$, $u=5$, $v=18$.

30. Es können so viele von einander verschiedene Verbindungen von HCO gebildet werden, als die Elemente 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 sich zur dritten Classe mit Wiederholungen variiren lassen, was nach §. 456:

$$^{3}V(8)=8^{3}=512$$

Complexionen gibt. Nun müssen aber diejenigen Variationsformen ausgeschieden werden, die ein Vielfaches andrer Formen sind, da Complexionen wie 222, 333 u. s. w. mit 111, ebenso solche wie 462 mit 231 u. s. w. als gleich angenommen werden sollen. Um nun die auszuscheidenden Complexionen zu erhalten, bilde man nach §. 457 die Variationen zu bestimmten Summen. Sind die Zeiger 1, 2 ... 8, so sind die Variationsformen ohne Wiederholung zur dritten Classe

		Auszuscheidende Vielfache:
zur Summe 3 =	111	222, 333, 444, 555, 666, 777, 888
„ „ 4 =	112	224, 336, 468, Perm. 242, 422, 363, 484, 844
„ „ 5 =	113	226, Perm. 262, 622
	122	244, 366, 488, Perm. 424, 442, 636, 663, 848, 884
„ „ 6 =	114	228, Perm. 282, 822
	123	246 „ 264, 426, 462, 624, 642
„ „ 7 =	124	248 „ 284, 428, 482, 824, 842
	133	266 „ 626, 662
	223	446 „ 464, 644
„ „ 8 =	134	268 „ 286, 628, 682, 826, 862
	233	466 „ 646, 664
„ „ 9 =	144	288 „ 828, 882
	234	468 „ 486, 648, 684, 846, 864
„ „ 10 =	334	668 „ 686, 866
„ „ 11 =	344	688 „ 868, 886

Die auszuscheidenden Variationsformen zur Summe 12, 13 u. s. w. sind bereits in den vorstehenden enthalten; ihre Summe ist $=73$; daher gibt es $512-73=439$ von einander verschiedene Verbindungen von HCO.

Universitäts-Buchdruckerei von Carl Georgi in Bonn.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

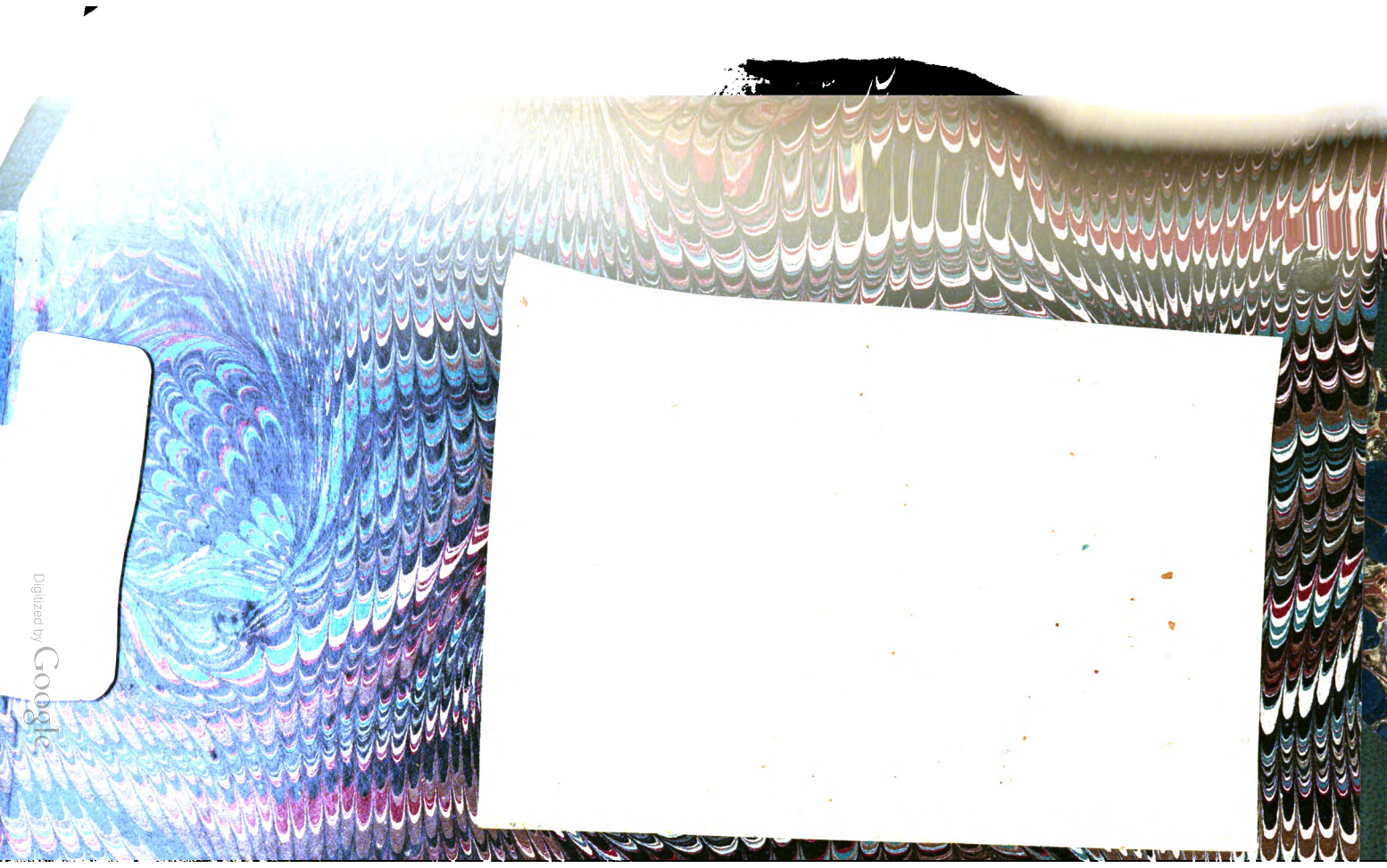
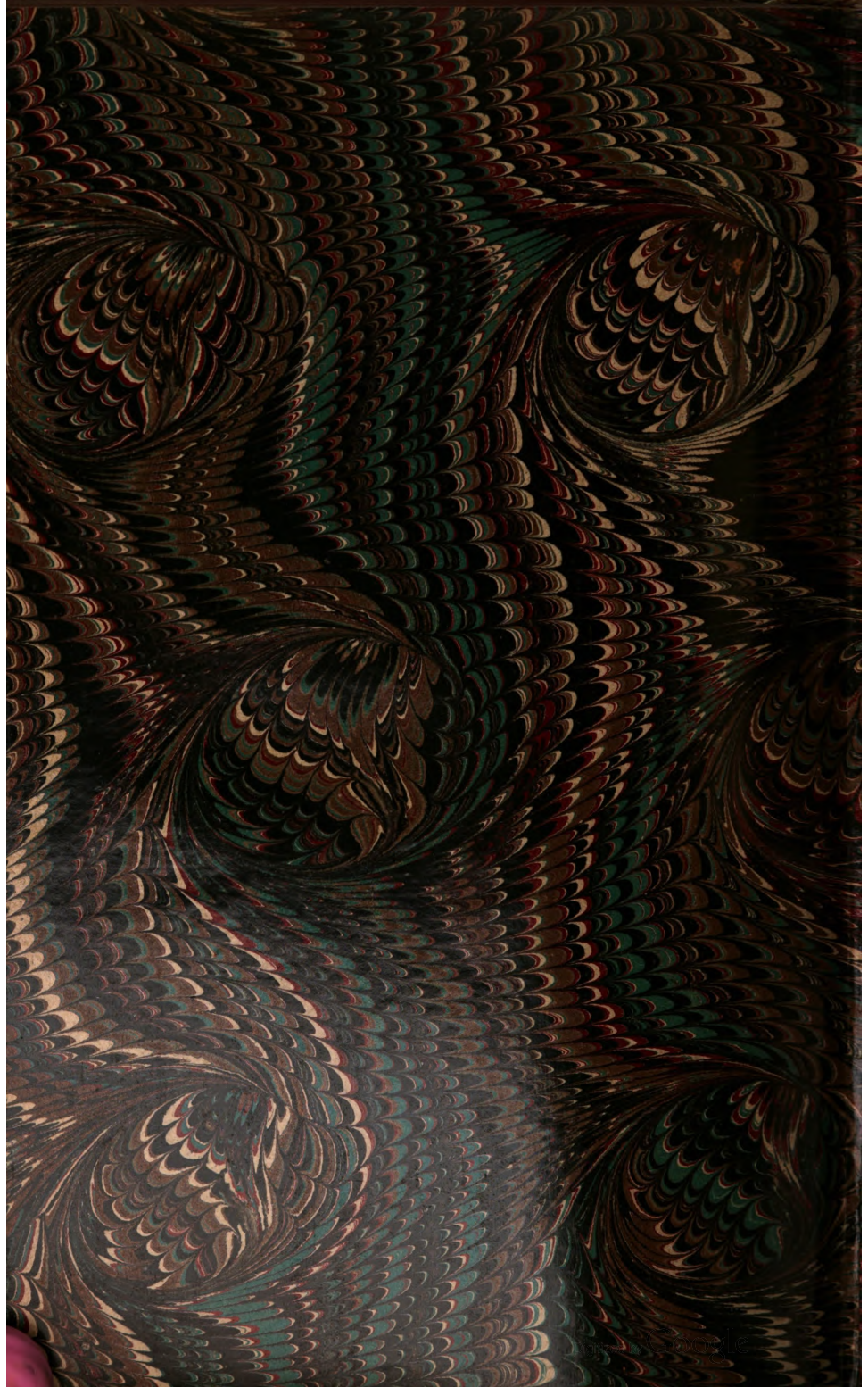
Digitized by Google

1)
2)
3)

1.

2.

Digitized by Google


Digitized by Google